ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN. BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XII. HEFT.

URKUNDEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM MITTELALTER UND DER RENAISSANCE.

HERAUSGEGEBEN VON

MAXIMILIAN CURTZE.

IN ZWEI THEILEN. ERSTER THEIL.

MIT 127 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

MORITZ CANTOR

ZU SEINEM GOLDENEN DOKTORJUBILÄUM

IN TREUER FREUNDSCHAFT UND LIEBE

DARGEBRACHT VOM

HERAUSGEBER.

Mein lieber Freund!

An Deinem Ehrentage wäre ich gern mit einem andern Stoffe Dir entgegengetreten. Da aber die nöthigen Vorarbeiten bis dahin sich nicht bewältigen liessen, so habe ich es vorgezogen mit diesem Strausse wichtiger Quellenwerke zur Geschichte unserer Wissenschaft vor Dir zu erscheinen, um nicht mit ganz leeren Händen zu Dir zu kommen. Das Werk SAVASORDA's wirft, wie Du ja selbst sehen wirst, ein helles Licht auf die Quellen der *Practica Geometriae* des LEONARDO PISANO, zeigt aber für diesen auch, dass sein Wissen und Können doch hoch über dem seines Vorgängers stand.

Man wird mir auch hier wieder, wie bei meiner Veröffentlichung des *Buches der drei Brüder*, jenes zweiten Quellenwerkes LEONARDO's, den Vorwurf nicht ersparen, ich hätte, wie dort das arabische, hier das hebräische Original zu Rathe ziehen sollen. Wenn es sich darum handelte, die Stelle sowohl der drei Brüder in der arabischen Litteratur als die SAVASORDA's in der hebräischen festzulegen, so würde ich der erste sein, das anzuerkennen, dann aber die Herausgabe Berufeneren überlassen. Nun steht doch aber fest, dass die Schriftsteller des Mittelalters, so speciell LEONARDO VON PISA, sich der Übersetzungen des GHERARDO CREMONESE und PLATO's VON TIVOLI bedient haben: will man also die Schriften jener Semiten für die Erklärung und Beurtheilung der mittelalterlichen Mathematiker zu benutzen in der Lage sein, so haben für diesen Zweck die lateinischen Übersetzungen, so schwerfällig und vielleicht so fehlerhaft sie sein mögen, doch einen bei weitem grösseren Werth als die Originale. Wäre dieser Grundtext damals nicht übersetzt worden, so hätten sie eben auf die Kenntnis des Mittelalters gar keinen Einfluss üben können, wie wir das ja an so vielen hochwerthvollen Werken der Araber sehen, die auch heute nur noch im Urtexte vorhanden sind. Selbst solche vollendeten Arbeiten, wie die Abhandlung über Trigonometrie des NASSÎR ED-DÎN, sind spurlos für die Entwickelung der Mathematik im Abendlande verloren gewesen, und ihre Ergebnisse mussten von den grossen Mathematikern des ausgehenden Mittelalters selbstständig neu gefunden werden.

Von einem dieser grossen Mathematiker, in seiner Art vielleicht dem grössten des XV. Jahrhunderts, handelt das an zweiter Stelle stehende Stück. Es ist die Briefsammlung des REGIOMONTAN. Obwohl sie schon einmal durch DE MURR veröffentlicht ist, so lohnt es doch, sie zu erneuern. DE MURR hat sie zum Theil nur auszugsweise abgedruckt, hat aber zugleich das für die Erkenntniss des wirklichen Rechnens in dem Manuscripte enthaltene Material einfach weggelassen. Es dürfte nur sehr wenig Beispiele geben, welche in solcher Vollständigkeit der Berechnung und Darlegung des Gedankenganges aus jener Zeit sich bis auf uns erhalten haben, als diejenigen REGIOMONTAN'S.

An dritter Stelle wird sich im zweiten Theile, der als Heft XIII der „Abhandlungen" erscheinen wird, die Arbeit eines Italieners, des LEONARDO MAINARDI von Cremona, anreihen, mit dem Titel *Practica Geometriae.* Sie behandelt Feldmessung in ähnlichem Umfange wie DOMINICUS DE CLAVASIO. Interessant ist die genaue Darlegung der *Umbra recta* und *versa* genannten goniometrischen Funktionen und die Berechnung des schiefabgeschnittenen Prisma. Die Arbeit stammt aus 1488.

Den Schluss endlich wird die Algebra bilden, welche als die Arbeit des INITIUS ALGEBRAS ad YLEM *Geometram, magistrum suum* bezeichnet wird, und nicht blos durch die wunderliche Benutzung und das Durcheinanderwerfen der Männer der verschiedensten Zeitalter merkwürdig ist, sondern ihren Verfasser, und das ist ein Deutscher, als einen wohl bewanderten Arithmetiker und Algebraiker zeigt, der einem SCHEUBEL und STIEFEL wohl an die Seite gestellt werden darf.

Du wirst ja selbst sehen, wie Vieles Dir die hier veröffentlichten Arbeiten bei einer Neubearbeitung der ersten beiden Bände Deiner Vorlesungen bringen werden, und so will ich denn hier, mein lieber CANTOR, dieser Gratulationsepistel ein Ziel setzen, mit dem innigen Wunsche, Du mögest auch in dem heute angehenden zweiten Halbjahrhundert Deiner Doktorwürde mir Deine erprobte Freundschaft und Liebe ungeschwächt bewahren.

Thorn, am 5. Mai 1901.

M. Curtze.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite.
Vorwort	V—VI
Namensverzeichnis	IX—X
I. Der „*Liber embadorum*“ des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli (80 Fig.)	1—183
Einleitung	3—9
Capitulum primum in geometriae arithmeticaeque universalia proposita *Erstes Kapitel:* Die allgemeinen Sätze der Geometrie und Arithmetik	10—25
Capitulum secundum de agrorum dimensionibus *Zweites Kapitel:* Über Ausmessung der Felder	26—129
Pars prima in illorum quadrilaterorum dimensionibus, quorum omnia latera sibi invicem sunt aequalia, nec non et illorum, quorum omnes anguli sunt recti *Erster Theil:* Die Ausmessung derjenigen Vierecke, deren Seiten sämtlich gleich sind, sowie derjenigen, bei denen alle Winkel rechte sind	26—51
Pars secunda in triangulorum dimensionibus *Zweiter Theil:* Die Ausmessung der Dreiecke	50—75
Pars tertia in illorum quadrilaterorum dimensionibus, quorum quaedam rhomboides, quaedam vero diversilatera nuncupantur *Dritter Theil:* Die Ausmessung derjenigen Vierecke, welche theils Rhomboide, theils ungleichseitige Vierecke genannt werden	74—97
Pars quarta in arearum camporum circularium ac semicircularium, et quorum formae sunt plus minusve semicirculo perfecto cognitione *Vierter Theil:* Bestimmung des Inhaltes von kreisförmigen und halbkreisförmigen Feldern und solchen, welche mehr oder weniger sind als ein vollständiger Halbkreis	96—119
Quinta pars in multilaterorum figurarum dimensionibus *Fünfter Theil:* Die Ausmessung der vielseitigen Figuren	118—129
Capitulum tertium in arearum divisionum explanatione *Drittes Kapitel:* Die Darlegung der Feldertheilung	130—159
Capitulum quartum in dimensionibus corporum secundum longitudinem, latitudinem et altitudinem *Viertes Kapitel:* Die Ausmessung der Körper nach Länge; Breite und Höhe	160—183
II. Der Briefwechsel Regiomontan's mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder (47 Fig.)	185—336
Einleitung	187—191

Seite.

I. Regiomontan an Giovanni Bianchini . . . . . 192—195
Rechnungen zu diesem Briefe . . . . . 196—204
II. Giovanni Bianchini an Regiomontan . . . . . 205—209
III. Regiomontan an Giovanni Bianchini . . . . . 209—219
Rechnungen auf die beiden letzten Briefe bezüglich . . . . . 220—234
IV. Bianchini an Regiomontan . . . . . 235—242
V. Regiomontan an Bianchini . . . . . 242—266
Rechnungen zu beiden Briefen gehörig . . . . . 266—291
VI. Regiomontan an Jacob von Speier . . . . . 292—298
VII. Jacob von Speier an Regiomontan . . . . . 299—302
VIII. Regiomontan an Jacob von Speier . . . . . 302—309
Rechnungen zu obigen drei Briefen gehörig . . . . . 309—323
IX. Regiomontan an Christian Roder . . . . . 324—336

Folgende Druckfehler bittet man vor Benutzung des Heftes verbessern zu wollen.

22, 36: 17. — *24,* 25: alternis. — *34,* 19: unumquodque 7. — *78,* 17: latus vero. — *82,* 37: quae sunt. — *110,* 6: eum in 60. — *135,* 24: 4 Ellen. — *136,* 7: lineam *eb.* — 9: lineae *cb.* — 10: totius *af.* — *137,* 7: *eb* gleich. — 8: Linie *cb.* — 9: Linie *fa.* — *141,* 13: von *g* aus. — *144,* 18: itaque *afgc.* — *146,* 20: superficiei. — *148,* 17: lineam *bg.* — *152,* 31: *fg, fa, fc.* — *157,* 13: *fbcg.* — 24: Seite $\widehat{ac}$. — *165,* 18: Prisma. — *172,* 9: Ex quibus. — *173,* 30: Multipliciert man. — *180,* 36: *cefd.* — *181,* 38: *cefd.* — *188,* 2: oberen. — *193,* 17: concludo. — *194,* 28: Stellis fixis. — *198,* 1 v. u.: sin 9°28′. — *210,* 31: apud me. — *215,* 12; arcum *zh.* — *218,* 1 v. u.: vocis. — *222,* 10: quadratum *qv.* — 3 v. u.: 52 · 52. — *228,* 18: 21986. — 21: transiisse. — *238,* 37: facto hac. — *243,* 12: *hq* ad *qx.* — 18: ecliptica. — *246,* 28: *ahgd.* — *247,* 9: rectos. — *250,* 17: invenire. — *251,* 11: ille *zelh.* — 20: tale sit. — *254,* Fig. 28: Der Bogen *hq* muss die Verlängerung von *bh*, nicht von *mh* sein. — *293,* 15: cede, queso,. — *301,* 16: sequenti. — *305,* 29: spectaculo. — *324,* 17: auctores. — *326,* 17: excribrandi. — *328,* 19: tandem. — *331,* 21: constituti. — *336,* 26: d. i. 1471.

Namensverzeichnis.

Abenragel, Hali siehe *Hali*
Abraham bar Chijja = Savasorda 5
Agrimensoren 8
Alantse, Lucas, 211
Albategnius 241, 259, 263—265, 324, 326
Albumasar 300, 305, 306
Alberti, Leon Battista, 264, 292, 293
Alchabitius 295
Alfonsini 264, 326, 327, 329
Alfonsus 218, 295, 307
Algebras, Initius, VI
Alhacen 258
Alliaco, Petrus de, 306
Die *Alten* 15
Anglicanus, Joh., siehe *Ashenton*
Antonini, Petrus, 293
Antonius de Monte Ulmi 306
Apollonius Pergaeus 304
Aquinas Dacus 325
Arabes 10, 182, 283, 328, 330
Archidiaconus (Parmensis) 295
Archimedes 4, 8, 236, 293, 331, 335
Archimenides siehe *Archimedes*
Aristoteles 327
Arsemides siehe *Archimedes*
Arzachel 241, 263
Ashenton, Johannes, 241, 306
Atelhard von Bath 5
Avogario, Pietro Buono, 195

Bessarion der Kardinal 192, 194, 195, 205, 206, 209, 210, 257, 266, 292, 293, 302 327
Bianchini, Giovanni, 185—336, 187, 190, 192—291, 192, 196, 204—206, 209, 224, 228, 235, 237, 241, 242, 249, 266, 272, 292, 295, 307, 329, 331, 334
Bivilaqua, Simon, 205
Blanchinus siehe *Bianchini*
Blasius 341
Boetius 16—18
Boncompagni, Baldassarre, 6
Bonus, Petrus, siehe *Avogario*
Borromei, Alessandro, 206, 210
v. Braunmühl, A., 211, 220
Briscensis, Christophorus, siehe *Christophorus*
Drei *Brüder* V, 7, 8, 74
Bubnov, Nicolaus, 3, 4

Cameracensis, Petrus, siehe *de Alliaco*
Campano, Giovanni, 259, 304, 305, 328
Cantor, Moritz, III, VI, 259, 262, 333
Castellodurante, Petrus de, siehe *Petrus*
Chinesen 295
Christophorus Briscensis 192, 205, 209
Christus 96, 158, 174, 205, 208, 300, 305—307, 324, 336
Clavasio, Dominicus de, siehe *Dominicus*
Conradinus 293
Coppernicus, Nicolaus, 327
Corvinus, Matthias, siehe *Matthias*
Cusanus, Nicolaus, siehe *Nicolaus von Cusa*

St. Dionysius 293, 300
Dionysius Areopagita 301
Diophantus 256
Dominicus de Clavasio VI
Doppelmayr, Joh. Gabriel, 190
Dositheus 293

Eratosthenes 293
Ersemides = Archimedes 4
Eshuide, Joh., siehe *Ashenton*
d'Este, Duca di Ferrara, 190, 206, 208
Euklides 6, 8, 18, 19, 37, 63, 102, 103, 132, 133, 166, 167, 233, 235, 236, 244, 246, 247, 259, 328
Eutokius von Askalon 293

Federigo, Conte di Urbino, 292
Florentinus, Paulus, siehe *Toscanelli*

Geber Hispanus 243, 304
Gerbert 3, 4, 8
Germanus, Joh., siehe *Regiomontan*
Gherardo Cremonese V, 4, 5, 7, 8, 194, 214
Gonzaga, Annibale de, 206
Graeci 328

Gromatici 8
Guilelmini 6

Hali Abenragel 294
Heiberg, Joh. Ludwig, 194
Hipparchus 324, 325
Holschius, Johannes, 189

Jacob von Speier 185—336, 187—190, 292—323, 292, 293, 295, 300—302, 304, 311—313, 316—318, 329
Jesus Christus siehe *Christus*
Johannes Anglicanus siehe *Ashenton*
Johannes Germanus siehe *Regiomontan*
Jordanus Nemorarius 9
Isolani, Graf, 5
Judaei 307

Keller, Johannes, 325

Leonardo Cremonese VI
Leonardo Pisano V, 5—9, 11, 21, 22, 24, 28, 31, 34, 37, 38, 43, 44, 46—50, 53, 55, 57, 58, 60, 62, 70, 74, 76, 80, 82, 85, 86, 88, 90, 93, 96, 99, 100, 104, 106, 109, 119, 120, 123, 126, 128, 130, 132, 136, 139, 140, 145, 147, 149, 151, 152, 154, 156, 159, 174
Leonello d'Este, duca di Ferrara, 205
Libri, Guilielmo, 3, 4
Lichtenstein, Petrus, 194
Lucianus 300, 305, 308
Lullus, Raimundus, 329

Mainardi, Leonardo, siehe *Leonardo Cremonese*
Maria, die Jungfrau, 205, 209
Matthias Corvinus König von Ungarn, 211
Menelaus 244, 304, 329
Messahalah 306
Mileus = Menelaus 244
Monte Regio, Joh. de = Regiomontan 213
Monte Ulmi, Antonio de, siehe *Antonio*
Muhamed ben Mûsa Alchwarizmi 7
de Murr, Christ. Theod., V, 189, 204, 302, 333, 336

Nassîr ed-Dîn V, 220
Nemorarius, Jordanus, siehe *Jordanus*
Nicolaus von Cusa 329

Octavianus, Comes Urbinatum, 292, 298, 301, 309

St. Paulus 301

Paulus Florentinus siehe *Toscanelli*
Petrejus, Johannes, 306.
Petrus Antonini 293
Petrus Bonus siehe *Avogario*
Petrus Cameracensis siehe *de Alliaco*
Petrus de Castellodurante 293
Peurbach, Georgius, 194, 211, 213, 264, 327
Polycarpus 301
Plato von Tivoli V, 1—183, 3, 5, 6, 10, 11, 182, 183, 214
Ptolemaeus rex 293
Ptolemaeus, Claudius, 8, 99, 193, 194, 203, 228, 236, 238, 249, 254, 263—265, 294, 295, 304, 306, 307, 324—326

Ratdolt, Erhardus, 259
Regiomontan, Johannes, VI, 185—336, 187—192, 194—196, 198, 201, 202, 204—206, 209—211, 213, 214, 220 bis 224, 233—235, 237, 242, 243, 249, 254, 256, 258, 259, 263, 266, 279, 285, 288, 292, 293, 295, 297, 298, 302, 304, 305, 309—311, 313, 315, 317, 323, 324, 328, 329, 332—335
Riccardi, Pietro, 195, 205, 264, 306
Roder, Christian, 185—336, 187, 188, 190, 292, 324—336, 324, 325, 336
Rothmann, Christoph, 239

Santbach 251
Santini 306
Savasorda V, 1—183, 3, 5—8, 10, 11, 34, 38, 44, 47, 74, 99, 102, 106, 109, 110, 173, 174, 182, 183
Scheubel, Joh., VI
Schoner, Andreas, 211
Spira, Jacobus de, siehe *Jacob von Speier*
Stange 336
Steinschneider, Moritz, 5
Stiefel, Michael, VI

Tanstetter 211
Tassinus 242
Thebit 218, 263, 297
Theodosius 214, 243, 329
Toscanelli, Paolo dal Pozzo, 264

Urbino, Conte di, 189, 190

Veteres 14

Wapowski, Bernhard, 327
Werner, Johann, 327
Wüstenfeld, F., 4, 6.

Yles Geometra VI

I.

DER „LIBER EMBADORUM“ DES SAVASORDA IN DER ÜBERSETZUNG DES PLATO VON TIVOLI.

Der Liber Embadorum des Abraham bar Chijja Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli.

Einleitung.

Der Text der nachfolgenden Ausgabe ist zwei Handschriften der Pariser Nationalbibliothek entnommen, welche mir auf Verwendung des Herrn Ministers der geistlichen pp. Angelegenheiten und durch Vermittelung des Auswärtigen Amtes des Deutschen Reichs von der Direktion genannter Bibliothek zur Benutzung nach Thorn gesendet waren, für welche Liberalität ich allen betheiligten Faktoren hier meinen ergebensten Dank auszusprechen mich beehre.

Die erste dieser Handschriften hat die Bezeichnung *Manuscrit latin 11246,* früher *Supplément latin 774,* unter welcher Bezeichnung sie Libri[1]) anführt. Es ist eine Quarthandschrift von 48 Pergamentblättern, welche mit 5 Vor- und ebensoviel Nachblättern in Papier in einen Band zusammengebunden sind. Libri, a. a. O., setzt sie in das XIII. Jahrhundert, Bubnov in den *Opera Gerberti*[2]) in das XV. Meiner Ansicht nach hat Libri recht. Die Handschrift ist nämlich fast ohne Abkürzungen und so vorzüglich geschrieben, wie sie das XV. Jahrhundert kaum aufzuweisen hat. Der Schreiber, oder vielleicht ein Korrektor, hatte vielerlei Auslassungen theils über der Zeile theils auf den breiten Rändern ergänzt; ein späterer Besitzer hat alle diese Ergänzungen, weshalb ist unbestimmbar, fein säuberlich ausradiert, so dass es nur dem günstigen Umstande, dass im XVI. Jahrhunderte, bevor dieser Vandalismus geschehen war, jemand von dieser selben Handschrift Abschrift genommen hatte, zuzuschreiben ist, dass trotz alledem der vollständige Text erhalten wurde. Unsere Arbeit umfasst Blatt 1—37′.

1) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, II, 480—486.
2) Bubnov, *Opera Gerberti,* Berolini 1898, 302—335.

Auf derselben Rückseite von Blatt 37 beginnt dann eine weitere Abhandlung: *In nomine domini misericordis et miseratoris incipit liber* Ersemidis *in quadratum(!) circuli.* Es ist das eine von der Übersetzung des Gherardo Cremonese gänzlich abweichende Bearbeitung der *circuli dimensio* des Archimedes.[1]) Sie lässt den ersten Theil der Berechnung durch die eingeschriebenen Vielecke völlig aus. Dies Stück reicht bis Blatt 39. Auf Blatt 39′ bis 47 recto, Zeile 15 folgen weiter Auszüge aus dem zweiten und dritten Buche der Geometrie Gerberts[2]), die dann noch vorhandenen drei Seiten enthalten verschiedene theils geometrische, theils arithmetisch-algebraische Aufgaben, welche Libri, a. a. O., ebenfalls wie alles Vorhergehende Savasorda zugeschrieben hat. Die völlig abweichende Schreibart und Orthographie lassen das jedoch nicht zu. Der Verfasser ist aber jedenfalls ein Italiener gewesen: Ausdrücke wie *„3 et mezo“* und ähnliche beweisen dies schon allein. Am Schlusse muss mindestens ein Blatt verloren gegangen sein, das aber durch den Abschreiber des XVI. Jahrhunderts noch gelesen und copiert wurde.

Diese letztere Abschrift befindet sich in derselben Bibliothek unter der Bezeichnung *Manuscrit latin 7224.* Es ist eine Foliohandschrift auf Papier und umfasst 3 Vor-, 84 bezeichnete und beschriebene Blätter und 3 Nachblätter. Sie ist eine wortgetreue Copie der andern Handschrift und enthält alle darin befindlichen Stücke in demselben Umfange und derselben Reihenfolge, nur dass sie, wie schon gesagt, die in 11246 ausradierten Stellen und das letzte verlorene Blatt noch gelesen und abgeschrieben hat. Dass hin und wieder einmal eine Abkürzung falsch aufgelöst ist, thut dem Werthe derselben keinen Abbruch.

Bei der Festsetzung des Textes habe ich mich, soweit das, ohne unabsichtliche Irrthümer des Schreibers zu übernehmen, möglich war, streng an die Lesarten der ältern Handschrift, die ich mit *A* bezeichne, gehalten. Die durch die jüngere Abschrift, ich nenne sie *B*, erhaltenen Ergänzungen sind durch gebrochene Klammern ⟨ ⟩ gekennzeichnet und unter dem Texte in den Abweichungen der Handschriften ist stets hinzugefügt, ob die betreffende Rasur über der Zeile oder auf dem Rande geschehen ist. Solche Worte, welche in *A* ganz ausgelassen und von dem Korrektor nicht ergänzt waren, die also auch *B* nicht gelesen hat, sind in ebensolche Klammern eingeschlossen, dann aber durch das Wort *„fehlt“* unter dem Texte

1) Wenn also Wüstenfeld, *Übersetzungen Arabischer Werke in das Lateinische,* S. 59—60 des Sonderabdrucks diese Übersetzung mit der Gherardo's identificiert, so irrt er.

2) Bubnov, a. a. O.

als von mir ergänzt bezeichnet worden. Die Figuren sind in beiden Handschriften sehr gut gezeichnet: auch sie habe ich, soweit möglich, nach *A* gegeben; die Paragraphenzahlen habe ich hinzugefügt.

Das Werk SAVASORDA's ist von LEONARDO PISANO bei Abfassung seiner *Practica Geometriae* zum Vorbilde genommen worden. LEONARDO hat die ganze Anlage seiner Arbeit nach dem *Liber Embadorum* gemacht, nur hat er, altem Gebrauche folgend, die Dreiecksrechnung vor der Quadrat- und Rechtecksberechnung abgehandelt, darin ist SAVASORDA folgerichtiger als LEONARDO. In den Anmerkungen habe ich die Gleichungen zwischen beiden Schriftstellern, die sich oftmals bis auf die benutzten Zahlenbeispiele erstrecken, nachgewiesen. LEONARDO hat aber, das ist richtig, mit dem empfangenen Pfunde gewuchert, vieles theils weiter ausgeführt, theils andern Verfassern entnommen, theils aus Eigenem hinzugefügt, so dass seine Geometrie doch hoch über der SAVASORDA's steht.

Über unsern Verfasser selbst setze ich das im Auszuge hier her, was Steinschneider darüber zusammengestellt hat.[1]) Danach lebte ABRAHAM BAR (Sohn des) CHIJJA HA NASI (der Fürst) am Ende des XI. und Anfange des XII. Jahrhunderts meist zu Barcelona und hielt sich nur vorübergehend in der Provence und dem südlichen Frankreich auf. Von hoher Stelle war ihm der Ehrentitel *Sahib al Schorta*, d. h. Oberst der Leibwache, verliehen, der dann von seinem Übersetzer, PLATO VON TIVOLI, in SAVASORDA verdreht wurde. Dieser älteste bekannte Übersetzer mathematischer Werke aus dem Arabischen diente SAVASORDA dabei als Dolmetscher. Von den vielfachen Schriften ABRAHAM's setze ich hier nur den Titel der Urschrift des *Liber Embadorum* her: *Chibbur ha-Meschika we-ha-Tischboreth.* Von diesem hat der Übersetzer die Einleitung sowohl als den Epilog weggelassen. Die Einleitung soll sich an die französischen Juden wenden und ihnen vorwerfen, dass sie die Regeln der Geometrie nicht richtig kennten, und deshalb falsche Rechnungen ausführten. Deshalb habe er das Werk zu ihrem Gebrauche geschrieben. Diese Geometrie ist wahrscheinlich das älteste Werk SAVASORDA's, da nach den Handschriften die Übersetzung am 15. Tage des Monats Saphar im Jahre DX der Araber, d. h. am 30. Juni 1116 beendet ist. Sie geht daher auch allen Übertragungen ATELHARD's VON BATH sowie des GHERARDO CREMONESE voraus.

Die Übersetzung PLATO's findet sich ausser in den beiden Pariser Handschriften, soweit bekannt ist, noch in der Magliabecchiana zu Florenz mit der Bezeichnung: *Scaffale 2, Palchetto IV, No. 36* und *St. Marco 184.* Ebenso soll Graf ISOLANI in Bologna ein Exemplar besitzen. Auch in dem

1) STEINSCHNEIDER in *Bibliotheca Mathematica* 1896, 33 ff.

Catalogus Manuscriptorum Angliae et Hiberniae Vol. II P. II S. 42, No. 697 findet sich aufgeführt SAVASORDAE *Judaei Liber de Areis Hebraice scriptus et a PLATONE TIBURTINO in Latinum translatus anno Arabum DC(!) mense saphar,* wo DC sicherlich nur Schreib- oder Druckfehler ist, da alle übrigen Handschriften DX haben, im Jahre DC auch PLATO VON TIVOLI kaum noch am Leben gewesen wäre. Genauere Notizen über diese Exemplare sehe man bei BONCOMPAGNI, *Delle versioni fatte da PLATONE TIBURTINO traduttore del secolo duodecimo.* Roma 1851, p. 31 u. ff. Wenn dort nach GUILELMINI darauf hingewiesen wird, es seien in Handschriften LEONARDO'S VON PISA Auszüge aus SAVASORDA vorhanden, so sind doch gerade diejenigen Theile, welche dort herangezogen werden, nicht aus dem *Liber Embadorum* genommen, dürften überhaupt nicht von SAVASORDA herrühren. Jedenfalls ist aber beachtenswerth, dass schon so frühzeitig auf Beziehungen zwischen LEONARDO und SAVASORDA hingewiesen ist.

Was WÜSTENFELD in seiner Abhandlung: Übersetzungen Arabischer Werke in das Lateinische, S. 39 des Sonderabzuges von PLATO schreibt, „PLATO, von Tivoli gebürtig, lebte in Spanien, lernte dort das Hebräische und Arabische und übersetzte aus beiden Sprachen mathematische und astronomische Werke ins Lateinische, aber sehr mangelhaft", trifft für den *Liber Embadorum* sicher nicht zu. Wie der Leser sich überzeugen wird, findet sich in demselben kaum ein Fehler in den Deduktionen. Dass man von einem Manne des angehenden XII. Jahrhunderts kein klassisches Latein verlangen kann, ist ja selbstverständlich, aber jeder wird mir zugeben, dass man ohne jede Schwierigkeit der Übersetzung zu folgen im stande ist, und die oftmals vorhandene Schwulst des Stiles ist nicht sowohl Schuld des Übersetzers, sondern muss dem wirklichen Verfasser zur Last gelegt werden.

SAVASORDA hat sein Buch in vier Kapitel getheilt, deren zweites und umfangreichstes wieder in fünf Theile, *partes,* zerfällt. Das erste Buch enthält die Erklärungen, Postulate und Axiome des EUKLIDES, sowie die im VI.—IX. Buche desselben enthaltenen Erklärungen der verschiedenen Zahlenarten, ferner einige der geometrischen Lehrsätze EUKLID'S über Gleichflächigkeit von Dreiecken und Parallelogrammen und die Erklärung der Ähnlichkeit zweier Dreiecke. Schon hieraus wird man die Abhängigkeit LEONARDO'S von seinem Vorbilde erkennen. Seine *Practica Geometriae* beginnt genau in derselben Weise, nur hat er einen oder den andern Satz hinzugefügt und das Gesagte durch Pisaner Maasseinheiten weitläufiger als SAVASORDA erläutert.

Die Einleitung zum zweiten Kapitel und das, was im ersten Theile desselben über die Ausmessung des Quadrates und des Rechteckes gesagt

ist, bilden bei LEONARDO die *Distinctio prima,* freilich in ganz unverhältnismässig weitläufiger Ausführung, dagegen hat seine *Distinctio secunda,* welche Quadratwurzeln zu finden lehrt, bei SAVASORDA kein Äquivalent. Letzterer nimmt eben die Kenntnis der Quadratwurzelausziehung als bekannt an. Der Rest des ersten Theiles von Kapitel 2 bei SAVASORDA lehrt den Inhalt des Rhombus kennen und geht dann über zur Berechnung der Diagonalen der bisher behandelten Vierecke. Dann aber löst er Aufgaben wie: Der Inhalt eines Quadrates (oder eines Rechteckes) minus oder plus der Summe der Seiten ist bekannt, wie gross ist Seite und Inhalt? und umgekehrt: Bekannt ist die Summe der Seiten minus dem Inhalte, wie gross ist Seite und Inhalt? Es sind das die Lösungen der Gleichungen zweiten Grades $x^2 + ax = b$; $x^2 = ax + b$; $x^2 + b = ax$, welche in bekannter Art behandelt werden. SAVASORDA weiss dabei, dass die dritte zwei verschiedene Lösungen besitzt, und beweist alle Fälle geometrisch aus den Sätzen des 2. Buches EUKLID'S. Parallel dazu ist LEONARDO'S *Pars secunda tertiae dictionis,* welcher sämmtliche Fälle SAVASORDA'S genau in der von diesem gewählten Reihenfolge und mit denselben Zahlenbeispielen umfasst, dann aber, seiner grossen algebraischen Begabung entsprechend, noch eine grosse Anzahl verwickelterer Beispiele hinzufügt. Es ist also nicht die Übersetzung der Algebra des MUHAMED BEN MÛSA ALCHWÂRIZMÎ durch GHERARDO VON CREMONA, welche zuerst dem Abendlande zeigte, wie man quadratische Gleichungen lösen könnte, sondern der *Liber Embadorum* unseres SAVASORDA, dem dieser Ruhm zufallen muss.

Die *pars secunda secundi capituli* bei SAVASORDA behandelt die Ausmessung der Dreiecke. Das Seitenstück bei LEONARDO ist dessen *pars prima tertiae distinctionis.* Er hat, wie wir schon oben erwähnten, die Dreiecke vor den Quadraten, Rechtecken und Rhomben behandelt. Auch hier behält er Beispiele und Reihenfolge der Sätze bei. Die von SAVASORDA ohne Beweis gegebene Regel der drei Brüder für den Dreiecksinhalt aus den drei Seiten (er sagt nämlich am Schlusse: *Haec quidem in geometriae demonstrationibus est intricata, quapropter tibi leviter explanari posse non existimo*) hat LEONARDO ausführlich mitgetheilt und bewiesen und zwar im Ganzen nach den drei Brüdern.

Im dritten Theile seines zweiten Kapitels behandelt SAVASORDA die Parallelogramme, die Paralleltrapeze, die ihm wie LEONARDO *caput abscissa* heissen, und die allgemeinen Vierecke. Bei LEONARDO, der genau wie SAVASORDA vorgeht, dieselben Ausdrücke, Figuren und Formeln benutzt, findet sich der entsprechende Abschnitt auf Seite 77 bis 83.

Abweichend von LEONARDO lässt SAVASORDA im vierten Theile seines

zweiten Kapitels zunächst die Ausmessung des Kreises und von dessen Theilen folgen. Hier hat LEONARDO aus dem Buche der drei Brüder oder der *Circuli dimensio* ARCHIMED'S, die ihm ja beide vorgelegen haben, sowie dem ebenfalls von GHERARDO CREMONESE übersetzten Almageste des PTOLEMÄUS die Sache ausführlich gegeben, aber Seite 100 bis 102 sind wieder SAVASORDA entnommen bis auf die benutzten Namen der Figuren. Dass aber bei SAVASORDA hier die älteste Sehnentafel in lateinischer Sprache vorhanden ist, habe ich schon in der *Bibliotheca Mathematica* I_3, S. 330 nachgewiesen.

Was im fünften Theile des zweiten Kapitels enthalten ist, die Ausmessung der Polygone, sowie der auf Abhängen oder Bergen befindlichen Flächen, hat LEONARDO auf Seite 83 bis 86, dann aber wieder, völlig mit SAVASORDA übereinstimmend, Seite 108 bis 110 abgehandelt.

Das dritte Kapitel unseres *Liber embadorum* handelt von den bei dem Erbrechte der Araber nothwendigen Aufgaben über Feldertheilung. In letzter Instanz gehen die betreffenden Anweisungen jedenfalls auf das Buch *de divisionibus* EUKLID'S zurück. LEONARDO behandelt sie in seiner *Distinctio quarta.* Er hat sämmtliche Theilungen SAVASORDA'S, aber fügt noch eine grosse Zahl anderer hinzu, welche nicht auf Erbtheilung beruhen, z. B. die Theilung der Figuren von einem innerhalb oder ausserhalb derselben gegebenen Punkte aus. Aber da, wo SAVASORDA drei oder vier verschiedene Fälle unterscheidet, thut dies LEONARDO genau in derselben Weise und bezeichnet die zugehörigen Figuren, wie jener, mit *Figura prima, secunda, tertia* u. s. w.

Das vierte Kapitel SAVASORDA'S, das die Ausmessung der Körper behandelt, hat LEONARDO zwar auch an der auf die Theilung folgenden Stelle, wie jener, er hat sich aber hier ein vollkommeneres Muster genommen. Der ganze Abschnitt ist bei LEONARDO eine theils wörtliche, theils durch Beispiele vermehrte Bearbeitung des *Liber trium fratrum.*

Zum Schlusse zeigt SAVASORDA, wie praktisch auf dem Felde untersucht werden kann, welche Arten von Figuren zur Ausmessung vorliegen, und wie man am leichtesten die zur Berechnung nöthigen Höhen und Seiten zu finden im Stande ist. Auch LEONARDO fügt in seiner *distinctio septima* Feldmesserisches seinem Werke hinzu, nur sind es nicht, wie bei SAVASORDA, Anweisungen zum Flächenmessen, sondern Höhen- und Längenmessungen, die er, zum Theil an die Agrimensoren und die Geometrie GERBERT'S erinnernd, darlegt.

Das ist in Kurzem der Gedankengang des *Liber Embadorum.* Wir sind aber sicher, dass ein genaueres Studium desselben seinem Verfasser,

der ein volles Jahrhundert vor LEONARDO sowohl als vor JORDANUS NEMORARIUS lebte, einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der Wissenschaft erobern wird.

Dem lateinischen Texte des Buches ist auf Anregung des Herrn Verlegers eine deutsche Übersetzung gegenübergestellt. Sie dürfte manchem nicht unwillkommen sein.

Thorn, 5. Mai 1901.

M. Curtze.

| *Incipit liber embadorum a* SAVASORDA 1
in hebraico compositus et a PLATONE TIBURTINO *in latinum sermonem translatus anno Arabum D. X. mense saphar.*

Qui omnes mensurandi dividendique modos recte nosse desiderat, universalia geometriae arithmeticaeque proposita, in quibus mensurandi ac dividendi magisterium fundatur, eum scire necesse est, quibus perfecte cognitis in his peritissimus apparebit, et in nullo unquam deviare poterit.

Hunc itaque librum in quatuor capitula partiamus oportet. Quorum primum universalia geometriae et arithmeticae proposita, quibus legentis intellectus ad veram cognitionem aperitur, in se continet; secundum autem cognitionem mensurandi agros secundum figuram sibi propriam, triangulatas scilicet et quadratas seu rotundas aut alius formae cuiuslibet; tertium quidem in divisione omnium figurarum, quarum mensurae in secundo capitulo monstrantur; quartum in metiendo foveas et puteos eorumque similia curret, et etiam ea, quae in altum elevantur nec non et sperica atque vasa.

Demum, ut haec scientia perfecte in hoc libro contineatur, qualiter hoc operemus, indicabimus et ita librum feliciter terminabimus.

Capitulum primum in geometriae arithmeticaeque universalia proposita.

1. *Punctus* est, cuius nulla pars est.

2. *Linea* est latitudine carens longitudo.[1])

3. *Recta* vero *linea* est, quae ponitur super quorumlibet pensatam oppositionem ad invicem.

4. *Superficies* ⟨est⟩, quod longitudine latitudineque tantum continetur.

---

7 apperebit *A*. — 10 congnitionem *und so immer*. — 14 quartum] quantum. — 22 pentotam. — 24 est *fehlt in A und B*.

Hier beginnt der Liber Embadorum von Savasorda *in hebräischer Sprache verfasst und von* Plato von Tivoli *in das Lateinische übertragen im Jahre DC der arabischen Zeitrechnung im Monat Saphar.*

Wer alle Arten, wie Flächen zu messen und zu theilen sind, richtig kennen zu lernen wünscht, muss nothwendigerweise die allgemeinen Sätze der Geometrie und Arithmetik inne haben, auf welchen die Lehre des Messens und Theilens beruht. Hat er diese vollständig in sich aufgenommen, so wird er darin völlig erfahren erscheinen, und kann niemals irgendwo vom Rechten abweichen.

Wir mussten deshalb dieses Buch in vier Kapitel theilen. Davon enthält das erste die allgemeinen Sätze der Geometrie und Arithmetik, durch welche der Verstand des Lesers für die wahre Kenntnis erschlossen wird; das zweite umfasst dagegen die Kenntnis von der Feldmessung nach den verschiedenen Gestalten derselben; nämlich dreieckige, quadratische oder runde und von sonst beliebiger anderer Form; das dritte behandelt die Theilung aller der Figuren, deren Ausmessung im zweiten Kapitel gezeigt wurde; das vierte endlich beschäftigt sich mit der Ausmessung von Gräben und Brunnen und dergleichen, sowie mit derjenigen der körperlichen Gegenstände, der Kugeln und Gefässe.

Dann werden wir zum Schlusse, damit die Anleitung vollständig in diesem Buche enthalten sei, zeigen, wie wir das praktisch behandeln, und so das Buch zum glücklichen Abschlusse bringen.

Erstes Kapitel. Die allgemeinen Sätze der Geometrie und Arithmetik.

1. Ein *Punkt* ist, was keine Theile hat.

2. *Linie* ist eine Länge ohne Breite.[1])

3. Eine *gerade Linie* ist diejenige, welche auf irgend welcher abgewogenen Gegenüberstellung gelegen ist.

4. *Oberfläche* ist, was nur Länge und Breite besitzt.

---

1) Hier ist die Erklärung: *cuius termini puncta sunt* ausgelassen. Leonardo hat dieselbe.

5. *Termini* autem superficiei sunt lineae.

6. *Plana superficies* est, quae super quantumlibet rectarum linearum oppositionem ad invicem dilatatur.

7. *Angulus* vero *planus* est duarum linearum quarumlibet sese in plano tangentium et minime in directum iacentium ad alterutrum inclinatio.

8. Cumque rectae lineae fuerint, quae angulum continent, *angulus* ille *rectilineus* appellatur.

9. Cum linea recta super lineam rectam erigitur, feceritque duos angulos circum se sibi invicem aequales, *rectus angulus* eorum uterque nuncupabitur, et ipsa linea erecta super lineam rectam *cathetus* appellabitur.

10. *Obtusus* autem est *angulus,* qui recto maior existit.

11. *Acutus* vero, qui recto minor perhibetur.

12. Et *terminus* est finis rei.

13. *Figura* quidem est, qui sub uno vel pluribus terminis continetur.

14. *Circulus* autem est quaedam plana figura sub uno termino contenta, infra quem est punctus, a quo omnes rectae lineae, quae egrediuntur usque ad lineam circumferentem, sunt aequales.

15. Hic autem punctus *centrum* circuli vocatur.

16. *Circuli diametrum* est linea recta per circuli centrum ducta et ex utraque parte in ipsius circumferentia terminata, in duo aequalia circulum secans.

17. *Semicirculus* est quaedam plana figura sub diametro et arcu a diametro comprehenso contenta.

18. *Portio* vero *circuli* est figura, quae sub recta linea et circumferentia circuli continetur, sive minor seu maior sit medietate.

19. *Figurae rectilineae* sunt, quae a rectis lineis includuntur.

20. | Quippe *trilaterae figurae,* quae sub tribus rectis lineis continentur; *quadrilaterae* vero, quae quatuor rectis lineis ambiuntur; *multilaterae* autem *figurae* sunt, quae sub pluribus quam quatuor lineis comprehenduntur. 1

21. Figurarum igitur, quae sub tribus rectis lineis continentur, sunt *triangulae figurae,* quarum sunt *trianguli aequilateri,* et sunt, quorum tria latera sunt ad invicem aequalia. Ex ipsis autem sunt *aequicrurii,* et sunt, quorum duo tantum latera sunt aequalia, tertium autem inaequale. Earun-

---

12 perhibetur *B* prohibetur *A*. — 33 aequicruria.

5. *Grenzen* der Fläche aber sind Linien.

6. Eine *ebene Fläche* ist eine solche, die sich auf beliebige gegenüberliegende gerade Linien verbreitet.

7. *Ebener Winkel* ist die Neigung zweier beliebig sich in der Ebene berührenden und nicht in gegenseitiger Verlängerung liegenden Linien gegeneinander.

8. Und wenn es gerade Linien sind, welche den Winkel enthalten, so wird er ein *geradliniger Winkel* genannt.

9. Wenn eine gerade Linie auf einer andern geraden Linie aufgerichtet wird und um sich herum zwei unter sich gleiche Winkel bildet, so heisst ein jeder derselben ein *rechter Winkel,* und die gerade Linie, welche auf der andern errichtet ist, heisst *Loth.*

10. *Stumpf* heisst ein Winkel, welcher grösser als ein rechter ist.

11. *Spitz* aber, welcher kleiner als ein rechter gefunden wird.

12. *Grenze* ist das Ende eines Dinges.

13. *Figur* ist das, was zwischen einer oder mehrerer Grenzen enthalten ist.

14. *Kreis* ist eine nur von einer Grenze umschlossene ebene Figur, innerhalb deren sich ein Punkt befindet, von welchem aus alle geraden Linien, die bis an die Umfangslinie hinausgehen, einander gleich sind.

15. Dieser Punkt aber heisst *Mittelpunkt* des Kreises.

16. *Durchmesser des Kreises* ist eine gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt des Kreises gezogen und auf beiden Seiten in dem Umfange desselben endigend den Kreis in zwei gleiche Theile theilt.

17. *Halbkreis* ist eine ebene Figur, welche zwischen dem Durchmesser und dem von dem Durchmesser überspannten Bogen enthalten ist.

18. *Kreisabschnitt* aber ist eine Figur, welche zwischen einer geraden Linie und dem Bogen eines Kreises enthalten ist, gleichgiltig ob sie grösser oder kleiner als die Hälfte ist.

19. *Geradlinige Figuren* sind solche, welche von geraden Linien eingeschlossen werden.

20. Es sind nun *dreiseitige Figuren,* welche zwischen drei geraden Linien enthalten sind, *vierseitige* aber, welche von vier geraden Linien umschlossen werden; *vielseitige Figuren* dagegen sind die, welche zwischen mehr als vier geraden Linien enthalten sind.

21. Zu den Figuren nun, welche zwischen drei geraden Linien enthalten sind, das sind *dreieckige Figuren,* gehören die *gleichseitigen Dreiecke,* das sind diejenigen, deren drei Seiten einander gleich sind; zu ihnen gehören ferner die *gleichschenkligen Dreiecke,* das heisst diejenigen, bei denen nur zwei Seiten einander gleich sind, die dritte aber ungleich. Es gehören

dem vero sunt *diversilateri.* Hi autem sunt, quorum omnia tria latera inaequalia sunt ad invicem.

22. Item ex trilateribus figuris sunt *trianguli rectianguli,* quorum unus angulus est rectus. Ipsarum quoque sunt *trianguli ampligonii,* quorum unus angulus est obtusus. Sunt etiam eorundem *trianguli acutianguli,* quorum omnes tres anguli sunt acuti.

23. *Figurarum* vero *quadrilaterarum* sunt *quadrati,* et sunt aequilateri et aequianguli.

24. *Figurae parte altera longiores* sunt rectiangulae, sed non aequilaterae.

25. *Alinuaram,* quod quidam dicunt *rhumbos,* est figura quaedam aequilatera, sed non rectiangula.[1])

26. *Rhomboides* vero dicitur figura, cuius omnia duo latera sibimet opposita, nec non et anguli oppositi sunt aequales. Hec autem nec rectos angulos nec aequa latera continebit.

27. Praeter has nempe figuras ⟨omnes *almuncharif*⟩[2]) appellant.

28. Rectae lineae, quae in eadem plana superficie positae et ex utraque parte ad infinitum protractae in neutra partium concurrerint, *subalternae* dicuntur.

Quinque sunt, quae a sagaci peritia veterum requiruntur.

1. Primum quidem est, ut a quolibet puncto in quemlibet punctum linea recta perducatur.

2. Secundum est, ut recta linea terminata super directum et continuum ad infinitum trahatur.

3. Tertium, ut super omnem punctum et omne spatium circulus circinetur.

4. Quartum autem, ut omnes anguli recti sint aequales ad invicem.

5. Quintum vero est, ut, si qua recta linea super duas rectas lineas ceciderit, feceritque duos angulos interiores minores duobus rectis, illae rectae lineae ab ea parte, in qua sunt duo anguli minores duobus rectis, ad infinitum protractae concurrent.

Communes omnium existimationes sunt hae.

1. Res aequales uni eidem sibi invicem sunt aequales.

2. Si aequalibus addantur aequalia, fient etiam ipsa tota aequalia.

---

1 diversilatera. Haec. — 10 rumbos *und so immer A.* rhombus *stets B.* — 13 oppositi] opposita *B.* — 13—14 rectis angulis *A.* — 14 aequi latera *A.* — 15 figuras quas appellant *A u. B. Die Konjektur ist nach dem spätern Texte gemacht.* — 16 eadem] ead'ea *A.* — 17 partium *fehlt in B.* — 23 circinetur] continetur. — 31 inaequalibus *A.*

---

1) *Alinuaram* wird sonst *Helmiaym* oder ähnlich genannt.

2) Die Ergänzung ist dem Kapitel IV dieses Werkes entnommen.

zu ihnen auch die *ungleichseitigen Dreiecke.* Es sind das die, deren alle drei Seiten unter einander ungleich sind.

22. Ebenso gehören zu den dreiseitigen Figuren die *rechtwinkligen Dreiecke,* deren einer Winkel ein rechter ist; es gehören ferner dazu die *stumpfwinkligen Dreiecke,* deren einer Winkel ein stumpfer ist; es gehören endlich dazu die *spitzwinkligen Dreiecke,* deren sämmtliche drei Winkel spitz sind.

23. Zu den *vierseitigen Figuren* aber gehören die *Quadrate,* sie sind gleichseitig und gleichwinklig.

24. Ferner die *Rechtecke* (die nach einer Richtung hin längeren Figuren), sie sind rechtwinklig, aber nicht gleichseitig.

25. Ferner *Alinuaram,* welche von einigen *Rhombus* genannt werden; es ist eine Figur, die zwar gleichseitig, aber nicht rechtwinklig ist.[1])

26. *Rhomboid* aber heifst eine Figur, bei der je zwei gegenüberliegende Seiten und je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind. Sie enthält aber weder rechte Winkel, noch lauter gleiche Seiten.

27. Ausser diesen Figuren heissen alle sonstigen *Almuncharif*[2]) (d. i. *Trapeze*).

28. Gerade Linien, welche in derselben ebenen Fläche gelegen und nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert nach keiner Seite zusammenlaufen, heissen *subaltern (parallel).*

Fünf sind, welche von der weisen Kenntnis der Alten vorausgesetzt werden.

1. Und zwar ist das Erste, dass von jedem beliebigen Punkte nach jedem beliebigen Punkte eine gerade Linie gezogen werde.

2. Das Zweite ist, dass eine begrenzte gerade Linie in ihrer geraden Richtung kontinuierlich ins Unendliche verlängert werde.

3. Das Dritte ist, dass um jeden Punkt mit jedem Abstande ein Kreis beschrieben werde.

4. Das Vierte aber, dass alle rechte Winkel einander gleich sind.

5. Das Fünfte jedoch ist, dass, wenn eine gerade Linie zwei gerade Linien trifft und mit ihnen zwei innere Winkel kleiner als zwei Rechte bildet, diese beiden Linien auf der Seite, auf welcher die beiden Winkel liegen, die kleiner sind als zwei Rechte, wenn sie ins Unendliche verlängert werden, sich treffen müssen.

Gemeinsame Annahmen Aller sind folgende.

1. Grössen, welche ein und derselben gleich sind, sind unter sich gleich.

2. Wenn zu Gleichen Gleiche addiert werden, so werden auch die Ganzen gleich.

3. Et si ex aequalibus aequalia censeris, quae remanent, aequalia sunt.

4. Si inaequalibus aequalia addantur, quae reddunt, inaequalia sunt.

5. Si de inaequalibus abstrahuntur aequalia, residua quoque fient aequalia.

5 **6.** Ea, quae uni et eidem sunt dupla, sibi invicem sunt aequalia.

7. Quae uni et eidem subdupla fuerint, ipsa item aequalia sunt.

8. Illa, quorum unus non excedit alterum, si superponatur alteri alterum, erunt aequalia.

9. Omne totum sua parte maius existit.

10 **10.** Omnis vero res suis collectis partibus aequalis est.

11. Duae rectae lineae super|ficiem non continebunt. 2

Et his, quae ad geometriam pertinent, explicatis, ea, quae ad arithmeticam spectant ostendamus.

1. *Unitas* igitur est id, quo, quidquid invenitur, unum esse dicitur.

15 **2.** Et *numerus* est ex unitatibus profusa collectio.

3. Si minor numerus numerat summam, illius *pars* indubitanter affirmatur.

4. Si vero eum non numerat, eius *plures partes* continebit.

5. Maior autem numerus minoris numeri *multiplex* est, cum ab eius 20 summa numeratur.

6. *Par* quidem *numerus* est, qui in duo aequa sectionem recipit.

7. *Inpar* vero *numerus* est, qui per inaequales partes dividitur et unitate differt a pari.

8. *Pariter par numerus* dicitur, qui aequis vicibus a pari numeratur.

25 **9.** *Pariter inpar* autem *numerus* est, quem aequis vicibus numerat inpar.

10. *Inpariter inpar* dicitur, qui inaequalibus vicibus ab inpari numeratur.

11. *Compositus* vero *numerus* est, quem alius praeter unitatem numerat.

30 **12.** *Communicantes* quidem *numeri* sunt, qui a quovis alio numero communiter numerantur.

13. *Mutabemini* sunt *numeri,* quos Boetius in arismetricis per se

---

2 sunt] erunt *B*. — 10 vero tes *A*, res *B*. — 12—13 aritremetricam *A*. — 15 numerus est *B*, unitas est *A*.

3. Und wenn man von Gleichen Gleiche wegnimmt, so sind die Reste gleich.

4. Wenn zu Ungleichen Gleiche addiert werden, so sind die Ergebnisse ungleich.

5. Wenn von Ungleichen Gleiche abgezogen werden, so sind auch die Reste ungleich.

6. Grössen, welche von ein und demselben das Doppelte sind, sind einander gleich.

7. Grössen, welche von ein und demselben die Hälfte betragen, sind einander gleich.

8. Grössen, deren eine die andere nicht überragt, wenn man die eine auf die andere legt, sind einander gleich.

9. Jedes Ganze ist grösser als sein Theil.

10. Jedes Ding aber ist der Summe seiner Theile gleich.

11. Zwei gerade Linien begrenzen keine Fläche.

Nachdem so das zur Geometrie Gehörige dargelegt ist, wollen wir das, was die Arithmetik angeht, aufführen:

1. Die *Einheit* ist das, wodurch alles, was existiert, eins genannt wird.

2. *Zahl* ist eine aus Einheiten zusammengesetzte Summe.

3. Wenn eine kleinere Zahl eine Summe auszählt, so wird sie ein *Theil* derselben genannt.

4. Wenn sie aber dieselbe nicht auszählt, so enthält sie *mehrere Theile* derselben.

5. Eine grössere Zahl aber ist ein *Vielfaches* einer kleinern, wenn sie von deren Summe ausgezählt wird.

6. Eine *gerade Zahl* ist, welche in zwei gleiche Zahlen getheilt werden kann.

7. Eine *ungerade Zahl* aber ist, welche in ungleiche Theile getheilt wird und um eine Einheit von der geraden verschieden ist.

8. *Gerad gerade* heisst eine Zahl, welche eine gerade Anzahl mal von einer geraden ausgezählt wird.

9. *Gerad ungerade* aber ist eine Zahl, welche eine ungerade Zahl eine gerade Anzahl mal auszählt.

10. *Ungerad ungerade* heisst sie, wenn sie eine ungerade Anzahl mal von einer ungeraden ausgezählt wird.

11. *Zusammengesetzt* heisst eine Zahl, welche von einer andern als der Einheit ausgezählt wird.

12. *Communicierend* sind Zahlen, welche von einer beliebigen Zahl zugleich ausgezählt werden.

13. *Mutabemini (theilerfremd)* sind Zahlen, welche Boetius in seiner

secundos compositos, ad alios vero primos et incompositos appellat, ut 8 et 25.[1])

14. *Numerorum multiplicatio* est unius numeri secundum quantitatem unitatum alterius aggregatio, aliusque numerus ex multiplicatione proveniet.

5 **15.** Numeri, qui communiter ab unitate sola metiuntur, *mutabemini* nuncupantur.

16. *Quadratus numerus* est, qui ex numero in se ipso multiplicato colligitur, vel qui sub duobus aequis numeris continetur.

17. *Cubus numerus* est, qui surgit ex multiplicatione numeri in hoc,
10 quod ex eodem in se ducto colligitur, vel ⟨qui⟩ sub tribus aequis numeris continetur.

18. *Superficialis numerus* est, qui ex cuiuslibet numeri in quemlibet numerum multiplicatione formatur, vel qui sub duobus numeris collocatur.

19. Si duorum numerorum alterius in alterum multiplicatio superficiem
15 fecerit, eos duos eiusdem superficiei duo *latera* continere necesse est.

20. *Almugesem* dicitur, qui ex multiplicatione numeri in eo, quod ex unius numeri in alterum multiplicatione provenit, aggregatur, ipsique tres numeri tria almugesem *latera* continebunt.[2])

21. *Conproportionales numeri* sunt, quorum primus ex secundo, tertius-
20 que ex quarto unam eandemque partem seu plures et easdem continebit.

22. Superficiales et almugesem numeri *consimiles* sunt, cum eorum latera proportionalia fuerint.

23. *Perfecti numeri* dicuntur, qui suis eius omnibus partibus aequiparantur.

25 Item quaedam huic operi valde necessaria demonstrarentur, quorum demonstrationes, quoniam ⟨ab⟩ Euclide manifeste ⟨datae⟩ reticemus.

1. Et primum quidem exponemus, quid significare velimus, cum dicimus: *multiplicatio lineae in se ipsam.* Hoc quidem sic intelligendum est, ut quadrilaterum rectiangulum, cuius omnia latera eidem lineae sunt
30 aequalia, super eandem lineam constituamus.

2. Item cum dicimus: *cuiuslibet lineae in quamlibet aliam lineam multiplicatio,* hoc significare volumus, ut quadrilaterum longum, | cuius omnes

.i. in solidum

16 Almugesem *A*. — 17 ipsique *B*, ipsi quoque *A*. — 23 dicuntur *A*, sunt *B*. — 25 demonstrentur *B*. — 26 quoniam Euclide manifeste dereticemus. — 29 eidem] eiusdem.

1) Die Erklärung 13 scheint von dem Übersetzer eingeschoben zu sein. Sie wird ja in No. 15 wiederholt. Auch die Erwähnung des Boetius spricht gleichfalls dafür. *Mutabemini* sind also relative Primzahlen.

2) *Almugesem numeri* sind Körperzahlen mit drei verschiedenen Faktoren.

Arithmetik an sich zusammengesetzt, gegeneinander aber prim und unzusammengesetzt nennt, wie 8 und 25.[1])

14. *Multiplikation der Zahlen* ist die Addition der einen Zahl nach der Anzahl der Einheiten der andern, und aus der Multiplikation entsteht eine neue Zahl.

15. Zahlen, welche gleichzeitig nur von der Einheit gemessen werden, heissen *theilerfremd.*

16. Eine *Quadratzahl* ist diejenige, welche aus der Multiplikation einer Zahl mit sich selbst entsteht, oder die zwischen zwei gleichen Zahlen enthalten ist.

17. *Kubikzahl* ist eine solche, welche aus der Multiplikation einer Zahl mit dem entsteht, was aus derselben Zahl in sich selbst geführt herauskommt, oder welche zwischen drei gleichen Zahlen enthalten ist.

18. *Oberflächenzahl* heisst diejenige, welche aus der Multiplikation von irgend einer Zahl mit einer andern beliebigen Zahl gebildet wird, oder die zwischen zwei Zahlen enthalten ist.

19. Wenn durch Multiplikation zweier Zahlen mit einander eine Oberflächenzahl entsteht, so müssen die beiden Zahlen die *Seiten* der Oberflächenzahl sein.

20. *Almugesem (Körperzahl)*[2]) wird genannt, die aus der Multiplikation einer Zahl mit dem entsteht, was aus der Multiplikation einer Zahl mit einer andern hervorgeht, und diese drei Zahlen sind die *Seiten* der Körperzahl.

21. *Proportionierte Zahlen* sind solche, deren erste von der zweiten und die dritte von der vierten ein und denselben Theil oder mehrere gleiche Theile enthält.

22. Oberflächen- und Körperzahlen sind *ähnlich,* wenn ihre Seiten proportioniert sind.

23. *Vollkommene Zahlen* heissen solche, die allen ihren Theilen zusammengenommen gleich sind.

Nun werden wir einige Sätze, welche für dieses Werk sehr nöthig sind, anführen, deren Beweise wir aber, da sie von Euklides handgreiflich gegeben sind, verschweigen werden.

1. Zunächst wollen wir auseinandersetzen, was wir damit bezeichnen wollen, wenn wir sagen: *Multiplikation einer Geraden mit sich selbst.* Das ist so zu verstehen, dass wir ein rechtwinkliges Viereck, dessen sämmtliche Seiten jener Linie gleich sind, über dieser Linie konstruieren.

2. Ebenso wollen wir mit dem Ausdrucke: *Produkt irgend einer Linie mit irgend einer andern,* bezeichnen, dass wir ein Rechteck konstruieren,

anguli sunt recti, duoque latera aequidistantia uni illarum linearum, aliaque duo latera aequidistantia alteri linearum sicut aequalia constituamus.[1])

His autem ostensis dicendum est, quod:

3. *Si recta linea in duo ubilibet abscissa fuerit, qui totius in se ipsum multiplicatione quadratus describitur, his, qui ab utriusque portionibus multiplicatione in se ipsis describuntur quadratis et duplo rectianguli, qui sub utraque portione continetur, aequatur.*

Cuius similitudinem, ut levius appareat, in numeris ostendamus. Sit itaque linea 12 ulnarum in 7 et 5 divisa. Erit igitur lineae in se ipsam multiplicatio 144. Qui numerus multiplicationi 7 in se ipsum, quod est 49, et multiplicationi 5 in se ipsum, quod est 25, nec non et duplo multiplicationis 7 in 5, quod est 70, aequatur.[2])

4. *Item si linea recta in duo aequalia et totidem inaequalia dividetur, quae a totius lineae inaequalium portionum multiplicatione ad invicem rectiangula superficies efficitur, cum quadrato a linea, quae est inter utrasque sectiones, descripto, quadrato, qui a multiplicatione totius lineae dimidii in se ipsum formatur, aequabitur.*

Sit igitur exempli causa quaedam linea 12 ulnarum in duo aequalia, quae sunt 6 et 6, et duo inaequalia, quae sunt 8 et 4, divisa; eritque multiplicatio 8 in 4, quae sunt partes inaequales, 32, multiplicatioque binarii, qui inter utrasque sectiones continetur, in se ipsum 4, quod totum, cum in unum redactum fuerit, numero 36, qui est medietatis totius lineae multiplicatio in se ipsam, aequatur.[3])

5. *Si recta item linea in duo aequa secetur, cui alia in directum linea recta adiungatur, rectiangula superficies, quae sub totius cum adiuncta in adiunctam multiplicatione continetur, cum quadrato, qui a lineae dimidio describitur, quadrato a dimidio et ab adiuncta constanti aequatur.*

Sit quidem linea 10 ulnarum in duo aequalia, quae sunt 5 et 5, divisa, eique duo superadiungantur, et 12 efficiunt. Erit igitur multiplicatio 12 in duo cum multiplicatione 5 in se ipsum, ⟨quod est primae lineae medietas, quadrato 7⟩, quod est primae lineae medietas cum additamento, ⟨aequalis⟩.[4])

---

1 sint *B*. — 4 abscisa *und so immer*. — 5 hiis *und so immer*. — qui] quod. — 5—6 proportionis multiplicationibus. — 6 ipsum(!) *A*. — 16 septiones *und so immer*. — 21 qui] quod *B*. — 23 eum in se *A*. — 24 secentur. — 30—31 quod ... quadrato 7 *in A auf dem Rande ausradiert*. — 32 aequalis *in A über der Zeile ausradiert*.

dessen eines Paar paralleler Seiten einer der beiden Linien, das andere Paar paralleler Seiten der andern Linie gleich ist.[1])

Nachdem dies gezeigt ist, sagen wir weiter:

3. *Wenn eine gerade Linie irgendwo in zwei Theile getheilt wird, so ist das Quadrat, das durch Multiplikation der ganzen Linie mit sich selbst beschrieben wird, gleich denjenigen Quadraten, die durch Multiplikation beider Theile mit sich selbst beschrieben werden, plus dem doppelten Rechteck, das von den beiden Theilen gebildet wird.*

Damit das besser einleuchte, zeigen wir ein Beispiel in Zahlen. Es sei also eine Linie von 12 Ellen in 5 und 7 getheilt. Nun ist das Quadrat der Linie 144, und diese Zahl ist gleich dem Quadrate von 7, das ist 49, plus dem Quadrate von 5, das ist 25, und plus dem doppelten Produkte von 7 und 5, das 70 beträgt.[2])

4. *Ferner, wenn eine gerade Linie in zwei gleiche und ebensoviele ungleiche Theile getheilt wird, so ist das Rechteck, das aus der Multiplikation der ungleichen Theile der ganzen Linie mit einander gebildet wird, plus dem Quadrate der Linie, welche zwischen den beiden Theilpunkten liegt, dem Quadrate gleich, das durch Multiplikation der Hälfte der ganzen Linie mit sich selbst gebildet wird.*

Es sei also z. B. eine Linie von 12 Ellen in zwei gleiche Theile, das ist 6 und 6, und zwei ungleiche, die 8 und 4 sein mögen, getheilt. Dann ist das Produkt von 8 und 4, das sind die beiden ungleichen Theile, 32, das Produkt von 2, die zwischen beiden Theilpunkten enthalten ist, mit sich selbst gleich 4, und das ist, wenn es zusammengezählt wird, der Zahl 36 gleich, welche das Produkt der Hälfte der ganzen Linie mit sich selbst darstellt.[3])

5. *Ebenso, wenn eine Linie in zwei gleiche Theile getheilt, und sie um eine andere gerade Linie direkt verlängert wird, so ist das Rechteck, das aus der ganzen Linie plus der Verlängerung und der Verlängerung entsteht, plus dem Quadrate der halben Linie, dem Quadrate gleich, das über der Hälfte plus der Verlängerung entsteht.*

Es sei nämlich eine Linie von 10 Ellen in zwei gleiche Theile, das ist 5 und 5, getheilt, und sie sei um 2 verlängert, so dass 12 entstehen. Dann ist das Produkt von 12 in 2 und das Produkt von 5 mit sich selbst, das ist der Hälfte der ersten Linie, dem Quadrate von 7 gleich, welches die Hälfte der ersten Linie plus der Verlängerung darstellt.[4])

---

1) Aus diesen beiden Nummern und später noch zu nennenden hat Leonardo seine *Distinctio prima de multiplicatione camporum* gemacht und weitläufig durch Beispiele auseinandergelegt. 2) Leonardo 14, 29. 3) Leonardo 15, 21.

4) Leonardo 15, 5 v. u.

6. *Item si recta linea in duo ubilibet abscindatur, quadratus, qui a totius in se ipsam multiplicatione colligitur, cum quadrato ab alterius portionis multiplicatione constituto aequus est duplo rectianguli, qui sub totius in praedictam portionem multiplicatione continetur, et eo quadrato, qui a reliquae portionis in se ipsam multiplicatione colligitur.*

Sit verbi gratia linea 12 ulnarum in 5 et 7 divisa, eritque multiplicatio 12 in se ipsum 144, multiplicatioque 5 in se ipsum 25, quod totum collectum 169 procreat. Hic autem numerus duplo multiplicationis 12 in 5 et multiplicationi 7 in se ipsum aequatur.[1])

7. *Item si recta linea in duo aequalia et totidem inaequalia secetur, qui a totius lineae inaequalium portionum multiplicatione in se ipsas | duo procreantur quadrati, duplo duorum quadratorum, qui sub dimidia et ea, quae est inter utrasque sectiones continetur, aequales fore perhibentur.* 3

Ut in linea 12 ulnarum per aequalia in 6 et 6 divisa et per inaequalia in 5 et 7 abscissa multiplicatio 7 in se ipsum et 5 in se ipsum 74 efficient. Duplum autem multiplicationis 6, quod est totius medietas, in se ipsum 72, et duplum multiplicationis unius, quod inter utrasque sectiones continetur, duo; duobus vero 72 superadditis 74 procreabuntur.[2])

8. *Si recta linea in duo aequa divisa fuerit, cui quaedam recta linea in directum adiciatur, qui a tota cum adiuncta quadratus describitur, et qui sub illa, quae superadiuncta est, quadratus efficitur, utrique simul assumpti, ei quadrato, qui a dimidia describitur, et ei quadrato, qui efficitur ab ea, quae ex dimidia et adiuncta consistit, utrisque simul acceptis, dupli fore pronunciantur.*

Ut exempli causa, si lineae 10 ulnarum in duo aequalia, quae sunt 5 et 5, divisae 2 superaddantur, 12 procreabuntur, eritque multiplicatio 12 in se ipsum, quod est longitudo lineae cum additamento, et multiplicatio binarii in se ipsum, quod est superadiunctum, in unum coadunatae duplo multiplicationis 5 in se ipsum, quod est dimidium primae lineae, et duplo multiplicationis 7 in se ipsum, quod ex dimidio et adiuncto colligitur, aequalis.[3])

9. *Item si duae rectae lineae se invicem intra circulum intersecant, rectiangula superficies, quae sub duabus earum partibus continetur, aequa est superficiei rectiangulae, quae sub duabus alterius lineae partibus collocatur.* Et haec est figura (Fig. 1).[4])

---

1 qui ab. — 10—11 qui a] qz. — 13 aequales] et quae. — 15 74 *B*, 75 *A*. — 16 *Nach* 72 *wiederholt A nochmals:* et duplum ... ipsum 72. — 20 qui a] qz. — qui] quod. — 22. ei] et.

---

1) Leonardo 16, 18. 2) Leonardo 15, 1. 3) Leonardo 16, 3 v. u. 4) Leonardo 18, 16 v. u.

6. *Wenn ebenso eine gerade Linie beliebig in zwei Theile getheilt wird, so ist das Quadrat der ganzen Linie plus dem Quadrate des einen Theiles dem doppelten Rechtecke gleich, welches das Produkt der ganzen Linie in den besagten Theil darstellt, plus dem Quadrate des andern Theiles.*

Es sei z. B. eine Gerade von 12 Ellen in 5 und 7 getheilt, dann wird das Quadrat von 12 gleich 144, und das Quadrat von 5 gleich 25. Beides zusammen ergiebt 169. Diese Zahl ist aber gleich dem doppelten Produkte von 12 in 5 plus dem Quadrate von 7.[1])

7. *Desgleichen, wenn eine gerade Linie in zwei gleiche und ebenso viele ungleiche Theile getheilt wird, so ist die Summe der beiden durch Multiplikation der beiden ungleichen Theile mit sich selbst entstehenden Quadrate gleich dem Doppelten der beiden Quadrate, welche über der Hälfte der Linie und dem zwischen den beiden Theilpunkten liegenden Stücke beschrieben werden.*

So betragen z. B. in einer Geraden von 12 Ellen, die in gleiche Theile, das ist 6 und 6, und in ungleiche Theile, nämlich in 5 und 7, geschnitten ist, die Quadrate von 5 und 7 zusammen 74. Das doppelte Quadrat von 6 aber, das ist von der Hälfte der ganzen Linie, ist 72, und das doppelte Quadrat von 1, das ist, was zwischen den beiden Theilpunkten liegt, ist 2. 2 aber zu 72 hinzugezählt giebt 74.[2])

8. *Wenn eine gerade Linie in zwei gleiche Theile getheilt ist, und sie um eine andere gerade Linie direkt verlängert wird, so ist das Quadrat über der ganzen Linie plus der Verlängerung zusammen mit dem Quadrate der Verlängerung doppelt so gross als das Quadrat, das über der Hälfte beschrieben ist, plus dem Quadrate über der Hälfte und der Verlängerung.*

So entsteht z. B., wenn eine Linie von 10 Ellen in zwei gleiche Stücke getheilt wird, das ist in 5 und 5, und dann um 2 verlängert, 12, und es ist das Quadrat von 12, das ist das der Linie plus der Verlängerung, zusammen mit dem Quadrate von 2, das ist dem der Verlängerung, gleich dem Doppelten des Quadrates von 5, das ist der Hälfte der ersten Linie, plus dem Doppelten des Quadrates von 7, welche aus der Hälfte und der Verlängerung zusammen besteht.[3])

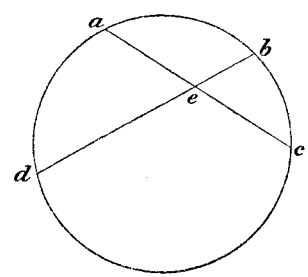


Fig. 1.

9. *Ebenso, wenn zwei gerade Linien sich innerhalb eines Kreises schneiden, so ist das Rechteck aus den Theilen der einen Linie gleich dem Rechteck aus den Theilen der andern Linie.*[4]) Und das ist die zugehörige Figur (Fig. 1).

Similiter et alia quaedam, quarum demonstrationes in geometria perfecte monstrantur, scire non est inutile.

1. *Si duas igitur rectas lineas ⟨aequales et⟩ aequidistantes aliae duae rectae lineae ad easdem partes ab earum terminis protractae coniunxerint, eas aequidistantes et aequales esse necesse est.*[1])

2. *Item trianguli consimiles sunt, quorum anguli sunt invicem aequales, et quorum proportio duorum laterum angulo unius trianguli adiacentium fuerit ut proportio duorum laterum angulo alterius trianguli praedicto aequali adiacentium.*

Ut in his triangulis abc, def (Fig. 2), quorum sunt aequales ad invicem, sicut angulus a trianguli abc a lateribus ac, ab contentus aequus est angulo d trianguli def contento a lateribus de, df; et similiter angulus b angulo f, et angulus c angulo e est aequalis. Hos ergo similes triangulos esse dicimus, proportioque lateris ba unius trianguli ad latus fd alterius trianguli ut proportio lateris ac eiusdem trianguli ad latus ed alterius. Simili quoque modo erit et proportio aliorum laterum aequis angulis adiacentium. ⟨Proportioque lateris ba unius trianguli ad latus ac est ut proportio fd alterius trianguli ad latus de. Item proportio lateris ab unius trianguli ad latus fd alterius trianguli est ut proportio lateris bc eiusdem trianguli ad latus fe alterius.⟩

Horum autem consimilium triangulorum et quadrilaterorum ⟨et⟩ figurarum | multiangularum sunt eaedem demonstrationes.

3. *Omnes item trianguli, qui super eadem base ad easdem partes et in eisdem alternis lineis conformantur, sunt aequales ad invicem.*

4. *Si autem in aequis basibus ad easdem partes et in eisdem alterius lineis collocantur, similiter erunt ad invicem aequales.*

5. *Item omnes parallelogrammae superficies super eandem basem in eadem parte et inter easdem lineas aequidistantes constitutae sibi invicem sunt aequales.*

6. *Si autem in aequis basibus in eadem parte et in eisdem subalternis lineis discriptae fuerint, eas similiter ad invicem aequales esse necesse est.*

7. *Si trianguli parallelogrammaeque superficies eiusdem altitudinis exstiterint, erunt eorum sibi consimilium ad invicem proportio sicut basis unius ad basem alterius.*[2])

---

3 aequales et *fehlt.* — 17—20 Proportioque . . . alterius *in A auf dem Rande ausradiert.* — 21 et *in A über der Zeile ausradiert.* — 22 heaedem *A.* — 25 autem] aut. — 26 colocantur. — 27 parallelogramae *und so immer.* — 30 in aequis] in eis quamvis *A*, in eis q̄vis *B*.

---

1) Leonardo 2, 26. 2) Die No. 3—7 bei Leonardo 2, 15 v. u.

Es ist ferner nicht ohne Nutzen, auch noch einige andere Sätze zu kennen, deren Beweise in der Geometrie (EUKLID's) vollständig gezeigt werden.

1. *Wenn zwei gleiche und parallele Gerade durch zwei andere gerade Linien, die von ihren Endpunkten aus nach derselben Seite hin gezogen sind, verbunden werden, so müssen diese ebenfalls gleich und parallel sein.*[1])

2. Ferner: *Dreiecke sind ähnlich, deren Winkel einander gleich sind, und bei denen das Verhältnis zweier Seiten, die dem einen Winkel des ersten Dreiecks anliegen, gleich dem Verhältnis der beiden Seiten ist, welche dem gleichen Winkel im andern Dreiecke anliegen.*

Wie in den beiden Dreiecken *abc*, *def* (Fig. 2), bei welchen einander gleich sind: der Winkel *a* des Dreiecks *abc*, der von den Seiten *ac*, *ab* eingeschlossen wird, gleich dem Winkel *d* des Dreiecks *def*, eingeschlossen von den Seiten *de*, *df*; ebenso Winkel *b* dem Winkel *f*, und Winkel *c* dem Winkel *e* gleich. Diese Dreiecke also nennen wir ähnlich, und das Verhältnis der Seite *ba* des einen Dreiecks zu der Seite *fd* des andern ist gleich dem Verhältnis der Seite *ac* des ersten Dreiecks zu der Seite *ed* des andern. In ähnlicher Weise wird auch das Verhältnis der andern Seiten gleich, welche gleichen Winkeln anliegen. Es ist auch das Verhältnis der Seite *ba* des einen Dreiecks zu der Seite *ac* gleich dem Verhältnis von *fd* des andern Dreiecks zur Seite *ed*. Ebenso verhält sich die Seite *ab* des einen Dreiecks zur Seite *fd* des andern wie die Seite *bc* des ersten Dreiecks zur Seite *fe* des andern.

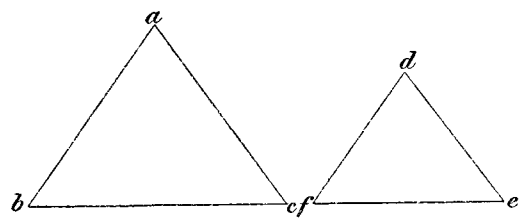


Fig. 2.

Für Vierecke aber und vieleckige Figuren gelten dieselben Beweise wie für diese Dreiecke.

3. Ferner: *Alle Dreiecke, welche über derselben Grundlinie auf derselben Seite und zwischen denselben parallelen Linien konstruiert werden, sind einander gleich.*

4. *Sie werden aber auch gleich sein, wenn sie über gleichen Grundlinien nach derselben Seite und zwischen denselben Parallelen liegen.*

5. *Ebenso sind alle Parallelogramme einander gleich, welche über derselben Grundlinie nach derselben Seite und zwischen denselben Parallelen gelegen sind.*

6. *Sie sind aber auch nothwendigerweise gleich, wenn sie auf gleichen Grundlinien nach derselben Seite hin und zwischen Parallelen konstruiert sind.*

7. *Wenn Dreiecke und Parallelogramme von gleicher Höhe einander ähnlich sind, so verhalten sie sich gegeneinander wie ihre Grundlinien.*[2])

Capitulum secundum de agrorum dimensionibus.

1. Cum in hoc opere de ulna in linea mentionem facimus, ulnam in longitudine tantum absque latitudine, lector, intelligas.

2. Cumque ulna in superficie vel ulna superficialis dicetur, quadratam ulnam, quatuor scilicet laterum in longum et latum fore non dubites, cuius unumquodque latus unam ulnam in longitudine continet, ⟨et⟩ omnes ipsius anguli recti.

Per hanc autem quadraturam semper fit consideratio huius rei, ⟨etenim⟩ est ille unus, cum quo superficies mensurabitur.

3. Cumque dicetur: hic triangulus aut hoc quadrilaterum 5 vel 6 ulnas continet, hunc praedictum quadratum illius superficiei certam mensuram fore cognoscas, cum ad quadratos aequales, quorum singuli ulnam super ulnam et angulos rectos contineant, reducetur. Rectas autem angulos eos habere necessarium est, eo quod quadrilaterum rectiangulum omni quadrilatero, cuius latera ipsius lateribus aequantur, anguli autem inaequales fuerint, maius existit. Quadrilaterum ergo rectiangulum dimensionibus palmi vel ulnae vicem obtinet, ideoque terrarum dimensiones quadraturas nuncupamus, et nos in hoc capitulo, qualiter campi quadrentur, deo opitulante, monstrabimus.

4. Verum tamen quia multimodae sunt terrarum figurae, quaedam enim triangulatae, quaedam vero quadrilaterae, quaedam autem aliarum multarum figurarum existunt, hoc capitulum in quinque partes dividimus, quarum prima est in metiendo ea quadrilatera, quorum omnia latera sunt aequalia, nec non et illa, quorum omnes anguli sunt recti. Secunda vero triangulorum genera metitur. Tertia quidem qualiter quadrilatera, quorum latera omnia non sunt aequalia, et quorum omnes anguli ⟨non⟩ sunt recti, mensurentur, docet. Quarta circulares ac semicirculares campos, et quorum figurae sunt plus minusve semicirculo, perfecte mensurat. Quinta angulorum plus quam quatuor latera continentium certas indicat mensuras.

Pars prima in illorum quadrilaterorum dimensione, quorum omnia latera sibi invicem sunt aequalia, | nec non et illorum, quorum omnes anguli 4 *sunt recti.*

1. In hoc nempe particula trium quadrilaterarum figurarum dimensiones, prout possumus, explicabimus. Ex quibus sunt *quadrati,* qui sunt aequilateri et aequianguli; sunt et *rhumbi,* qui quidem sunt aequilateri,

---

1 *In A ausradiert.* — 6 et *fehlt.* — 8 etenim *in A über der Zeile ausradiert.* — 26 non *fehlt.* — 27 et docet. — 33 trium *fehlt in B.*

Zweites Kapitel. Über Ausmessung der Felder.

1. Wenn wir in diesem Werke von einer Elle als Linie reden, so möge der Leser darunter nur die Länge einer Elle ohne Breite verstehen.

2. Wenn wir aber von einer Elle als Fläche oder einer Flächenelle sprechen, so verstehen wir darunter eine Quadratelle von vier Seiten in der Länge und Breite, so dass jede Seite die Länge einer Elle besitzt, und alle Winkel derselben rechte sind. Durch die Bildung solcher Quadrate geschehen alle Betrachtungen dieser Art, denn es ist jene Einheit, mit welcher Flächen gemessen werden.

3. Und wenn gesagt wird: Dieses Dreieck oder dieses Viereck enthält 5 oder 6 Ellen, so merke man, dass das oben erklärte Quadrat ein gewisses Maass dieser Fläche ist, wenn dieselben in gleichgrosse Quadrate, deren jedes eine Elle mal einer Elle und rechte Winkel enthält, verwandelt wird. Es muss aber rechte Winkel besitzen, da jedes rechtwinklige Viereck grösser ist als jedes andere Viereck, dessen Seiten den Seiten des Rechtecks gleich, die Winkel aber ungleich sind. Das Quadrat vertritt also mit seinen Dimensionen die Stelle einer Palme oder einer Elle, und deshalb werden die Inhaltsbestimmungen von Landstücken Quadraturen genannt, und wir wollen in diesem Kapitel mit Gottes Hilfe zeigen, wie Felder quadriert werden.

4. Da aber die Gestalten der Landstücke vielartig sind, einige sind nämlich dreieckig, andere viereckig, andere wieder haben mancherlei andere Gestalten, so haben wir dieses Kapitel in fünf Theile getheilt. Der erste lehrt die Ausmessung derjenigen Vierecke, welche lauter gleiche Seiten haben, und derjenigen, deren sämmtliche Winkel rechte sind. Der zweite dagegen misst die Arten der Dreiecke. Im dritten wird gelehrt, wie Vierecke, deren Seiten nicht sämmtlich gleich und deren Winkel nicht alle rechte sind, ausgemessen werden. Der vierte misst vollständig die kreisförmigen und halbkreisförmigen Felder und diejenigen, deren Gestalten mehr oder weniger sind als ein Halbkreis. Der fünfte lehrt die Ausmessung der mehr als vier Seiten enthaltenden Vielecke.

Erster Theil: Die Ausmessung derjenigen Vierecke, deren Seiten sämmtlich gleich sind, sowie derjenigen, bei denen alle Winkel rechte sind.

1. In diesem Theile werden wir also die Ausmessung der vierseitigen Figuren, soweit wir vermögen, auseinandersetzen. Zu ihnen gehören *die Quadrate,* die gleichseitig und gleichwinklig sind; es gehören zu ihnen ferner *die Rhomben,* die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig sind; zu

sed non rectianguli; ex eisdem et sunt *figurae parte altera longiores*, quas rectiangulas, sed non aequilateras esse dicimus.

2. Primum igitur ipsius *quadrati* dimensiones ostendimus, quem aequilaterum et aequiangulum fore proponimus, quem etiam certam communem superficierum quarumlibet figurarum mensuram esse praediximus. Harum autem dimensionum modus est, ut prius cuiusque ipsorum laterum lineares mensuras invenias, inventasque in sui ipsius summam multiplices, indeque collectum embadum eiusdem quadrati fore non ambigas.

Ad cuius similitudinem si quadratus aequiangulus, cuius singula latera duas lineares ulnas contineant, describatur, eius embadum quatuor quadratas ulnas maiori quadrato consimiles continebit, eo quod, si binarium per binarium duxeris, quatuor efficies.

Et ut liquidius hoc ad oculum deprehendas, esto quadratus *abcd* (Fig. 3), cuius unumquodque latus in duo aequa dividatur, ut latus *ab* supra punctum *e*, latus vero *bc* supra punctum *f*, latus autem *cd* supra punctum *g*, latus quoque *da* supra punctum *h* secetur. Post hoc a puncto *e* ad punctum *g* lineam *eg*, a puncto vero *f* usque ad *h* lineam *fh* producemus. Dicimus igitur, hunc qua⟨dratum⟩ in quatuor aequa fore divisum, in quorum unoquoque ulna super ulnam continetur, omnesque maiori quadrato *abcd* adsimiliantur, et in unum collecti aequantur, at ipsi sunt totius quadrati totum embadum. Horum quidem unumquemque maiori adsimiliari diximus, ⟨quia⟩ eorundem singulorum latera lateribus maioris sunt comproportionalia: est enim eorum unumquodque latus lateris quadrati *abcd* medietas, et eorum omnes anguli illius angulis aequantur, sunt enim utrique omnes anguli recti invicem aequales. Et quia ⟨pro⟩portio istorum quadratorum ad invicem est eadem, ipsi invicem sunt aequales, totique in unum collecti primum quadratum complent, et singuli unam ulnam in longitudine et alteram in latitudine suscipiunt. Hac igitur demonstratione quadratorum embada reperiuntur.[1])

Ex hoc etiam manifestum est, quod in omni quadrato rectiangulo, in cuius laterum longitudine duas ulnas invenies, quatuor incunctanter ulnae continebuntur. Igitur in cuiuscunque longitudine 10 lineales ulnae fuerint, in eius embado 100 superficiales ulnae reperientur.

3. At si parte altera longior fuerit, et eius embadum scire volueris,

---

3 quadrati] quadrilateri. — quem] qui *B*. — 8 embadus. — 11 eoqȝ *A*. — 14 unum quidem latus. — 18 quadratum] qua. — 20 adsimulantur. — 22 quia *fehlt*. — 25 anguli] at. — portio. — 29 quadratorum] figurarum.

---

1) Leonardo 5, 19 unter Benutzung der gleichen Figur mit gleicher Buchstabenbezeichnung. Es gehört dies bei ihm zu seiner *Distinctio prima*. s. o. S. 21.

ihnen gehören auch *die Rechtecke,* die wir wohl rechtwinklig aber nicht gleichseitig nennen.

2. Wir werden daher zuerst des *Quadrates* Ausmessung zeigen, das wir als gleichseitig und gleichwinklig annehmen, und von dem wir vorher sagten, es sei das sichere Maass aller beliebig gestalteten Figuren. Die Art der Ausmessung ist nun, dass man zunächst das Maass der Länge jeder Seite desselben bestimmt, und das Resultat mit seiner eigenen Länge vervielfacht. Das Ergebnis ist dann sicher der Flächeninhalt dieses Vierecks.

Als ein Beispiel sei ein gleichwinkliges Quadrat, dessen einzelne Seiten je zwei Längenellen enthalten, beschrieben, dann wird sein Flächeninhalt gleich vier Quadratellen sein, die dem grösseren Quadrate ähnlich sind, weil wenn man zwei mal zwei multipliciert, vier hervorgehen.

Damit nun dieses leichter und augenfälliger begriffen werde, sei das Quadrat *abcd* gegeben (Fig. 3), von dem jede Seite in je zwei gleiche Theile getheilt werde. So sei die Seite *ab* im Punkte *e*, die Seite *bc* aber im Punkte *f*, die Seite *cd* im Punkte *g*, die Seite *da* endlich im Punkte *h* getheilt. Wir ziehen darauf vom Punkte *e* nach dem Punkte *g* die Gerade *eg*, vom Punkte *f* aber nach dem Punkte *h* die Linie *fh*, dann behaupten wir, dass das Quadrat in vier gleiche Theile zerlegt ist, in deren jedem eine Elle mal einer Elle enthalten ist, und dass jedes dem grössern Quadrate ähnlich ist. Zusammengefasst aber sind sie ihm gleich, und sind also des ganzen Quadrates Flächeninhalt. Wir sagen aber, es sei ein jedes dem grossen Quadrate ähnlich, weil die einzelnen Seiten derselben den Seiten des grössern proportioniert sind: es ist ja jede ihrer Seiten die Hälfte einer Seite des Quadrates *abcd*, und alle Winkel des einen sind gleich denen des andern, denn beiderseits sind alle Winkel rechte, und daher einander gleich. Und da das Verhältnis dieser Quadrate ein und dasselbe ist, so sind sie unter einander gleich, und alle zusammengefasst machen das erste Quadrat aus, jedes einzelne aber hat eine Elle in der Länge und eine Elle in der Breite. Mit solchen Schlüssen werden also die Flächeninhalte der Quadrate gefunden.[1])

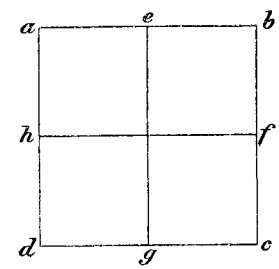


Fig. 3.

Hieraus ist auch ferner klar, dass in jedem rechtwinkligen Quadrate, in dessen Seitenlänge zwei Ellen gefunden werden, vier Quadratellen enthalten sind. Wenn also in jeder Seitenlänge 10 Ellen enthalten sind, so werden im Flächeninhalte desselben 100 Quadratellen gefunden werden.

3. Wenn aber das Viereck ein Rechteck ist, und man den Flächen-

quodlibet eorum laterum in latus sibi contiguum ⟨multiplicans embadum invenies.

Ut in hac parte altera longiori, cuius unum latus 9 ulnas, aliud vero ei contiguum⟩ 5 ulnas continet. Huius igitur embadum si nosse desideras, 9 in 5 multiplica, et 45 ulnas in eius embado procul dubio reperies (Fig. 4).

4. Et hoc est modus numerandi qua|drilatera ⟨aequilatera⟩ et non 4′
aequilatera, quorum anguli sunt recti. Verum quia multotiens anguli, cum recti non sint, recti videntur, quandam regulam, qua omnia quadrilatera ⟨aequilatera⟩, quorum omnes anguli aequales vel inaequales fuerint, veraciter numerare valeas, indicabo.

In omni igitur ⟨figura⟩ quadrilatera aequilatera, si duo protrahuntur diametra, sese invicem in duo aequa secundum rectum angulum secabunt. Quare si unius diametri ⟨dimidium⟩ in totam alterius diametri summam duxeris, eius aream nimirum invenies.

5. Ob hoc itaque, qui subtiliter agrorum dimensiones observabant, cum eorum omnia latera sibi invicem aequalia fore cognoscebant, ipsorum diametrorum certas quantitates adinvenientes, quorum diametra sibi invicem aequalia reperierunt, ipsorum embada per laterum quantitates adinveniebant. Quorum ⟨autem⟩ diametra inaequalia iudicabant, velut in rhumbis, eorum unius diametri dimidium in totam alterius quantitatem multiplicantes ipsius areas veraciter inveniebant.

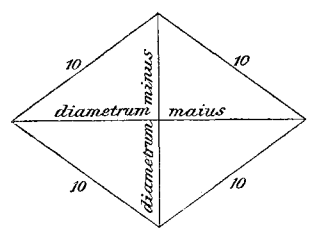


Fig. 5.

Ut si ponamus in quadrilatero, cuius omnia latera 10 ulnarum exstiterint (Fig. 5), angulos autem nequaquam ⟨aequales⟩ habuerit, et hic est rhumbus, cuius diametra sunt inaequaelia, unius eorum longitudinem 12, alterius vero 16 ulnarum ⟨invenies⟩. Cum ergo medietatem unius in summam alterius multiplicaveris, 96, quod est totum embadum, procreabis, ut in hac subscripta figura si 8 in 12 vel 6 in 16 duxeris, inde collectum totius aream efficiet.[1])

6. Ast si demonstrationibus scire volueris istius quadrilateri aream 96 ulnas continere, hanc eandem figuram depingens iterum eam *abcd* lit-

---

1—4 multiplicans ... contiguum *auf dem Rande von A ausradiert.* — 7 aequilatera *über der Zeile in A ausradiert.* — 8 multotiens] multiplicationes. — 9 quandam] q̄n̄. — 10 aequilatera *fehlt.* — 12 figura *fehlt.* — 14 dimidium *fehlt.* — 15 eius eius *A.* — 20 autem *in A über der Zeile ausradiert.* — velut *fehlt in B.* — 26 aequales *fehlt.* — 26—27 hic est *B*, ibi est *A.* — 29 invenies *fehlt.* — ergo *A*, itaque *B.* — medietas. — 34 66 ulnas *A.* — depinges.

inhalt wissen will, so findet man durch Multiplikation einer beliebigen Seite mit der ihr anliegenden den Flächeninhalt.

In dem Rechtecke z. B., dessen eine Seite 9 Ellen, die andere anliegende aber 5 Ellen misst. Wenn man also von diesem den Inhalt kennen will, so multipliciert man 9 mit 5, und findet ohne Zweifel 45 Quadratellen im Flächeninhalte (Fig. 4).

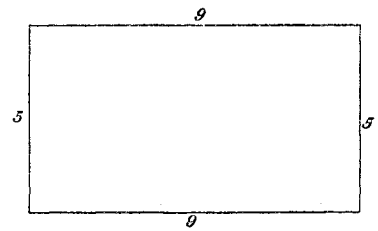


Fig. 4.

4. Das ist also die Art und Weise gleichseitige und ungleichseitige Vierecke auszumessen, deren Winkel rechte sind. Da aber vielfach Winkel, obwohl sie keine rechten sind, doch rechte zu sein scheinen, so wollen wir eine Regel angeben, mittelst deren man alle gleichseitigen Vierecke, mögen die Winkel gleich oder ungleich sein, genau ausmessen kann.

Wenn man nämlich in einem beliebigen gleichseitigen Viereck beide Diagonalen zieht, so schneiden sie sich gegenseitig in je zwei gleiche Theile und treffen sich unter rechten Winkeln. Wenn man also die Hälfte der einen Diagonale mit der Länge der andern Diagonale vervielfacht, so findet man natürlich seinen Flächeninhalt.

5. Wenn daher diejenigen, welche die Ausmessung der Äcker säuberlich besorgen, alle Seiten derselben einander gleich erkannten, so suchten sie die genauen Längen der Diagonalen. Fanden sie dann, dass die Diagonalen einander gleich waren, so suchten sie den Flächeninhalt durch die Länge der Seiten. Wurden aber die Diagonalen ungleich geschätzt, wie in den Rhomben, so vervielfachten sie die Hälfte der einen Diagonale mit der ganzen Länge der andern, und fanden so genau den Flächeninhalt derselben.

Nehmen wir z. B. ein Viereck, dessen sämmtliche Seiten je 10 Ellen enthalten (Fig. 5), die Winkel aber keineswegs rechte sind, dann ist das also ein Rhombus, dessen Diagonalen ungleich sind, und man finde die Länge der einen zu 12, die der andern zu 16 Ellen. Wenn wir dann also die Hälfte der einen mit der ganzen Länge der andern vervielfachen, so entsteht 96, das ist der ganze Flächeninhalt. Wenn man daher in der nebenstehenden Figur 8 mit 12 oder 6 mit 16 multipliciert, so ist das Produkt der Inhalt des ganzen Vierecks.[1])

6. Will man aber den Beweis führen, dass der Inhalt dieses Vierecks 96 Quadratellen enthält, so zeichne man nochmals dieselbe Figur (Fig. 6) und bezeichne sie mit den Buchstaben *abcd*, dann sind *ac*, *bd* ihre beiden

1) Leonardo 73, 9 v. u.

teris scribas (Fig. 6). Erunt *ac*, *bd* duo eiusdem diametra. Post hoc a puncto *b* cathetum ex utraque parte protrahatur, in cuius extremitatibus *e*, *f* litterae describantur, et a puncto *d* aliud cathetum ex utraque parte deductum et punctis *g*, *h* insignitum producemus; eritque linea *eb* lineae *bf* aequalis. Similiter linea *dg* lineae *dh* aequalis ponatur. Est igitur tota linea *ef* et linea *gh* diametro *ac* aequalis. Dehinc duas lineas *eg*, *fh* protrahamus, eritque quadrilaterum *efgh* parte altera longius, cuius unum latus 16, alterum vero 12 ulnas continebit. In cuius, ut supra diximus, embado 192 reperies: est haec multiplicatio 12 in 16. Manifestum est, quod rhumbus *abcd* primo descriptum est medietas istius maioris parte altera longioris in quatuor aequalia quadrilatera divisi, ut inscripta figura monstratur (Fig. 6), in qua rhumbus constat ex quatuor partibus ex quatuor quadrilateribus in duo partitis aequalia. Rhumbus igitur *abcd* istius altera parte longioris, in cuius embado 192 ulnas contineri praediximus, medietatem amplectitur. Quapropter rhumbus *abcd* 96 | ulnis impleri, 5 quod est multiplicatio *be* vel *bf* in *bd*, nulli dubium sit. Item si lineam *ef*, quae est latus minus parte altera longioris, in lineam *fc*, quae est medietas alterius lateris, multiplicaveris, idem prorsus efficies, ut in hac figura describitur.

7. Modis igitur investigandi quadratorum ac rhumborum nec non et parte altera longiorum embada manifeste monstratis, quomodo areas rhomboidum vel obliquarum figurarum et diversorum laterum inquiramus, docendum relinquitur, quorum notitiam indicare nequibimus, donec viam inveniendi triangulorum areas edoceamus. ⟨Sed⟩ priusquam triangulorum mensuras adgrediamur, quasdam quaestiones in praedictorum quadrilaterorum areis tibi proponemus, ut in earum inventione, deo auxiliante, subtilis et promptus investigator existas.

8. Primum igitur, *quanta sit illius tetragoni, in cuius longitudine latitudineque 10 ulnae continentur, diametri longitudo,* quaestio proponatur, cui talis fiat responsio: Huius tetragoni diametrum est radix 200. Si quis enim hoc diametrum ⟨in se ipsum⟩ duxerit, 200 procurabit. Nam in omni tetragono quadratus ab eiusdem diametro contentus eiusdem quadrati duplex

---

2 cathetus. *Des folgenden* aliud *halber muss auch hier das Neutrum stehen.* — 7 longior. — 13 in duo partibus. — 17 minoris. — 18 lateris et. — 21—22 rombydum *A*, rhomboidum *B*. — 22—23 docenda. — 24 Sed *fehlt in A*, et *B*. — 25 quasdam quasdam *A*. — 29 quaestio] quomodo. — 31 in se ipsum *in A über der Zeile ausradiert.* — 32 quadrato.

Diagonalen. Darauf errichte man vom Punkte *b* aus das Loth nach beiden Seiten und schreibe an die Endpunkte die Buchstaben *e*, *f*. Vom Punkte *d* aus ziehe man dann ebenfalls nach beiden Seiten ein zweites Loth und bezeichne die Endpunkte mit *g*, *h*: dann ist die Gerade *eb* der Geraden *bf* gleich, und in ähnlicher Weise werde die Linie *dg* der Linie *dh* gleich angenommen. Es ist also die ganze Gerade *ef* und die ganze Gerade *gh* der Diagonale *ac* gleich. Wir ziehen nun die beiden Geraden *eg*, *fh*, so wird das Viereck *efgh* ein Rechteck, dessen eine Seite 16, die andere aber 12 Ellen enthält. In dem Flächeninhalte findet man, wie wir oben gesagt haben, 192 Quadratellen, das ist nämlich das Produkt von 12 mal 16. Nun ist klar, dass der zuerst beschriebene Rhombus *abcd* die Hälfte des grösseren Rechtecks beträgt, das in vier gleiche Vierecke getheilt ist, wie die Figur zeigt (Fig. 6), in der der Rhombus aus vier Theilen der vier Vierecke besteht, von welchen jedes in zwei gleiche Stücke zerschnitten ist. Der Rhombus *abcd* umfasst also die Hälfte des Rechtecks, dessen Flächeninhalt wir vorher auf 192 Quadratellen feststellten, der Rhombus enthält also unzweifelhaft 96 Quadratellen, das ist aber das Produkt von *be* oder *bf* und *bd*. Würden wir in derselben Weise die Seite *ef*, das ist die kleinere Seite des Rechtecks, mit der Strecke *fc*, der Hälfte der andern Seite, vervielfachen, so würde genau dasselbe herauskommen, wie in der beigegebenen Figur ersichtlich ist.

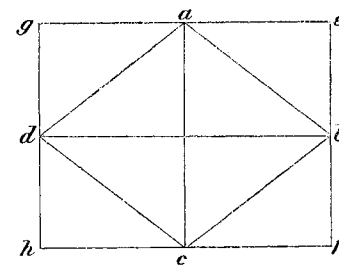


Fig. 6.

7. Nachdem so gezeigt ist, in welcher Art und Weise man die Flächeninhalte der Quadrate, Rhomben und Rechtecke sicher auffinden kann, bleibt noch übrig, zu lehren, wie man die Inhalte der Rhomboide und der andern schiefwinkligen Vierecke mit ungleichen Seiten finden kann. Die Bestimmung derselben vermögen wir aber nicht eher anzugeben, bevor wir nicht den Weg gezeigt haben, auf welchem wir den Flächeninhalt der Dreiecke berechnen können.

Ehe wir aber die Ausmessung der Dreiecke beginnen, wollen wir einige Aufgaben über die Flächeninhalte der vorgenannten Vierecksarten stellen, damit Du in ihrer Lösung mit Gottes Hilfe als ein feiner und tüchtiger Löser Dich darstellst.

8. Zunächst sei folgende Aufgabe gegeben: *Wie gross ist die Länge der Diagonale eines Quadrates, in dessen Länge und Breite 10 Ellen enthalten sind?* Die Antwort darauf ist: Die Diagonale dieses Quadrates ist die Wurzel aus 200. Vervielfacht man nämlich diese Diagonale mit sich selbst, so entsteht 200. Nun ist in jedem Quadrate das über der Dia-

existit, quapropter istius diametrum fore 200 radicem, quod est duplex multiplicationis 10 in 10, manifestum est.[1])

9. Si autem converso modo quaeratur: *Quadrati latus, cuius diametrum 200 ulnarum radix existiterit, quot ulnas in latere continebit?*, quadratum
5 diametri in duo dividens 100 invenies, cuius radix, quae est 10, eiusdem quadrati latus existit.[2])

Quadrati vero diametrum 14 et parum minus septima unius continebit.[3])

10. Item si talis fiat quaestio: *Quadrati embadum, de cuius area omnium*
10 *suorum laterum in unam summam ⟨collectorum⟩ collectum dempseris, si 21 supererint, quot ulnas veraciter continebit, et quot etiam in eiusdem quadrati latere continentur?* sic esto respondere paratus.

Si enim numerum eius laterum, quod est quatuor, in duo diviseris, binarius exibit, quem si in se ipsum duxeris, 4 nimirum invenies. Eis
15 igitur si 21, qui ex embado superest, superadiunxeris, 25 procreabuntur, quorum radicem inquirens 5 reperies, cui si dimidium numerum laterum, qui est duo, superaddideris, 7 efficient, et hoc est latus quadrati, cuius embadum 49 complent. Quaesitor autem ex hoc embado, quod 49 fuit, quatuor laterum eiusdem quantitates minuit, quorum unumquodque 6,
20 cuncta vero in unum collecta 28 continent, et 21, ut idem proposuit, superfuerunt.[4])

Istius autem responsionis veritatem si demonstrationibus scire cupis, praecedens quadratus et super eum $abcd$ describatur (Fig. 7), cuius omnia latera sibi invicem sunt aequalia. Et manifestum est, in eorum unoquoque
25 plus quatuor ulnis contineri, eo quod quaesitor post laterum diminutionem aliquid ex embado remanere proposuit. Cumque ita sit, ex linea ab lineam
| be, ex linea vero cd lineam cf, quarum unaquaeque 4 ulnas in longitu- 5′
dine contineat, abscindamus. Post hoc a puncto e ad punctum f quandam lineam dirigamus. Dehinc linea be, in cuius longitudine 4 ulnae conti-
30 nentur, in duo aequa supra punctum g secetur, erintque duae lineae bg, ge aequales, duas enim ulnas unaquaeque recipit. In hoc itaque quadrato

4 continebunt. — 5 quae] quod *B*. — 9 embadi. — 10 collectorum *habe ich hinzugefügt*. — 13 enim ut eius.

1) Leonardo 58, 6. 2) Leonardo 58, 3 v. u.

3) $\sqrt{200} \sim 14\frac{1}{7}$ ist nach der Regel gefunden $\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a}$.

4) Es ist das die Lösung der Gleichung $x^2 - 4x = 21$ oder allgemein $x^2 = ax + b$. Savasorda rechnet $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$ und beweist dann aus den von Euklides entlehnten Sätzen seine Rechnung. Siehe Leonardo 59, 15 v. u.

gonale beschriebene Quadrat doppelt so gross als das gegebene Quadrat. Es ist daher offenbar $\sqrt{200}$ die Länge der ganzen Diagonale, da 200 das doppelte Produkt von 10 mal 10 ist.[1])

9. Wird aber umgekehrt gefragt: *Wieviel Ellen enthält die Seite des Quadrates, dessen Diagonale gleich der Wurzel aus 200 Ellen ist?*, so findet man durch Division des Quadrates der Diagonale durch zwei 100, und die Wurzel davon, nämlich 10, ist die Seite des Quadrates.[2])

Die Diagonale des Quadrates enthält aber 14 Ellen und eine Kleinigkeit weniger als ein Siebentel einer Elle.[3])

10. Wird ebenso folgende Frage gestellt: *Wenn von dem Inhalte eines Quadrates, von dessen Fläche man die Summe seiner sämmtlichen Seiten weggenommen hat, 21 überbleiben, wieviel Quadratellen enthält es dann, und wieviel Ellen sind zugleich in jeder Seite des Quadrates enthalten?*, so sei zu folgender Antwort bereit.

Wenn man nämlich die Zahl der Seiten, das ist 4, halbiert, so erhält man 2, und diese mit sich selbst vervielfacht ergiebt 4. Addiert man hierzu 21, nämlich das, was von dem Flächeninhalte überblieb, so entstehen 25. Hiervon sucht man die Wurzel und findet 5. Addiert man hierzu die halbe Zahl der Seiten, das ist 2, so macht das 7, und das ist die Seite des Quadrates, dessen Flächeninhalt 49 Quadratellen erfüllen. Der Frager aber verminderte diese Fläche, nämlich 49, um die vier Seiten desselben, von denen jede 7, alle zusammen aber 28 betragen, und es blieben dann 21 übrig, wie er angab.[4])

Will man aber die Richtigkeit der Antwort bewiesen wissen, so verzeichne man das obenerwähnte Quadrat und bezeichne es mit *abcd* (Fig. 7). Alle Seiten desselben sind dann einander gleich, und es ist klar, dass in einer jeden mehr als 4 Ellen enthalten sein müssen, weil der Fragesteller angiebt, dass nach Wegnahme der Seiten von der Fläche etwas übrig bleiben soll. Deshalb schneiden wir von der Linie *ab* die Linie *be*, von der Linie *cd* aber die Linie *cf*, jede von 4 Ellen Länge, ab, ziehen dann vom Punkte *e* nach dem Punkte *f* eine gerade Linie und theilen darauf die Linie *be*, deren Länge vier Ellen beträgt im Punkte *g* in zwei gleiche Theile, dann sind also die Strecken *bg*, *ge* einander gleich, denn eine jede enthält zwei Ellen. Damit ist also deutlich bewiesen, dass in

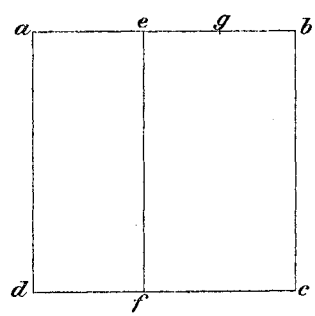


Fig. 7.

manifeste monstratur, quadrilaterum *bcfe* quatuor eiusdem quadrati latera simul collecta continere. Hoc etenim quadrilaterum est multiplicatio lineae *be*, quae est 4 ulnarum, in lineam *bc*, quae quadrati latus existit, scilicet latus, quod cum quater computatur, quatuor laterum summam in unum coadunatam procreabit. Quadrilaterum igitur *bcfe* quatuor quadrati latera simul collecta continebit. Cumque quadrilaterum hoc ex praedicto quadrato minuetur, remanebit quadrilaterum *adfc* 21 ulnarum, et hoc est illius quantitas, quod in quaestione remanere propositum est. Linea igitur *bc* in duas aequales partes, quae sunt *bg*, *ge*, dividitur, cui alia in directum recta linea *ea* superadditur. In omni autem recta linea in duo aequa divisa, si ei alia in directum recta linea adiungatur, superficies rectiangula, quae a tota cum adiuncta et ab adiuncta conficitur, cum quadrato, quod a lineae dimidio describitur, quadrato a dimidio et ab adiuncta constanti aequatur. Igitur multiplicatio lineae *ba* in lineam *ea* cum multiplicatione lineae *ge* in se ipsam est ut multiplicatio lineae *ga* in semet ipsam. At multiplicatio lineae *ab* in lineam *ea* est quadrilaterum *adfe*, eo quod unum latus *ad* lateri quadrati aequatur, aliud vero latus *ea* est id, quod lineae *eb* superadiicitur, et huius quadrilateri area 21 continet. Cui si multiplicatio lineae *eg* in se ipsam, quod est 4, superaddatur, 25 procreabuntur, quod multiplicationi lineae *ga* in se ipsam aequatur. Linea itaque *ga* quinque, quod est radix 25, continet. Cui, scilicet 5, si lineae *bg* summam, quae est duo, superadiunxeris, inde coadunatum 7 efficiet, quod est lineae *ba* quantitas. Embadum autem *abcd* 49 continet, ut subscripta figura repraesentat.

11. Item si quis hoc obiecerit: *Cum in cuiuslibet quadrati embado suorum quatuor laterum summa superaddita 77 inveneris, quot ulnas in embado continebantur?* dimidium suorum laterum, quod est duo, sumens et in semet multiplicans quatuor invenies. Quod si datae quantitati superadiunxeris, 81 habebis, cuius radicem, quod est 9, accipiens et ex ea praefatae superadiunctionis dimidium demens 7 remanebunt, et hoc est illius quadrati latus, cuius ⟨embadum⟩ 49 continet.[1])

Huius quidem demonstratio praedictae demonstrationi, velut subiungitur, ad|similiatur. Sit ergo quadrati latus linea *ab* (Fig. 8), cui quaedam 6

---

3 silicet *A und so immer*. — 4—5 in una in coadunatam. — 8 igitur *fehlt in B*. — 26 ulnas] prius. — 31 embadum *fehlt*.

---

1) Hier ist die zu lösende Gleichung $x^2 + 4x = 77$ oder allgemein $x^2 + ax = b$. Die Lösung des Verfassers ist $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$, welche

diesem Quadrate das Viereck *bcfe* die vier Seiten des Quadrates zusammengenommen enthält. Dieses Viereck ist nämlich das Produkt der Linie *be*, das sind 4 Ellen, mit der Linie *bc*, welche die Seite des Quadrates darstellt, das heisst derjenigen Seite, welche viermal gezählt die Gesammtsumme der vier Seiten hervorbringt. Das Viereck *bcfe* enthält also die vier Seiten des Quadrates zusammengenommen. Zieht man nun dieses Viereck von dem obengenannten Quadrate ab, so bleibt das Viereck *adfe* von 21 Quadratellen übrig, das ist die Grösse, welche in der Aufgabe als überbleibend bezeichnet wurde.

Die Gerade *be* ist also in zwei gleiche Theile, nämlich *bg*, *ge* getheilt, und sie ist um eine andere Gerade *ea* direkt verlängert. Wenn aber eine gerade Linie in zwei Hälften getheilt wird und sie wird um eine andere gerade Linie direkt verlängert, so ist das Rechteck, das aus der ganzen Linie plus der Verlängerung und aus der Verlängerung gebildet wird, zusammen mit dem Quadrate über der Hälfte der Linie gleich dem Quadrate über der Hälfte plus der Verlängerung. Es ist also das Produkt aus der Linie *ba* und der Linie *ea* plus dem Produkt der Linie *ge* mit sich selbst gleich dem Produkt der Linie *ga* mit sich selbst. Das Produkt der Geraden *ab* mal der Geraden *ea* ist das Viereck *adfe*, weil die eine Seite *ad* der Quadratseite gleich ist, die andere Seite *ea* aber die Verlängerung der Seite *eb*, und die Fläche dieses Vierecks ist 21. Addiert man hierzu das Produkt der Linie *eg* mit sich selbst, das ist 4, so entstehen 25, und das ist dem Produkt der Linie *ga* mit sich selbst gleich. Die Linie *ga* ist also 5, nämlich die Wurzel von 25. Vereinigen wir nun mit dieser 5 den Werth der Linie *bg*, der zwei beträgt, so macht die Summe 7, und das ist die Länge der Linie *ba*. Der Flächeninhalt von *abcd* aber beträgt 49, wie in der beigegebenen Figur zu sehen ist.

11. Wenn ferner jemand Folgendes fragte: *Wenn man den Inhalt eines Quadrates und die Summe der vier Seiten zusammenaddiert, und 77 gefunden werden, wieviel Quadratellen enthält dann die Fläche?*, so nimmt man die Hälfte der Seiten, das ist 2, multipliciert sie mit sich selbst, und erhält dann 4. Fügt man das der gegebenen Grösse hinzu, so hat man 81. Davon nimmt man die Wurzel, sie ist 9, und zieht von ihr die Hälfte der obengenannten Hinzufügung ab, so bleibt 7, und das ist die Seite des gesuchten Quadrates, dessen Inhalt 49 Quadratellen enthält.[1])

Der Beweis dafür, wie er unten folgt, ist dem vorhergehenden Beweise ähnlich. Es sei also die Seite des Quadrates *ab* (Fig. 8), die um

---

er wieder aus Sätzen, die er aus Euklides entnommen hat, beweist. Bei Leonardo 59, 5.

linea *bc* quatuor ulnarum superaddatur. Et notum est, quod multiplicatio lineae *ab* in lineam *bc* quatuor laterum quadrati, lineae *ab*, summam continet. Quadrilaterum itaque *bcde*, cuius duae lineae *be*, *cd* lineae *ab*, et cuius linea *de* aequa sit lineae *cb*, constituatur. At si lineam *ed* usque ad punctum *f* aequalem lineae *ca* produxeris, et lineam *af* abstraxeris, quadrilaterum *acdf* quadratum lineae *ab* cum eiusdem quatuor laterum summa in unum collecta continebit, eo quod quadratus *abef* est quadratus lineae *ab*, et quadrilaterum *bcde* est quatuor laterum eiusdem quadrati summa. Totum quadrilaterum *acdf* 77 ulnas recipit, unde, si lineam *bc* in duo aequa supra punctum *g* ⟨diviseris, erit linea *bg* duarum ulnarum. Ergo, quia linea *bc* in duo aequa supra punctum *g*⟩ dividitur, eique linea *ba* in directum superadditur, erit multiplicatio totius lineae *ac*, quod est tota cum adiuncta, in lineam *ab*, quae est superadiunctio, cum quadrato lineae *bg*, quae est primae lineae dimidium, quadrato *ga*, quae est dimidium lineae *bc* cum adiuncta, aequalis; et multiplicatio lineae *ac* in lineam *ab* est quadrilaterum *acdf*, quod est 77. Cui si quadratum *bg*, quod est 4, superadiunxeris, quadratum lineae *ag*, quod est 81, invenies. Linea igitur *ag* erit 9 ulnarum. De qua si lineam *bg*, quae est duarum ulnarum, depresseris, remanebit linea *ab* 7 ulnarum. Area igitur quadrati *abef* erit 49, et haec ⟨est⟩ figura.

12. Haec item alia quaestio proponitur: *Si cuiuslibet quadrati embadum ex suorum quatuor laterum quantitate depresseris, et tria supererunt, quot in eius embado, vel quot in singulis lateribus ulnae continebantur?*

Huius quidem quaestionis solutionem sic invenies. Omnium laterum quadrati summam in duo aequa divides, et duo reperies, ex quorum multiplicatione 4 innascentur. Ex quibus si illa tria, quae supererant, minueris, unus remanebit, cuius radix unus existit. Quem si ex duobus, quod est summa medietatis laterum, depresseris, remanebit unus, et ipse est quadrati latus. Vel si residuam unius radicem ⟨duobus, quod est⟩ dimidium ⟨laterum⟩, superaddideris, 3 colligentur, quae sunt eiusdem quadrati latus.[1])

2 lateris. — 3 Quadratum. — 5 aequale. — 9 72 ulnas *A*. — 11—12 diviseris . . . punctum *g* *in A auf dem Rande ausradiert.* — 14 quadrilatero. — 16 quadratus. — 20 est *fehlt.* — 22 tria] ita. — 29 duobus, quod est *in A über der Zeile ausradiert, ebenso* laterum.

1) Lösung der Gleichung $x^2 + 3 = 4x$, allgemein $x^2 + b = ax$. Hier giebt Savasorda die Lösung $x = a \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ mit Beweis für *beide* Werthe. Leonardo 60, 10 verfährt genau ebenso, was Lösung und doppelten Beweis betrifft. An späterer Stelle zeigt Savasorda auch, dass die Lösung unmöglich ist, sobald $\left(\frac{a}{2}\right)^2 < b$ ist.

eine andere Gerade *bc* von 4 Ellen verlängert werde. Nun ist bekannt, dass das Produkt der Geraden *ab* mal der Geraden *bc* das Vierfache der Quadratseite *ab* enthält; es möge daher das Viereck *bcde* beschrieben werden, dessen zwei Seiten *be*, *cd* der Seite *ab*, dessen Seite *de* aber der Geraden *cb* gleich ist. Verlängert man jetzt die Gerade *ed* bis zum Punkte *f* gleich der Geraden *ca*, und zieht *af*, so enthält das Viereck *acdf* das Quadrat der Geraden *ab* plus der Summe der vier Seiten desselben zusammengenommen, weil das Quadrat *abef* das Quadrat über *ab*, und das Viereck *bcde* gleich der Summe der vier Seiten dieses Quadrates ist. Das ganze Viereck *acdf* enthält also 77 Quadratellen. Halbiert man nun die Gerade *bc* im Punkte *g*, so ist die Linie *bg* gleich 2 Ellen, es ist also, da die Gerade *bc* im Punkte *g* in zwei gleiche Stücke getheilt ist

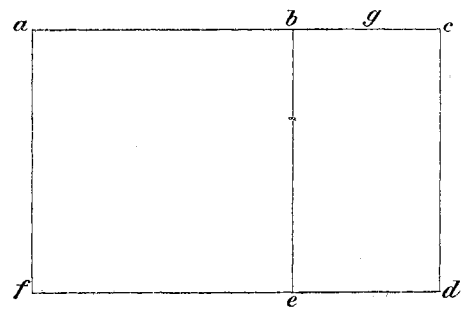


Fig. 8.

und um die Gerade *ba* verlängert wurde, das Produkt der ganzen Linie *ac*, das ist der getheilten Linie plus der Verlängerung, mal der Linie *ab*, das ist der Verlängerung, plus dem Quadrate der Linie *bg*, das ist der Hälfte der ersten Linie, gleich dem Quadrate über *ga*, das ist die Hälfte der Linie *bc* plus der Verlängerung. Das Produkt der Geraden *ac* mal der Geraden *ab* ist aber das Viereck *acdf*, das ist 77, und wenn man hierzu das Quadrat über *bg*, das ist 4, hinzufügt, so erhält man das Quadrat der Geraden *ag*, also 81. Die Gerade *ag* ist also 9 Ellen. Zieht man davon die Linie *bg* von 2 Ellen ab, so bleibt die Gerade *ab* von 7 Ellen übrig. Die Fläche des Quadrates *abef* ist daher 49, und das ist die zugehörige Figur.

12. Es werde ferner folgende Frage vorgelegt: *Wenn man den Flächeninhalt eines Quadrates von der Summe der vier Seiten desselben hinwegnimmt, und drei als Rest bleibt, wieviel Ellen sind dann im Inhalte und wieviel in den einzelnen Seiten des Quadrates enthalten?*

Die Lösung dieser Aufgabe findet man folgendermaassen: Man halbiere die Summe aller Seiten des Quadrates, so findet man 2, durch Multiplikation derselben mit sich selbst entstehen 4. Nimmt man nun hiervon jene drei, welche Rest bleiben sollen, weg, so bleibt eins übrig, deren Wurzel die Einheit ist. Subtrahiert man diese wieder von zwei, das ist der halben Anzahl der Seiten, so bleibt eins als Rest, und das ist die Seite des Quadrates. Oder auch, wenn man die Wurzel der Rest gebliebenen Einheit zu 2, der halben Anzahl der Seiten, addiert, so erhält man 3, und das ist ebenfalls die Seite des Quadrates.[1])

Et ut haec demonstratione probentur, sint quatuor quadrati latera in unum collecta quadrilaterum *abcd*, cuius longitudo linea *ab*, latitudo vero linea *ac* constituatur. Manifestum est igitur, quod linea *ab* 4, quod est omnium laterum numerus, in se continet, et linea *ac* quadrati latus existit. Si ex hoc itaque parte altera longiori quadratum *acfe*, cuius omnia latera lineae *ac* sunt aequalia, depresseris, quadrilaterum *efdb* trium partium remanebit. Quo facto, si lineam ab in duo aequalia supra punctum *g* et duo inaequalia supra punctum *e* diviseris, quae sub totius lineae inaequalibus portionibus *be* et *ea* rectiangula superficies continetur, cum quadrato | a linea *eg*, quae est inter utrasque sectiones, descripto, ei quadrato, quod 6′
a totius lineae dimidio, quod est *ga*, describitur incontanter aequabitur. Quadratum autem a linea *ga* descriptum 4 ulnarum fore nullus ambigit. De quo si 3, quae sunt quadrilaterum lineae *be* in lineam *ea*, depresseris, et ipsum est quadrilaterum *efdb*, remanebit 1, quod est quadratus lineae *eg*. Linea igitur *eg* unius, tota autem linea *ga* duarum existit ulnarum. Linea igitur *ea* unius ulnae remanebit, et hoc est latus quadrati, ut in hac figura describitur (Fig. 9).

Item possibile est, ut linea *eb* trium sit ulnarum, cum linea *gb* duarum et linea *ge* unius ulnae fuerit (Fig. 10), et tamen ipsa *ea* erit alterius quadrati latus. Velut si quantitas quatuor laterum erit superficies parte altera longior *abcd*, de quo quadratum *efdb* demens remanebit quadrilaterum *aefc* trium ulnarum, punctus autem *g*, qui lineam *ab* in duo aequa partitur, cadit super lineam *eb*, quae est unum latus quadrati *efdb*. Et si praedictorum memor exstiteris, linea *eg* unam ulnam continere dicitur. Quare, si lineam *gb*, quae est duarum, superaddideris *ge*, 3 nimirum efficies, et haec est longitudo lineae *eb*, ⟨quae⟩ quadrati latus existit, eo quod haec et omnes eius consimiles quaestiones ad duo pervenient. Veluti si ab aliquo proponitur, *quod, cum embadum ex suorum quatuor laterum quantitate proicitur, et* 4 *minus quarta remanserit, quot in sui quantitate, et quot in singulis lateribus mensuras continebantur,* huius quidem quadrati latus aut unam et dimidiam vel duas mensuras et dimidiam continebit, et haec est figura secunda.

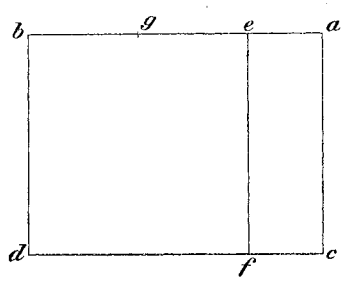


Fig. 10.

13. Quaestionibus quadratorum explicatis ad figurarum parte altera longiorum quaestiones transeamus.

---

10 a] autem. — 19 ipsa eadem. — 23 quadratum. — 30 quae *in A über der Zeile ausradiert.*

Damit nun dies durch Beweis bekräftigt werde, seien die vier Seiten des Quadrates zusammengenommen das Viereck *abcd*, dessen Länge durch die Gerade *ab*, die Breite aber durch die Linie *ac* dargestellt werde. Dann ist klar, dass die Gerade *ab* 4 in sich enthält, was die Anzahl aller Seiten ist, die Gerade *ac* aber ist die Seite des Quadrates. Nimmt man von diesem Rechteck das Quadrat *acfe* weg, dessen Seiten sämmtlich der Geraden *ac* gleich sind, so bleibt das Viereck *efdb* von drei Ellen übrig. Halbiert man nun die Linie *ab* im Punkte *g* und theilt sie zugleich in zwei ungleiche Stücke im Punkte *e*, so ist das Rechteck, das zwischen den beiden ungleichen Theilen *be* und *ea* der ganzen Linie enthalten ist, plus dem Quadrate über der Linie *eg*, welche zwischen den beiden Theilpunkten enthalten ist, gleich dem Quadrate, das über der Hälfte der ganzen Linie, das ist über *ga*, beschrieben wird. Das Quadrat über der Linie *ga* ist aber ohne Zweifel gleich 4 Quadratellen. Nimmt man hiervon 3, die das Rechteck aus der Linie *be* und der Linie *ea* darstellt, weg, das ist das Rechteck *efdb*, so bleibt 1 übrig, das Quadrat der Geraden *eg*. Die Gerade *eg* enthält also eine, die ganze Gerade *ga* zwei Ellen, es bleibt daher für die Gerade *ea* eine Elle übrig, und das ist die Seite des Quadrates, wie in der nebenstehenden Figur gezeigt wird (Fig. 9).

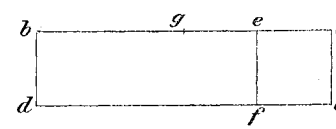


Fig. 9.

Es ist aber auch möglich, dass die Gerade *eb* drei Ellen lang ist, während die Gerade *gb* zwei, und die Gerade *ge* eine Elle beträgt (Fig. 10), und trotzdem ist dann *ea* die Seite eines andern Quadrates. Es stelle z. B. das Rechteck *abcd* die Summe der vier Seiten dar. Nimmt man von diesem das Quadrat *efdb*, so bleibt das Viereck *aefc* von drei Quadratellen übrig, der Punkt *g* aber, der die Gerade *ab* hälftelt, fällt auf die Gerade *eb*, welche eine Seite des Quadrates *efdb* ist. Wenn man sich nun an das oben Gesagte erinnert, so muss man sagen, die Linie *eg* enthalte eine Elle. Addiert man also die Gerade *gb*, die zwei Ellen enthält, hinzu, so macht das 3 Ellen, und das ist die Grösse der Linie *eb*, welche die Seite des Quadrates darstellt. Diese und alle ähnlichen Aufgaben kommen auf zwei Lösungen hinaus. Wenn z. B. von Jemandem gefragt wird: *Wenn der Flächeninhalt von der Summe der vier Seiten weggenommen wird, und 4 weniger* $^1/_4$ *überbleibt, wieviel in seinem Inhalte und wieviel Längeneinheiten in den einzelnen Seiten enthalten sind,* so wird die Seite dieses Quadrates entweder ein und eine halbe oder zwei und eine halbe Längeneinheit enthalten, und hierher gehört die zweite Figur.

13. Nachdem wir die Aufgaben über Quadrate erläutert haben. wollen wir zu Fragen über Rechtecke übergehen.

Si quis: *In diametro illius parte altera longioris, cuius unum latus 8, alterum vero 6 continet, quot ulnae continentur?* quaestionem fecerit, utrumque duorum ipsius laterum in semet multiplica, et duorum embadorum simul collectorum radicem addisce, quodque inveneris, erit diametrum. In hac namque parte altera longiore si 8 in semet duxeris, ⟨64 efficies⟩; 6 etiam si in se ipsum multiplicaveris, 36 invenies, quae in unum collecta 100 perficient, cuius radix est 10, quod est huius parte altera longioris diametrum.[1])

14. *Aliter etiam hoc diametrum invenire poteris;* 8 scilicet, quod est unum latus, in 6, quod est alterum, multiplica, et erit embadum 48. Istius autem embadi duplum sunt 96, cui si binarii multiplicationem, hoc est id, quod inter utrumque latus continetur, superaddideris, 100 perficies, cuius radix, ut praediximus, sunt 10, quod est huius parte altera longioris diametrum.

Huius quidem haec est regula certissima, quod *in omni figura parte altera longiori si multiplicationem illius, quod inter utrumque latus continetur, duplo ipsius embadi superadiunxeris, inde collectum quadrato diametri aequabitur.* Cuius demonstratio ex hac, quae subiungitur, regula procedit: Si recta linea in utlibet abscindatur, qui a tota | quadratus describitur cum 7
quadrato ab una portione constituto, aequus est duplo rectanguli, quod sub tota et praedicta portione continetur, et ei quadrato, quod ab altera portione describitur.[2])

15. Item quaeritur: *Si in parte altera longiore, cuius diametrum 10 ulnarum fuerit, longitudo latitudinem superaverit in duobus, quot in longitudine et latitudine, quot et in embado continebit?*

Solutio. Quoniam istius parte altera longioris ⟨diametri quadrati⟩ embadum 100 fore non ambigis, si illius ⟨quadrati⟩ embadum, in quo longitudo latitudinem superat, quod est 4, ex ipso proieceris, 96 relinquuntur. Quibus in duo divisis 48 reperies, et hoc est istius parte altera longioris embadum. Quod si eiusdem latera nosse desideras, id, in quo longitudo latitudinem excedit in duo partire, et unus exibit, cuius embadum est unus. Quod si parte altera ⟨longioris⟩ embado superaddideris, 49 nimirum invenies, cuius radix est 7. Qui si unum, quod est superationis dimidium, superadiunxeris, 8 reperies, et hoc ⟨est⟩ longitudinis latus. Si autem ex

---

2—3 utrique. — 5 64 efficies *in A über der Zeile ausradiert.* — 26 diametri quadrati *fehlt.* — 27 quadrati *fehlt.* — 32 altera embadi *A*, longioris *fehlt auch in B.* — 33 superatoris. — 34 est *fehlt.*

Würde jemand fragen: *Wieviel Ellen sind in der Diagonale eines Rechteckes enthalten, dessen eine Seite 8, die andere aber 6 enthält?*, so multipliciere man jede der beiden Seiten desselben einzeln mit sich selbst und suche, nachdem man die beiden Flächeninhalte zusammenaddiert hat, die Wurzel, das Ergebnis ist die Diagonale. In dem vorliegenden Rechtecke entsteht aus 8 mit sich selbst vervielfacht 64, ebenso findet man durch Multiplikation von 6 mit sich selbst 36. Beides zusammen macht 100, davon ist die Wurzel 10, und das ist die Diagonale dieses Rechtecks.[1])

14. *Diese Diagonale kann man auch auf andere Weise finden.* Multipliciert man nämlich 8, das ist die eine Seite, mit 6, das ist die andere, so entsteht der Flächeninhalt 48. Das Doppelte des Inhalts ist also 96. Addiert man hierzu das Quadrat von 2, das ist von dem Unterschied zwischen den beiden Seiten, so erhält man 100, und hiervon ist, wie wir oben sagten, die Wurzel gleich 10, und das ist die Diagonale des Rechtecks.

Es ist nämlich die absolut sichere Regel hierfür: *Wenn man in einem Rechteck das Quadrat des Unterschiedes zwischen den beiden Seiten dem doppelten Inhalte hinzufügt, so ist die Summe dem Quadrate der Diagonale gleich,* und der Beweis folgt aus folgendem Lehrsatze:

Wenn eine gerade Linie beliebig getheilt wird, so ist das Quadrat über der ganzen Linie plus dem Quadrate über dem einen Theile gleich dem doppelten Rechtecke, das aus der ganzen Linie und besagtem Theile gebildet wird, plus dem Quadrate über dem andern Theile.[2])

15. Es werde ferner gefragt: *Wenn in einem Rechtecke, dessen Diagonale 10 Ellen beträgt, die Länge die Breite um 2 übertrifft, wieviel Ellen enthält dann die Länge, wieviel die Breite, und wieviel Quadratellen der Flächeninhalt?*

Auflösung. Da die Fläche des Quadrates über der Diagonale dieses Rechteckes unzweifelhaft 100 beträgt, so bleibt, wenn man davon das Quadrat des Unterschiedes zwischen Länge und Breite, das ist 4, wegnimmt, 96 übrig. Halbiert man dies, so findet man 48, und das ist der Inhalt des Rechtecks. Will man nun die Seiten desselben finden, so halbiert man den Unterschied der Seiten und erhält so die Einheit, davon ist das Quadrat eins. Addiert man jetzt dieses zu dem Inhalte des Rechtecks, so erhält man 49, und hiervon ist die Wurzel 7. Hierzu eins, das ist die Hälfte des Unterschiedes, addiert, findet man 8, und das ist die Länge. Nimmt

---

1) Leonardo 66, 18.

2) Das kommt auf die Beziehung hinaus:

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab.$$

eadem scilicet radice unum dempseris, 6 remanebunt, quod est latus latitudinis. Multiplicatio vero 8 in 6 48, quod est embadum, procurabit.[1])

Hoc quidem hac demonstratione firmatur. Esto igitur parte altera longior *abcd* (Fig. 11), cuius diametrum *ad* sit 10 ulnarum ut praedixi-
5 mus, et manifestum est, quod longitudo, quae est latus *ab*, latitudinem, quae est *ac*, superat in duobus. Nos autem per alios duos numeros huius parte altera longioris embadum et singulorum laterum quantitatem invenire quaerimus. Et notum est, quod multiplicatio lineae *ab* in lineam *ac* totum continet embadum. Multiplicatio vero diametri in se ipsum duplo totius
10 embadi cum quadrato illius, in quo longitudo latitudinem excedit, aequatur, ut in praecedenti quaestione monstravimus. Quapropter, si ex quadrato diametri, qui 100 in se continet, quadratum superationis, quod est 4, depresseris, 96, quod est duplum embadi, relinquentur, cuius dimidium, quod est 48, totum embadum complet. Ac si laterum quantitates scire volueris,
15 quia longitudinem in duobus latitudinem superare cognoveris, ex linea *ab*, quae est longitudo, deme ⟨latitudinem, quae est *ac*⟩, et relinquetur linea *ea* duarum ulnarum, quod est id, in quo longitudo latitudinem superat. Quam si in duo aequa supra punctum *f* diviseris, unaquaeque duarum linearum *ef*, *fa* unius ulnae fore iudicabitur. Et quia linea *ea* in duo aequa supra
20 punctum *f* dividitur, eique alia recta linea, quae est *be*, in directum adicitur, multiplicatio totius lineae *ab*, quae est tota cum adiuncta, in lineam | *be*, quae est adiuncta, cum quadrato, quod a linea *fe*, quae est dimi- 7′
dium, describitur, quadrato lineae *fb*, quae est cum adiuncta dimidium, aequabitur. Ast multiplicatio lineae *ab* in lineam *be* est parte altera longior
25 *abcd*, quod est 48, eo quod linea *eb* aequa est lineae *ac*, quae est latus latitudinis, et quadratus lineae *ef* est unus. Quare, si eas coniunxeris, 49 perficies, quod aequum est quadrato lineae *fb*. Linea igitur *fb* 7, quod est radix 49, continet. Cui radici si lineam *fa*, quae est unus, superadiunxeris, erit tota *ab* 8, quod est parte altera longioris longitudo. Si autem
30 ex ea, scilicet radice, lineam *fe*, quae similiter est unus, abstuleris, remanebit linea *eb* 6, latitudini parte altera longioris, quae est *ac*, aequalis. Multiplicatio vero longitudinis in latitudinem embadum perficit, ut haec figura declarat.

---

12 superatoris. — 15 quia] qui *A*. — 16 latitudinem, quae est *ac in A über der Zeile ausradiert*. — 18 unamque. — 29—30 longitudo, scilicet radicem. Si autem ex ea lineam.

---

1) Leonardo 64, 3. Lösung der Gleichungen $x^2 + y^2 = a^2$, $x - y = b$. Savasorda's Lösung ist: $xy = \frac{a^2 - b^2}{2}$; $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$; $\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) = x$; $\frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y) = y$.

man aber von derselben Wurzel eins weg, so bleiben 6, und das ist die Breite. Das Produkt von 8 mal 6 giebt 48, und das ist der Inhalt.[1])

Das kann man folgendermaassen beweisen: Das gegebene Rechteck sei *abcd* (Fig. 11), dessen Diagonale *ad*, wie wir oben sagten, 10 Ellen betrage. Nun ist klar, dass die Länge, nämlich Seite *ab*, die Breite, nämlich *ac*, in 2 übertrifft. Wir wollen aber durch diese beiden Zahlen den Flächeninhalt und die Länge der einzelnen Seiten des Rechteckes bestimmen. Nun weiss man, dass das Produkt der Linie *ab* mit der Linie *ac* den ganzen Inhalt ausmacht, das Produkt der Diagonale mit sich selbst ist aber, wie wir in der vorhergehenden Aufgabe gezeigt haben, gleich dem doppelten Flächeninhalte plus dem Quadrate des Unterschiedes zwischen Länge und Breite. Wenn man also vom Quadrate der Diagonale, das 100 beträgt, das Quadrat des Unterschiedes, das ist 4, abzieht, so bleibt 96, und das ist der doppelte Inhalt. Seine Hälfte, nämlich 48, ist dann der Inhalt selbst. Will man aber die Länge der Seiten kennen, so schneide man von der Geraden *ab*, das ist der Länge, die Breite ab, nämlich *ac*, dann bleibt, weil man weiss, dass die Länge die Breite in zwei übertrifft, die Strecke *ea* gleich 2 Ellen übrig, das ist eben der Unterschied zwischen Länge und Breite. Theilt man nun diesen im Punkte *f* auf die Hälfte, so ist jede der beiden Geraden *ef*, *fa* gleich einer Elle. Nun ist die Gerade *ea* im Punkte *f* in zwei gleiche Theile getheilt und um eine andere Gerade, nämlich *be*, verlängert, folglich ist das Produkt der Gesammtgeraden *ab*, das ist die ganze Linie plus der Verlängerung, mal der Geraden *be*, der Verlängerung, plus dem Quadrate über der Linie *fe*, der Hälfte, gleich dem Quadrate der Geraden *fb*, das ist der Verlängerung plus der Hälfte. Es ist aber das Produkt der Geraden *ab* mal *bc* das Rechteck *abcd* also 48, weil die Gerade *eb* gleich der Geraden *ac*, das heisst der Breite, ist, und das Quadrat der Geraden *ef* ist eins. Addiert man also, so erhält man 49, und das ist dem Quadrate der Geraden *fb* gleich. Die Strecke *fb* enthält also 7, die Wurzel von 49. Fügt man hierzu die Gerade *fa*, welche eins ist, so ist die ganze *ab* gleich 8, das ist die Länge des Rechtecks. Wenn man aber von jener Wurzel die Länge *fe*, die ebenfalls eins ist, wegnimmt, so bleibt die Gerade *eb* gleich 6 übrig, und sie ist der Breite des Rechtecks, nämlich der Geraden *ac* gleich. Das Produkt aus Länge und Breite aber giebt den Inhalt, wie in der Figur gezeigt wird.

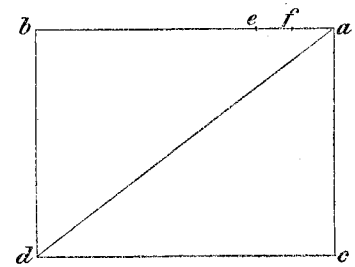


Fig 11.

16. *Item in longitudine latitudineque illius parte altera longioris, cuius embadum 48, longitudo vero cum latitudine sibi copulata 14 continet, quot ulnae continentur?*

Solutio. Si dimidium 14 in se ipsum multiplicaveris, et ex collecto 48, quod est embadum, proieceris, unus remanebit, cuius radix est unus. Quem si in septenario superadiunxeris, 8 reperies, quod est huius parte altera longioris longitudo. Eundem autem si ex septenario depresseris, 6 relinquentur, quod est eiusdem latitudo. Huius nempe solutionis demonstratio ex praecedenti figura procedit.[1])

Et manifestum fit, quod, qui alicuius embadum multiplicatione medietatis omnium suorum laterum in simul collectorum maius existere dixerit, a veritate prorsus deviaret. Ut exempli causa si parte altera longiorem, in cuius embado 48 reperiuntur, in sui longitudine latitudineque simul coniunctis 13 contineri quis affirmaverit, veritatem penitus inculcabit, eo quod ipsius laterum medietas 6 et dimidium continet, cuius multiplicatio est 42 et quarta, ⟨quod⟩ embadi quantitate, quod est 48, minus existit. Illud igitur esse non posse probatio esto.[2])

17. Item si, *quot in parte altera longioris embado, cuius diametrum cum altero suorum laterum 18, alterum vero latus 6 ulnas continet, et quot in eius diametro, et quot etiam in illo latere, quod cum diametro numeratur, ulnae contineantur,* quaesitum fuerit, notum latus in se ipsum multiplica, indeque collectum per diametri quantitatem alteri copulatam, quod est 18, partire, quodque exierit, erit duo. Quae si 18 superaddideris, 20 provenient, cuius dimidium, quod est 10, diametri quantitatem efficiet. Quod autem ex 18 remanserit, et sunt 8, alterum latus erit. Multiplicatio vero 8 in senarium embadum perficit.[3])

Horum | quippe demonstratio patebit sic. Parte altera longior *abcd* 8
constituatur (Fig. 12), cuius diametrum sit *ac*, ignotum vero latus *ad*, notum autem *dc*. Post hoc centro *a*, spatio vero *ac* circulus *ecf* circinetur. Quo facto linea *ad* ex utraque parte usque ad duo circumferentiae puncta

---

2 continet] remanet. — 3 continetur. — 7 longitudo] latitudo. — 10 fit] sit. — 16 quod *fehlt*. — 17 posse] potest. — 22 indeque *B*, summam *A*. — 23 exit *A*. — 24 dimidium *B*, diametrum *A*.

---

1) Leonardo 63, 11 v. u. Hier sind die Gleichungen: $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y = b$. Die Lösung dem Vorhergehenden entsprechend $xy = \frac{b^2 - a^2}{2}$; $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$; $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$; $y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y)$.

2) Hierin liegt die schon oben erwähnte Erkenntnis, dass im dritten Falle der quadratischen Gleichungen die Lösung für $\left(\frac{a}{2}\right)^2 < b$ unmöglich wird.

16. Ebenso: *Wieviel Ellen sind in der Länge und Breite jenes Rechtecks enthalten, dessen Inhalt 48, und in dem die Summe aus Länge und Breite 14 ist?*

Auflösung. Multipliciert man die Hälfte von 14 mit sich selbst, und subtrahiert von dem Quadrate den Inhalt 48, so bleibt eins übrig, dessen Wurzel eins ist. Addiert man dies zu obiger 7, so findet man 8, die Länge des Rechtecks. Dieselbe eins von 7 weggenommen, lässt 6 als Rest, und das ist die Breite. Der Beweis dieser Auflösung folgt aus der vorhergehenden Figur.[1])

Es ist auch klar, dass jemand, welcher behaupten würde, es könne in einem Recktecke der Flächeninhalt grösser sein als das Quadrat der Hälfte aller Seiten zusammengenommen, etwas absolut Falsches aussagen würde. Wenn z. B. jemand sagte, in einem Rechtecke vom Inhalte 48 betrage Länge und Breite zusammengenommen 13, so würde er der Wahrheit geradezu in's Gesicht schlagen, denn da die Hälfte der Seiten $6\frac{1}{2}$ beträgt, und davon das Quadrat $42\frac{1}{4}$ enthält, so ist dasselbe kleiner als der Inhalt, nämlich als 48. Dass das also nicht möglich ist, möge so gezeigt sein.[2])

17. Wird ferner gefragt: *Wieviel Quadratellen enthält der Inhalt eines Rechtecks, dessen Diagonale plus einer der beiden Seiten 18 Ellen, die andere Seite aber 6 Ellen beträgt, und wieviel Ellen sind in der Diagonale und wieviel in der Seite enthalten, welche mit der Diagonale zusammengerechnet war?*, so vervielfache man die bekannte Seite mit sich selbst, und theile das Quadrat durch die Summe aus der Diagonale und der andern Seite, das ist durch 18, der Quotient wird 2. Das addiere man zu 18, dann kommen 20, und die Hälfte davon, also 10, macht die Länge der Diagonale aus, was aber von 18 übrig bleibt, das ist 8, ist die andere Seite. Das Produkt von 8 und 6 giebt den Inhalt.[3])

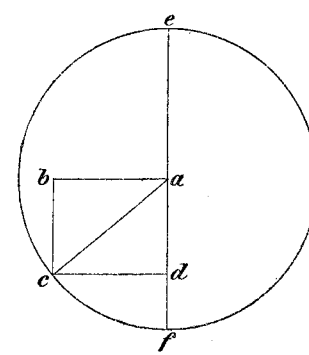


Fig. 12.

Der Beweis hiervon wird folgendermaassen klar. Es werde das Rechteck $abcd$ gezeichnet (Fig. 12), dessen Diagonale ac, die unbekannte Seite aber ad sei, die bekannte Seite jedoch dc. Nun beschreibe man um a als Mittelpunkt mit der Zirkelöffnung ac den Kreis cef, und verlängere dann ad nach beiden Seiten bis zu den beiden Punkten des Umfanges e, f, dann ist die Gerade ae der Diagonale ac gleich, da jede von ihnen vom Mittelpunkte nach dem Umfange gezogen ist. In der Aufgabe wird aber die

3) Leonardo 65, 4. Savasorda benutzt die Gleichung $y^2 = d^2 - x^2 = (d+x)(d-x)$ um durch Division durch $d+x$ den andern Faktor $d-x$ zu erhalten, wodurch er dann sowohl d als x findet.

e, *f* extendatur, eritque linea *ae* ⟨semi⟩diametro *ac* aequalis, quia a centro in circumferentiam utraque trahitur. In quaestione vero linea *ac* cum linea *ad* 18 ulnarum ponitur: tota igitur linea *cd* erit 18, tota vero linea *ef* est circuli diameter. Et ut in propositis universalibus monstratur, manifestum est, quod multiplicatio lineae *ed* in lineam *df*, quae diametrum perficit, est ut multiplicatio lineae *dc* in se ipsam, eo quod ipsae sunt duae lineae sese in eodem circulo secantes, quarum altera per centrum protrahitur. Quapropter, si lineam *dc* in se ipsam multiplicaveris et per lineam *ed* diviseris, exibit linea *df*, eritque duarum ulnarum. Tota vero linea *ef* erit 20, cuius medietas est linea *ae* diametro *ac* parte altera longioris aequalis. Ipsum igitur 10 ulnas continebit, remanebitque ignota linea *ad* 8, ut in hac subscripta figura deprehenditur.

18. Item si quaeratur: *Quot in quolibet latere figurae parte altera longioris ulnae, cuius diametrum 13, embadum vero 60 fuerit, continentur?* eius embadum duplicans 120 reperies. Quod si ex multiplicatione praedicti diametri in se ipsum, quod est 169, proieceris, 49 remanebit. Cuius radicem accipiens 7 invenies, et ipsum est superfluum, quod inter duo parte altera longioris latera continetur. Quod si in duo aequa diviseris, et dimidium in se ipsum multiplicaveris, inde coadunatum 12 ⟨et⟩ quartam efficiet, quod si embado parte altera longioris superaddideris, 72 et quarta colligentur. Cuius radicem, quae est 18 et dimidium, assumens si dimidio praedicti superflui, quod est tres et dimidium, superadiunxeris, 12 invenies, et haec est parte altera longioris longitudo.[1])

19. Executis figurarum parte altera longiorum quaestionibus rhumborum quaestiones ostendamus oportet.

Rhumbus igitur, cum alterum diametrum 16, alterum vero 12 ulnas habuerit, quot in latere continebit?

Solutio. Si utriusque diametri dimidium sumpseris, et in se ipsum utrumque duxeris, quodque ex utraque multiplicatione provenerit, in unum coadunaveris, et coadunati radicem acceperis, rhumbi latera reperies.

Dimidium enim 16 sunt 8, quorum in semet multiplicatio sunt 64; dimidium 12 sunt 6, quorum multiplicatio 36 efficiet. Hae autem duae multiplicationes in unum collectae 100 perficiunt, cuius radix | est 10, quod 8′
rhumbi latus explicat.[2])

---

1 semi *fehlt.* — 1—2 quia a centro] et g ⁝ *und am Rande* ⁝ ad centro *A.* — 2 circumferentia. — trahuntur. — 9 ulnarum] linearum. — 14 continetur. — 15 embadus. — 16 ipsis. — 19 et *fehlt.* — 21 assumes.

---

1) Leonardo 64, 23. Man hat hier $x^2 + y^2 = a^2$, $xy = b$ und kann also

Gerade *ac* plus der Geraden *ad* gleich 18 Ellen gesetzt, folglich ist die Gesammtlinie *ed* gleich 18, die ganze Linie *ef* aber ist der Kreisdurchmesser. Wie nun in den allgemeinen Lehrsätzen gezeigt wurde, ist klar, dass das Produkt aus der Geraden *ed* und der Geraden *df*, welche die erste zum Durchmesser ergänzt, gleich dem Produkte der Geraden *dc* mit sich selbst ist, denn es sind zwei Gerade, welche sich innerhalb desselben Kreises schneiden, und deren eine durch den Mittelpunkt gezogen ist. Wenn man also die Linie *dc* mit sich selbst vervielfacht und das entstehende Quadrat durch die Gerade *ed* theilt, so kommt die Linie *df*, und sie wird gleich 2 Ellen sein. Die ganze Gerade *ef* wird daher 20, und ihre Hälfte ist *ae* und der Diagonale *ac* des Rechteckes gleich. Diese enthält also 10 Ellen, und es bleiben für die unbekannte Seite *ad* 8 übrig, wie man in der nebenstehenden Figur sehen kann.

18. Wenn ferner gefragt würde: *Wieviel Ellen fasst jede Seite eines Rechteckes, dessen Diagonale 13 Ellen, der Inhalt aber 60 beträgt?*, so fände man nach Verdoppelung des Inhaltes 120. Zieht man das von dem Quadrate der vorgenannten Diagonale, nämlich 169, ab, so bleibt 49. Als dessen Wurzel findet man 7, und das ist der Unterschied, der zwischen den beiden Seiten des Rechteckes enthalten ist. Nach Halbierung desselben und Quadrierung der Hälfte beträgt das Ergebnis $12\frac{1}{4}$. Addiert man das zu dem Inhalte des Rechtecks, so kommt $72\frac{1}{4}$. Nimmt man hiervon die Wurzel, die $8\frac{1}{2}$ beträgt, und fügt sie zu der Hälfte des vorgenannten Überschusses, das ist zu $3\frac{1}{2}$, hinzu, so erhält man 12, und das ist die Länge des gesuchten Rechtecks.[1])

19. Nachdem so die Aufgaben über das Rechteck beendigt sind, müssen wir Aufgaben über den Rhombus behandeln.

Wieviel Ellen wird also die Seite eines Rhombus enthalten, dessen eine Diagonale 16, die andere aber 12 Ellen umfasst?

Auflösung. Wenn man die Hälfte jeder Diagonale mit sich selbst vervielfacht und die beiden entstehenden Quadrate addiert, dann die Wurzel der Summe sucht, so findet man die Seite des Rhombus. Die Hälfte von 16 ist nämlich 8, ihr Quadrat ist 64; die Hälfte von 12 ist 6, ihr Quadrat 36. Diese beiden Quadrate machen zusammen 100. Davon ist die Wurzel 10, und das ist die gesuchte Seite des Rhombus.[2])

---

wie früher rechnen: $(x-y)^2 = a^2 - 2b$; $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$; $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$; $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$.

2) Leonardo 74, 19. Es ist: $s^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$.

20. *Item rhumbus est, ⟨cuius⟩ embadum 96, alterumque duorum diametrorum 16 continet. Quot in altero diametro mensuras habebit?*

Huius quidem quaestionis modus solvitur sic. Si 96, quod est embadum, per diametri quantitatem, quod est 16, divideris, et quod ex divi-
5 sione exierit, duplicaveris, sex etenim, quod est alterius diametri dimidium, ex divisione proveniet, cuius duplum 12 reddit, quod est alterum diametrum.

21. Hac autem quaestiones et consimiles quaestionibus in figuris parte altera longioribus enarratis assimiliantur, quarum demonstrationes ex demon-
10 strationibus in quaestionibus illis explanatis attrahuntur.[1])

His igitur breviter explicatis, priusquam rhumboidum et obliquarum figurarum dimensiones ostendamus, ad triangulorum mensuras, quibus istarum figurarum embada facile demonstrantur, transitum faciamus.

Explicit secundi capituli pars prima,
15 *incipit secunda ⟨in⟩ triangulorum dimensionibus.*

1. Quoniam, ut in huius libri exordio monstratur, triangulorum quidam sunt aequilateri, quidam sunt aequicrurii, quidam vero diversorum laterum, primum aequilaterorum dimensiones explanemus; et ipsi sunt, quorum omnes anguli acuti sunt et sibimet invicem aequales.

20 **2.** *Cuiuslibet autem triangulorum embadum est totius perpendicularis ipsius in eiusdem basis dimidium, vel totius basis in perpendicularis dimidium multiplicatio,* quapropter perpendicularis ⟨quantitatem⟩, quae a puncto sui casus supra basim addiscitur, adinveniamus oportet.[2]) Et quia istorum triangulorum latera sibimet sunt aequalia, eorum perpendiculares supra
25 suarum basium dimidium cadere necesse est, ideoque, si unum latus in se ipsum duxeris, et ex collecto multiplicationem dimidii eiusdem lateris abstuleris, residuique radicem acceperis, quantitatem perpendicularis incontanter invenies.

Ad cuius evidentiam esto triangulus *abc* (Fig. 13), cuius unumquod-
30 que latus 10 ulnas contineat. Istius itaque trianguli aream si nosse desideras, unum latus, quod est 10, in se ipsum multiplicans 100 invenies. De quibus si quinarii, quod est eiusdem lateris dimidium, multiplicationem,

---

1 cuius *fehlt.* — 3 sic] silicet. — 4 divideris *B*, dividens *A*. — 11 Hiis *und so immer.* — rumbonum *A*. — 16—17 quaedam *dreimal.* — 20 est embadum est. — 21 perpendiculariter *B*. — 22 quantitatem *fehlt.* — 23 basem *A und so in den ersten zwei Kapiteln immer, dann* basim. — 24 supra] sunt. — 27—28 incontanter] eius tantum *A*. — 32 quod est] quoque.

---

1) Leonardo 74, 21. 2) Leonardo 30, 43 und 34, 4.

20. Ferner: *Es ist ein Rhombus gegeben, dessen Inhalt 96, und die eine der beiden Diagonalen 16 enthält. Wieviel Maasseinheiten besitzt die andere Diagonale?*

Die Lösung dieser Frage ergiebt sich in folgender Weise, dass man nämlich 96, das ist den Inhalt, durch die Länge der Diagonale, also 16, dividiert, das Ergebnis der Division aber verdoppelt. Aus der Division ergiebt sich nämlich 6, das ist die Hälfte der zweiten Diagonale, und das Doppelte liefert 12, das ist die andere Diagonale.

21. Diese und gleichartige Fragen sind denen ähnlich, welche bei den Rechtecken dargelegt sind; ihre Beweise werden den Beweisen gemäss geführt, die bei jenen Aufgaben auseinandergesetzt sind.[1])

Nachdem dies also in Kürze dargelegt ist, werden wir, bevor wir die Ausmessung der Rhomboide und der andern schiefwinkligen Figuren zeigen, zu der Ausmessung der Dreiecke übergehen, durch welche die Inhalte dieser Figuren leicht gefunden werden können.

Ende des ersten Theiles des zweiten Kapitels
und Beginn des zweiten Theiles: Die Ausmessung der Dreiecke.

1. Da, wie im Eingange dieses Buches gezeigt ist, die Dreiecke in gleichseitige, in gleichwinklige und in ungleichseitige zerfallen, wollen wir zunächst die Ausmessung der gleichseitigen auseinandersetzen. Es sind dies solche, deren sämmtliche Winkel spitz und unter einander gleich sind.

2. *Der Inhalt jedes Dreiecks ist aber das Produkt der ganzen Höhe mit der Hälfte der Grundlinie desselben, oder das der ganzen Grundlinie mit der Hälfte der Höhe.*

Wir müssen daher den Betrag der Höhe, welche durch den Endpunkt ihrer Projektion *(casus)* auf die Grundlinie gefunden wird, bestimmen.[2]) Da nun die Seiten dieser Art Dreiecke unter einander gleich sind, so müssen ihre Höhen in die Mitten ihrer Seiten eintreffen. Wenn man also eine Seite mit sich selbst vervielfacht, und von dem Ergebnis das Quadrat der Hälfte derselben Seite abzieht, von dem Reste aber die Wurzel nimmt, so findet man ohne Weiteres die Länge der Höhe.

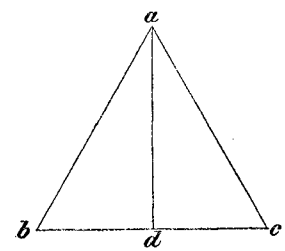


Fig. 13.

Zum Augenscheine sei das Dreieck *abc* (Fig. 13) gegeben, von welchem jede Seite 10 Ellen enhält. Will man also dieses Dreiecks Flächeninhalt finden, so multipliciert man eine Seite, das ist 10, mit sich selbst, und findet 100. Zieht man hiervon das Quadrat von 5, der Hälfte der Seite, nämlich 25 ab, so bleiben 75,

quae est 25, subtraxeris, 75 remanebunt, quorum radix perpendicularis quantitatem indicat. Multiplicatio radicis 75, quae 8 et modicum minus duabus tertiis in se continet[1]), in 5, quod est 43 et parum minus una tertia, trianguli embadum complet, et haec est figura.[2])

3. *Si metiendi notitiam prope veritatem habere desideras, ex quolibet istorum triangulorum latere duas partes de 15 demas, et reliquum erit perpendicularis.*

4. *Item si adhuc non tam multum a veritate recedens metiendi cupis habere scientiam, omnem | aequilateri trianguli aream tertiam partem quadrati* 9
cuiuslibet lateris ipsius et insuper eius decimam continere cognosces.[3])

5. Hac quidem praefatae regulae non nisi in triangulis aequilateris locum habere debent. Universalis autem triangulorum regula est, quod *multiplicatio totius perpendicularis in eiusdem basis dimidium, vel totius basis in perpendicularis dimidium trianguli embadum complet.*[4])

Et ut demonstratio, quod in triangulis aequilateris ex multiplicatione totius perpendicularis in eiusdem basis dimidium ⟨embadum⟩ procedit, ostendatur, triangulus aequilaterus abc (Fig. 14), cuius perpendicularis sit ad, proponatur, supra cuius punctum c linea ce aequidistans et aequalis lineae ad orthogonalis constituatur. Quo facto linea ae dirigatur, eritque parte ⟨altera⟩ longior $adce$, cuius duo latera sibimet invicem sunt aequalia perpendiculari ad, ce; reliqua vero duo latera sunt dimidium basis, quod est cd et linea ae, aequales. Haec autem parte altera longior est multiplicatio perpendicularis in eiusdem basis dimidium, et maximo triangulo abc aequatur, eo quod minor triangulus adc dimidium parte ⟨altera⟩ longioris amplectitur, et ipse idem est medietas trianguli abc. Triangulus igitur abc parte altera longiori $adce$, quae ex multiplicatione totius perpendicularis in eiusdem basis dimidium efficitur, erit aequalis, ut in hac figura monstratur.[5])

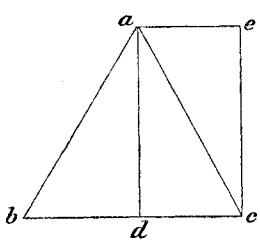


Fig. 14.

6. Item quaerenti, utrum totius basis in perpendicularis dimidium multiplicatio trianguli embadum efficiat, sic respondeas.

Multiplicatio cuiuslibet medietatis in quamlibet aliam lineam est multiplicatio totius eiusdem lineae in illius alterius lineae dimidium. Quod, licet

---

2 quae est 8. — 3 minus parum. — 4 embadus. — 5 In metiendi. — 15 quod] quae *B*. — 16 dimidium procede. — 21 altera *fehlt*. — 29 quae] quod *A*, qui *B*. — 30 hac] has *A*, hiis *B*.

und die Wurzel davon giebt die Länge der Höhe an. Das Produkt aus der Wurzel, die 8 und um eine Kleinigkeit weniger als $\frac{2}{3}$ beträgt[1]), und 5, also 43 und um etwas weniger als $\frac{1}{3}$, macht den Inhalt des Dreiecks aus, und das ist die zugehörige Figur.[2])

3. *Will man die näherungsweise Kenntnis der Ausmessung haben, so ziehe man von jeder Seite solches Dreiecks* $\frac{2}{15}$ *ab, dann ist der Rest die Höhe.*

4. *Will man in ähnlicher Weise nicht weit von der Wahrheit sich entfernend die Ausmessung desselben finden, so beachte man, dass der Flächeninhalt jedes gleichseitigen Dreiecks ein Drittel plus ein Zehntel* $\left(\frac{13}{30}\right)$ *des Quadrates einer Seite enthält.*[3])

5. Diese beiden ebengenannten Regeln haben jedoch nur für das gleichseitige Dreieck Gültigkeit. *Die allgemeine Regel für Dreiecke ist aber, dass das Produkt der ganzen Höhe mal der Hälfte der Grundlinie, oder der ganzen Grundlinie mal der Hälfte der Höhe den Flächeninhalt eines Dreiecks ausmacht.*[4])

Damit nun bewiesen werde, dass in jedem gleichseitigen Dreiecke der Inhalt aus dem Produkte der ganzen Höhe mit der Hälfte der Grundlinie sich ergiebt, sei das gleichseitige Dreieck abc (Fig. 14), dessen Höhe ad ist, gegeben. Im Punkte c desselben werde die Gerade ce parallel und gleich der Geraden ad senkrecht errichtet, und darauf die Gerade ae gezogen, dann entsteht das Rechteck $adce$. Von ihm sind die beiden einander gleichen Seiten ad, ce der Höhe gleich, die beiden andern Seiten aber, nämlich cd und ae, betragen jede die Hälfte der Grundlinie. Dieses Rechteck ist also gleich dem Produkte der Höhe mal der Hälfte der Grundlinie desselben und ist auch gleich dem grösseren Dreiecke abc. Denn das kleinere Dreieck adc enthält die Hälfte des Rechtecks und ist zugleich die Hälfte des Dreiecks abc. Das Dreieck abc ist also dem Rechtecke $adce$ gleich, das durch Multiplikation der ganzen Höhe mit der Hälfte der Grundlinie entsteht, wie in der beigegebenen Figur gezeigt wird.[5])

6. Will man aber wissen, ob wirklich das Produkt aus der ganzen Grundlinie und der Hälfte der Höhe den Inhalt des Dreiecks ergiebt, so beachte man, *dass das Produkt der Hälfte einer beliebigen Geraden mit einer beliebigen andern Geraden dem Produkte der ganzen ersten Linie mit der Hälfte der andern gleich ist.* Obwohl dieses allgemein von allen Grössen

---

1) $\sqrt{75} \sim 8\frac{2}{3}$ nach der Formel:

$$\sqrt{a^2 - b} \sim a - \frac{b}{2a} \text{ für } a = 9,\ b = 6.$$

2) Leonardo 34, 16 bis auf das Zahlenbeispiel.

3) Leonardo 34, 26. Beide Rechnungen kommen auf den bekannten Näherungswerth $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ heraus. 4) Leonardo 34, 4. 5) Leonardo 34, 40.

ab omnibus generaliter deprehendatur, tamen si geometricales demonstrationes super hoc investigare desideras, praedicti trigoni figuram, prout fuerat, informando (Fig. 15), eius perpendicularem *ad* lineam in duo aequa supra punctum *e* partire. Ad cuius utraque parte linea *gbehf* aequalis et aequi-
5 distans lineae *cb* protrahatur. Post haec a puncto *g* ad punctum *b* linea *bg*, a puncto vero *f* ad punctum *c* linea *fc* dirigatur, eritque parte altera longior *bcfg*, quod est totius basis in perpendicularis dimidium multiplicatio. Duae namque lineae *cf*, *bg*, quibus ipsius latitudo formatur, lineae *de*, quae perpendicularis dimidium continet, aequantur, eiusdemque longitudinem
10 basis *bdc* perficit. Haec autem parte altera longior triangulo *abc* existit aequalis. Nam triangulus *cfh*, qui extra maiorem triangulum formatur, triangulo *ahc* | aequatur, ipsa enim eorum latera sunt ad invicem aequalia. 9′
Triangulus vero *gbl* exterior ex altera parte formatus triangulo *ael* interiori aequus existit. Igitur, quia duo exteriores trianguli duobus interiori-
15 bus aequantur, erit totus triangulus *abc* parte altera longiori aequalis, et haec est figura.[1]) Haec quidem est demonstratio multiplicationis.

7. *Item in triangulis aequilateris si perpendicularis noticiam habueris, laterum autem noticiam ignoraveris, perpendicularem in se ipsam multiplicans eius multiplicationi tertiam multiplicationis partem superadde, totiusque col-*
20 *lecti radicem accipiens trianguli latus invenies.*

Cuius nempe demonstratio non ignoratur, eo quod in his triangulis aequilateris perpendicularis linea radix trium quartarum totius multiplicationis unius lateris in se ipsum existit, cumque illis tribus quartis tertiam partem superaddideris, primam quantitatem, quae est unius lateris multipli-
25 catio in se ipsum, perficies.

8. *Si trianguli aequilateri aream ex sola linea perpendiculari nosse desideras, perpendicularem in se ipsam multiplicans quinque multiplicationis novenas et insuper quintam unius novenae partem accipe, et trianguli aream reperies.*

30 Ut si ponamus exempli causa triangulum aequilaterum, cuius perpendicularis est radix de 75. Quam cum in se ipsam duxeris, 75 colligentur. Quinque vero novenae praedictorum 75 et quinta unius novenae 43 et tertiam reddunt, quod est trianguli area.

Huius quippe demonstratio patebit, si praedictae regulae, qua dicitur,
35 quod multiplicatio perpendicularis in semet tres quartas multiplicationis

---

4 lineam. — aequalem. — 4—5 aequidistantem. — 9 aequatur. — 12 ipsi enim eorumque. — 13 extereor *A*. — 16 Hic. — Haec ... multiplicationis *ist in A und B als Kapitelüberschrift behandelt.* — 19 tertia. — parte. — 24 superaddens *A*.

gilt, so zeichne man, um einen geometrischen Beweis dafür zu erhalten, die Figur des vorgenannten Dreiecks, so wie sie vorher war (Fig. 15), nochmals und halbiere die Höhe *ad* im Punkte *e*. Von ihm aus ziehe man nach beiden Seiten die Gerade *glehf* gleich und parallel der Geraden *cb*, dann verbinde man den Punkt *g* mit dem Punkte *b* durch die Gerade *bg*, und den Punkt *f* mit dem Punkte *c* durch die Gerade *fc*, so entsteht das Rechteck *bcfg*, welches das Produkt aus der ganzen Grundlinie und der Hälfte der Höhe darstellt. Die beiden Geraden *cf*, *bg*, welche die Breite desselben bilden, sind nämlich der Geraden *de*, das ist der halben Höhe gleich, die Länge stellt aber die Grundlinie *bdc* dar. Dieses Rechteck ist nun dem Dreiecke *abc* gleich, denn das Dreieck *efh*, das ausserhalb des grossen Dreiecks liegt, ist dem Dreiecke *ahe* gleich, denn ihre Seiten sind einander gleich; das Dreieck *gbl* aber, das auf der andern Seite ausserhalb liegt, ist dem inneren Dreiecke *ael* gleich. Da also die beiden äusseren Dreiecke den beiden inneren gleich sind, ist auch das ganze Dreieck *abc* dem Rechtecke gleich, und das ist die zugehörige Figur.[1]) Das ist der Beweis für das Produkt.

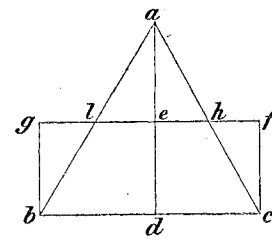


Fig. 15.

7. *Kennt man ferner in einem gleichseitigen Dreiecke die Höhe, es ist aber die Länge der Seite unbekannt, so multipliciert man die Höhe mit sich selbst und addiert dazu den dritten Theil des Produktes, dann erhält man, wenn man aus der Gesammtsumme die Wurzel zieht, die Seite des Dreiecks.*

Der Beweis dafür ist leicht zu führen, da in solchen gleichseitigen Dreiecken die Höhe gleich der Wurzel aus drei Viertheilen des Quadrates einer Seite ist, und da, wenn man den drei Viertheilen ihren dritten Theil hinzufügt, die ursprüngliche Grösse, das ist das Quadrat der Seite, wiederhergestellt wird.

8. *Will man den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks allein aus der Höhe bestimmen, so multipliciert man die Höhe mit sich selbst und nimmt von dem Produkte* $\frac{5}{9}$ *und* $\frac{1}{5}$ *eines Neuntel* $(\frac{26}{45})$, *und erhält dadurch den Inhalt des Dreiecks.*

Nehmen wir z. B. ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe die Wurzel aus 75 ist. Multiplikation derselben mit sich selbst giebt 75, $\frac{26}{45}$ dieser 75 sind $43\frac{1}{3}$, und das ist der Inhalt des Dreiecks.

Der Beweis dafür ergiebt sich, wenn man sich an die Regel erinnert, dass das Quadrat der Höhe drei Viertheile des Quadrates einer Seite aus-

1) Leonardo 35, 36.

unius lateris in se ipsum efficiat, ⟨non inmemor fueris. Et manifeste est, quod tertia pars multiplicationis unius lateris in se ipsum⟩ et eius insuper decima ⟨trianguli⟩ embadum complet. Ut autem proportionem multiplicationis perpendicularis ⟨in se ipsam⟩ ad embadi quantitatem addiscas, ⟨si huic tertiae decimaeque parti eorundem tertiam partem superadiunxeris, inde collectum quinque novenas unius et novenae quintam partem continebit, quod est proportio multiplicationis perpendicularis ad embadi quantitatem⟩.

9. Quaestionibus triangulorum aequilaterorum expletis triangulorum aequicruriorum quaestiones ostendamus.

Triangulus igitur aequicrurius est, cuius unum latus a reliquis duobus lateribus diversificatur, supra quod perpendicularis erigitur. Et licet supra quodlibet aliorum laterum erigi possit, tamen, qualiter supra hoc elevetur, hic ostendamus, cumque de diversilatero triangulo mentionem fecerimus, qualiter supra quodlibet latus erigitur, indicabimus.

10. *Modus itaque, quo perpendicularis in triangulo aequicrurio super hoc diversum latus elevetur, est,* ut alterum duorum aequalium laterum in se ipsum multiplices, et ex collecto medietatis basis multiplicationem abiciens residui radicem addiscas, quoniam ipsa est perpendicularis longitudo. Multiplicatio vero perpendicularis in basis dimidium trianguli embadum implet, ut in hoc triangulo, cuius duo ab, ac latera sibi invicem | sunt 10 aequalia, eiusque cathetus ad (Fig. 16), si latus ab vel ac et bd seu cd in se ipsum multiplicaveris, et multiplicationem bd vel cd ex multiplicatione ab vel ac proieceris, residuique radicem acceperis, erit ⟨illa⟩ perpendicularis ad longitudo. Perpendicularis vero ad in bd vel dc multiplicatio trianguli embadum efficit.[1])

11. *Si perpendicularis atque basis notitiam habueris et trianguli crura nosse desideras,* ut in quaestione, qua quaeritur de triangulo aequicrurio, cuius perpendicularis 12, basis vero 18 continet, quot in quolibet suorum crurium mensuras habeat, perpendicularem in se ipsum multiplicans 144 ⟨invenies⟩. Quibus si medietatis multiplicationem basis, quae est 81, superaddideris, 225 colligentur, quorum radix est 15, quod est cuiuslibet duorum crurium longitudo.

12. *Item si, trianguli aequicrurii, cuius singula crura 15, embadum*

1—2 non inmemor ... in se ipsum *auf dem Rande von A ausradiert.* — 3 trianguli *und* 4 in se ipsam *über der Zeile in A ausradiert.* — 4—7 si huic ... quantitatem *in A auf dem Rande ausradiert. B lässt* ad embadi *aus.* — 8 aequilaterum. — 9 aequiclurium *A.* — ostentamus *A.* — 10 Triangulum igitur aequicrurium. *Sonst ist* triangulus *stets als Masculinum gebraucht.* — unus. — 11 supra quod est. — 17 multiplicationes *A.* — balsis *A.* — 23 illa *fehlt.* — 30 invenies *in A über der Zeile ausradiert.*

macht. Es ist aber klar, dass $\frac{13}{30}$ des Quadrates einer Seite den Inhalt des Dreiecks ergeben. Um nun aber das Verhältnis des Quadrates der Höhe zum Inhalte des Dreiecks zu finden, so ist, wenn man zu jenen $\frac{13}{30}$ den dritten Theil desselben hinzufügt, die Summe gleich $\frac{26}{45}$, und das ist das Verhältnis des Quadrates der Höhe zu dem Flächeninhalte.

9. Nachdem so die Aufgaben über gleichseitige Dreiecke beendigt sind, wollen wir solche über gleichschenklige behandeln.

Ein gleichschenkliges Dreieck ist also ein solches, dessen eine Seite von den beiden andern Seiten verschieden ist; auf sie wird dann die Höhe gefällt. Obwohl sie auch auf jede der beiden andern Seiten gefällt werden kann, so werden wir doch hier nur zeigen, wie man die auf sie gefällte finden kann, und werden später, wenn wir vom ungleichseitigen Dreiecke handeln werden, angeben, wie man sie für jede Seite bestimmen kann.

10. *Die Art also, wie man die Höhe in einem gleichschenkligen Dreiecke auf der ungleichen Seite bestimmen kann, ist folgende:* Man multipliciert eine der beiden gleichen Seiten mit sich selbst, zieht von diesem Quadrate das Quadrat der halben Grundlinie ab, und sucht von dem Reste die Wurzel, sie ist nämlich die Länge der Höhe. Das Produkt der Höhe mit der Hälfte der Grundlinie ergiebt aber den Inhalt des Dreiecks.

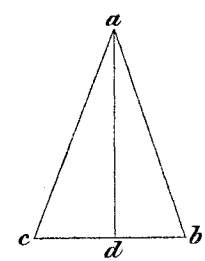


Fig. 16.

Wenn man z. B. in diesem Dreiecke, dessen beide Seiten ab, ac einander gleich sind, und seine Höhe ad (Fig. 16), die Seite ab oder ac und bd oder cd einzeln mit sich selbst vervielfacht, dann das Quadrat von bd oder cd von dem Quadrate von ab oder ac abzieht, und von dem Reste die Wurzel nimmt, so ist diese gleich der Länge der Höhe. Das Produkt der Höhe ad aber mit bd oder cd ergiebt den Inhalt des Dreiecks.[1])

11. *Kennt man die Länge der Höhe und der Grundlinie und wünscht die Schenkel des Dreiecks zu finden,* wie in der Aufgabe, in der gefragt wird, wieviel Maasseinheiten in jedem Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks enthalten sind, dessen Höhe 12, die Grundlinie aber 18 beträgt, so ergiebt sich aus der Multiplikation der Höhe mit sich selbst 144. Addiert man hierzu das Quadrat der Hälfte der Grundlinie, das ist 81, so erhält man als Summe 225. Davon ist die Wurzel 15, und das ist die Länge jedes der beiden Schenkel.

12. *Wird ferner gefragt, wieviel Ellen die Grundlinie eines gleich-*

1) Leonardo 34, 29.

autem 108 continent, quot ulnarum basis exstiterit, quaesitum fuerit, embadi quantitatem duplicans 216 invenies. Quod si ex unius cruris multiplicatione, quod est 225, proieceris, 9 remanebunt, cuius summae radicem, quae est trium ulnarum, accipe, et ipsa est superfluum, quod inter basis dimidium et perpendicularem continetur. Huius quippe superflui dimidium, quod est unius et dimidii summa, si in se ipsum duxeris, 2 et quartam reperies. Quod si embadi summae superadiunxeris, inde collectum 110 et insuper quartam efficiet, cuius numeri radix 10 cum semisse continebit. Qui si praedicti superflui dimidium ⟨adhibueris, 12 coadunabuntur, et hoc est quantitas perpendicularis, si vero superflui dimidium⟩ ex ea depresseris, 9 relinquentur, quod est basis dimidium.

Harum autem quaestionum demonstrationes ex demonstrationibus, quas in parte altera longiori docuimus, si subtiliter ingenium adhibueris, abstrahere poteris.

13. Inde modis et trianguli aequicrurii et figurae parte altera longioris explicatis diversilateri trianguli embadum demonstremus.

Triangulorum itaque diversorum laterum alii sunt *rectianguli,* alii autem *ampligonii,* alii autem *oxigonii,* et nos prius oxigonii embadum indicabimus. Ad cuius doctrinam esto triangulus *abc* (Fig. 17), cuius latus *ab* 13, latus vero *bc* 14, latus autem *ac* 15 ulnas contineat. Istius itaque trianguli embadum scire volens, cum hoc nullatenus nisi per eius perpendicularem investigari possit, locum in quem perpendicularis incidit, adiscas. In hoc enim triangulo perpendicularis non, ut in aequilateris et aequicruriis, cum perpendicularis inter eius dimidia supra diversum latus erigitur, evenire consuevit, supra basium | dimidium cadet. In hoc vero 10′
triangulo perpendicularis a dimidio basis versus alterum partem in omnibus lateribus declinat, longiorque pars *casus longior,* brevior vero *brevior casus* nuncupatur. Quapropter punctum casus perpendicularis supra basim, et cui duorum laterum longior casus coniungatur, et cuius etiam quantitatis existat, nec non et cui duorum laterum brevior casus adhaereat, cuiusve sit quantitatis, inveniamus oportet. Quibus subtiliter inquisitis perpendicularis ⟨longitudinem⟩ ostendamus.[1])

---

1 contiunent. — 6 quatratem. — 8 quadrantem. — 9—10 adhibueris . . . dimidium *in A auf dem Rande ausradiert.* — 15 Inde et modus est. — figurae] fugire *A.* — 16 explicatis . . . demonstremus *in A und B als Kapitelüberschrift behandelt.* — 18 exigonii *A und so immer.* — embadus. — 21 embadus *A.* — 27 brevior casus] brevioris vero. — 32 longitudinem *fehlt.*

---

1) Leonardo 35, 1.

schenkligen Dreiecks misst, dessen Schenkel je 15, der Inhalt aber 108 enthält, so findet man zunächst durch Verdoppelung des Inhaltes 216. Zieht man das von dem Quadrate eines Schenkels, das ist von 225, ab, so bleiben 9 übrig. Hiervon nehme man die Wurzel, die 3 Ellen beträgt, dann ist sie der Überschuss zwischen der Hälfte der Grundlinie und der Höhe. Multipliciert man nun die Hälfte dieses Unterschiedes, also $1\frac{1}{2}$, mit sich selbst, so findet man $2\frac{1}{4}$. Das addiert man zu dem Inhalte, so beträgt die Summe $110\frac{1}{4}$, und die Wurzel daraus ist $10\frac{1}{2}$. Zählt man dies zu der Hälfte des obengenannten Unterschiedes, so kommen 12, das ist die Länge der Höhe, zieht man aber den halben Unterschied von der Wurzel ab, so bleiben 9, das ist die Hälfte der Grundlinie.

Die Beweise dieser Aufgabe kann man aus den Beweisen, die wir für die Rechtecke lehrten, entnehmen, wenn man seinen Geist ein wenig anspannt.

13. Und da nun die Aufgaben für die gleichschenkligen Dreiecke und die Rechtecke auseinandergesetzt sind, wollen wir lehren, den Inhalt der ungleichseitigen Dreiecke zu bestimmen.

Von den ungleichseitigen Dreiecken sind die einen *rechtwinklig,* die andern *stumpfwinklig,* die dritten *spitzwinklig.* Wir wollen zunächst angeben, den Inhalt der spitzwinkligen zu finden. Dazu habe man ein Dreieck *abc* (Fig. 17), dessen Seite *ab* 13, die Seite *bc* 14, die Seite *ac* aber 15 Ellen enthält. Da nun, wenn man den Inhalt dieses Dreiecks kennen lernen will, dieser nur vermittelst der Höhe desselben gefunden werden kann, so muss man den Fusspunkt der Höhe bestimmen. In solchen Dreiecken fällt nämlich die Höhe nicht, wie es bei den gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecken zu geschehen pflegt, bei welchen die Höhe in der Mitte der ungleichen Seite errichtet ist, auf die Mitte der Grundlinie, sondern die Höhe weicht in diesen Dreiecken von dem Halbierungspunkte der Grundlinie nach einer Seite ab, und zwar für alle Dreiecksseiten. Den grössern Theil nennt man den *grössern Höhenabschnitt* (maior casus), den kleinern aber den *kleinern Höhenabschnitt* (minor casus). Wir müssen also den Fusspunkt der Höhe auf der Grundlinie bestimmen, sowie, welcher der beiden Seiten der grössere Abschnitt zugehört und seine Länge, ebenso, welcher der beiden Seiten der kleinere Abschnitt anliegt und wie gross seine Länge ist, auffinden. Ist das genau gefunden, so werden wir die Länge der Höhe bestimmen können.[1])

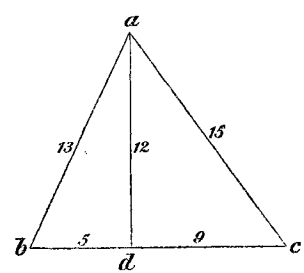


Fig. 17.

In praedicto igitur triangulo *abc* sint ipsius duo latera *ab*, *ac*, perpendicularis ⟨*ad*⟩ supra basim *bc*, cuius longitudo est 14. Cum invenire volueris punctum ipsius casus per longiorem vel breviorem casum, prius invenias longiorem. Itaque casum invenire desiderans multiplicationem longioris duorum laterum illi angulo adiacentium, a quo perpendicularis abstrahitur, accipe, et ipsum est latus *ac*, cuius longitudo 15, cui multiplicationi totius basis multiplicationem superadde, indeque collectum erit 421. De cuius summa si reliqui lateris *ab* multiplicationem abstuleris, quod est latus brevius, cuius multiplicatio est 169, remanebit 252. Quae si in duo aequa diviseris, 126 exibit. Huius autem numeri summa si per basis quantitatem, quae est 14, divisa fuerit, 9 in divisione provenient, et haec ⟨est⟩ summa longitudinis casus perpendicularis a latere longiori. Quod si breviorem casum nosse volueris, multiplicationem brevioris lateris cum multiplicatione basis addiscens 365 nimirum invenies. De quibus longioris lateris multiplicatione dempta, quae est 225, relinquentur 140, quae si in aequalia duo diviseris, 70 reperies. Cuius numeri summam per basis quantitatem partire, ⟨et⟩ exibit 5, quod est remotio illius puncti, in quem cadit perpendicularis, a latere breviori. Hoc idem similiter in unumquodque latus, supra quod perpendicularis abstrahitur, operabis.[1])

14. *Cognito igitur puncto casus, perpendicularis longitudinem sic invenias.* Alterum quidem duorum laterum in se ipsum multiplicans ex inde collecto multiplicationem illius casus longioris vel brevioris, qui ei adiacet, deme, residuique radicem inveniens perpendicularis longitudinem incontanter habebis. Veluti si exempli causa brevius istius trianguli latus *ab*, quod est 13, in se ipsum multiplicaveris, 169 reperies. De quibus si brevioris casus, qui est 5, multiplicationem, quae est 25, proieceris, 144 relinquuntur, cuius summae radix est 12, et ipse est perpendicularis longitudo. Similiter si longius latus in se ipsum duxeris, et ex collecto multiplicationem longioris casus abstuleris, ad eandem perpendicularis longitudinem pervenies.[2])

15. *Perpendicularis autem,* | *quae est 12, multiplicatio in basis dimidium,* 11
quod est 7, 84 efficiet, quod est huius trianguli embadum.

16. Praedictorum autem demonstrationes si nosse cupis, scias, latus *ab*, quod acuto subtenditur angulo, tanto duobus quadratis a lateribus *ac*, *bc* acutum angulum continentibus descriptis minorem quadratum constituere, quantum est duplum rectilinei, quod sub uno eorum, quae acuto adiacent

---

2 *ad fehlt.* — 12 est *fehlt.* — a latere] altere. — 15 multiplicationem. — 17 et *fehlt in A.* — 23 invenies.

---

1) Leonardo 35, 5. 2) Leonardo 35, 27.

Im vorgenannten Dreiecke seien die beiden Seiten *ab*, *ac*, die Höhe *ad* auf der Grundlinie *bc*, deren Länge 14 ist. Da wir den Fusspunkt derselben mittelst des grössern oder kleinern Höhenabschnittes finden wollen, werden wir mit dem grössern beginnen. Um diesen Abschnitt zu finden, nehme man das Quadrat der grössern der beiden dem Winkel anliegenden Seiten, von welchem aus die Höhe gezogen ist, das ist die Seite *ac* von 15 Ellen Länge. Zu diesem Quadrate addiere man das Quadrat der ganzen Grundlinie, die Summe wird dann 421 sein. Zieht man von dieser Summe das Quadrat der noch übrigen Seite ab, das ist der kleinern Seite *ab*, und dieses Quadrat ist 169, so bleibt 252 übrig. Halbiert man das, so erhält man 126. Diese Zahl durch die Länge der Grundlinie, nämlich 14, dividiert, ergiebt 9 im Quotienten, und das ist die Länge des Höhenabschnittes von der längern Dreiecksseite aus. Will man den kleinern Abschnitt bestimmen, so sucht man die Summe der Quadrate der kleinern Seite und der Grundlinie und erhält 365. Davon bleibt nach Abzug des Quadrates der grössern Seite, das ist 225, noch 140 übrig, und halbiert man dieses, so findet man 70. Diese Zahl dividiert man durch die Länge der Grundlinie und findet so 5, und das ist die Entfernung des Fusspunktes der Höhe von der kleinern Dreiecksseite. In derselben Weise wird man für jede Seite, auf welche die Höhe gefällt wird, verfahren.[1])

14. *Da man so den Fusspunkt kennt, findet man die Höhe selbst folgendermaassen.* Die eine der beiden Seiten multipliciert man mit sich selbst, von diesem Quadrate subtrahiert man dann das Quadrat des längern oder kürzern Abschnittes, der ihr anliegt, und sucht von dem Reste die Wurzel, so erhält man dadurch unverweilt die Länge der Höhe. Vervielfacht man z. B. die kürzere der beiden Seiten *ab* obigen Dreiecks, das ist 13, mit sich selbst, so findet man 169. Zieht man hiervon das Quadrat des kleinern Abschnittes, der 5 war, ab, also 25, so bleiben 144 übrig. Die Wurzel davon ist 12, und soviel beträgt die Länge der Höhe. Man würde ebenso zu derselben Höhenlänge gelangen, wenn man von dem Quadrate der längern Seite das Quadrat des längern Höhenabschnittes wegnehmen würde.[2])

15. *Das Produkt der Höhe aber, das 12 ist, mit der Hälfte der Grundlinie, das ist 7, giebt 84, und das ist der Inhalt dieses Dreiecks.*

16. Um aber den Beweis der vorhergehenden Rechnungen führen zu können, muss man wissen, dass das über der Seite *ab*, die einen spitzen Winkel überspannt, stehende Quadrat um soviel kleiner ist als die beiden über den Seiten *ac*, *bc*, welche dem spitzen Winkel anliegen, beschriebenen Quadrate, als das doppelte Rechteck beträgt, das zwischen der einen Seite,

angulo, ⟨latere⟩ constituitur, cui etiam perpendicularis superstat, et ipsa est *bc*, et casu sui parte *cd*, quae intra perpendicularem et acutum angulum continetur, ut in geometria monstratur. Quapropter, si ex duobus quadratis a lateribus *ac*, *bc* descriptis quadratus, ⟨qui⟩ a latere *ab* con-
5 tinetur, dematur, duplum rectilinei sub lineis *cd*, *bc* constituti remanebit. Quod si in duo aequa diviseris, et alteram divisionis partem in basis *bc* quantitatem partitus fueris, invenies lineam *cd* perpendicularis casum existere. Et quia perpendicularis secundum rectum angulum elevatur, erunt duo trianguli *abd*, *adc* rectianguli; quadratus igitur, qui a latere *ab* recto
10 angulo ⟨subtenso⟩ describitur, aequus est duobus quadratis, qui a lateribus *bd*, *ad*, rectum angulum continentibus conformantur, ut geometria declarat. Quare si ex quadrato *ab* quadratum longitudinis lineae *bd* depresseris, remanebit quadratus perpendicularis *ad*. Eadem etiam erit demonstratio in quadrato *ac* cum quadrato longitudinis *cd* et quadrato perpendicularis *ad*.

15 17. *Item longiorem casum atque breviorem aliter invenire poteris.* Nam si utrumque duorum laterum angulo, a quo perpendicularis in basim abstrahitur, adiacentium in se ipsum duxeris, et ex multiplicatione maioris minoris multiplicationem abstuleris, residuique dimidium assumpseris et per totius basis summam diviseris, quod ex divisione proveniet, si ex basis di-
20 midio depresseris, breviorem casum, si vero eiusdem basis dimidio superaddideris, longiorem casum invenies. Ut si in suprascripta figura latus *ab*, cuius longitudo 13, e lateribus angulo, a quo perpendicularis educitur, adiacentibus in se ipsum multiplicaveris, 169 reperies. Si vero latus *ac*, cuius longitudo 15, in semet duxeris, 225 provenient. Cumque multiplica-
25 tionem minoris de multiplicatione maioris abstuleris, 56 relinquentur, cuius summae dimidium 28. Quae si per summam basis *bc*, quae est 14, diviseris, duo exibunt. Hoc autem si dimidio basis, quod est 7, superaddideris, 9 colligentur, et hoc est casus longior; si vero ⟨ex⟩ eodem septenario depresseris, 5 supererit, quod est casus brevior. Vel, si volueris, illa 56,
30 quae tibi remanserunt, per basis summam partire, et exibit 4, quae si totius summae basis super|addideris, 18 coadunabitur, quorum medietas 9 reddunt, 11′
et hoc est longior casus. Si autem ex basi minueris, 10 relinquentur, cuius summae dimidium, quod est 5, breviorem casum efficit.[1])

---

1 latere *fehlt.* — 4 qui *fehlt.* — 4—5 continentur. — 6 altera. — 10 subtenso *fehlt.* — 12 Quare si] quaerens. — 18 multiplicationis. — 21 suprascriptam figuram. — 25 66. — 26 summa. — 30 basim.

---

1) Leonardo 35, 23.

welche dem spitzen Winkel anliegt, und auf welcher die Höhe steht, und das ist *bc*, und dem anliegenden Höhensegment *cd*, das ist dem zwischen der Höhe und dem spitzen Winkel gelegenen, enthalten ist, wie in der Geometrie ⟨EUKLID's⟩ bewiesen wird. Nimmt man also von den beiden Quadraten, die über den Seiten *ac*, *bc* beschrieben sind, das Quadrat, das über der Seite *ab* steht, weg, so bleibt das doppelte Rechteck aus den Geraden *cd*, *bc* übrig. Theilt man dieses in zwei gleiche Stücke und dividiert die eine Hälfte durch die Länge der Grundlinie, so findet man die Länge der Geraden *cd*, die das Höhensegment bildet. Da nun die Höhe senkrecht errichtet ist, so sind die beiden Dreiecke *abd*, *adc* rechtwinklig, also das Quadrat über der Seite *ab*, welche den rechten Winkel überspannt, gleich den beiden Quadraten, welche über den beiden Geraden, die dem rechten Winkel anliegen, gebildet werden, wie die Geometrie zeigt. Nimmt man also von dem Quadrate *ab* das Quadrat der Linie *bd* hinweg, so bleibt das Quadrat der Höhe *ad* übrig. Für das Quadrat über *ac*, das Quadrat der Strecke *cd* und das Quadrat der Höhe *ad* würde ein ähnlicher Beweis zu führen sein.

17. *Den grössern und kleinern Höhenabschnitt könnte man auch auf andere Art bestimmen.* Wenn man nämlich jede der beiden Seiten, welche dem Winkel anliegen, von dem die Höhe auf die Grundlinie gefällt ist, mit sich selbst vervielfacht und von dem Quadrate der grössern das Quadrat der kleinern abzieht, und die Hälfte des Restes durch die ganze Länge der Grundlinie dividiert, so liefert der Quotient der Division von der Hälfte der Grundlinie subtrahiert den kleinern Höhenabschnitt, wenn man ihn aber zu der halben Grundlinie addiert, den grössern Höhenabschnitt. Multipliciert man z. B. in der obigen Figur die Seite *ab* von der Länge 13, die eine der Seite ist, welche dem Winkel, von dem die Höhe gefällt ist, anliegen, mit sich selbst, so ergiebt sich 169. Die Multiplikation der Seite *ac* von der Länge 15 mit sich selbst ergiebt ebenso 225. Subtrahiert man das Quadrat der kleinern vom Quadrate der grössern Seite, so bleibt 56 übrig, und die Hälfte davon ist 28. Diese Zahl durch die Grundlinie *bc*, das ist durch 14, dividiert, liefert 2, und wenn man das zu der halben Grundlinie, die 7 ist, hinzufügt, so findet man als Summe 9, das ist den längern Höhenabschnitt; wenn man es aber von 7 abzieht, so ist der Rest 5, und das ist der kleinere Abschnitt. Wenn man will, kann man auch die obigen 56, welche als Rest blieben, durch die Länge der Grundlinie theilen, dann erhält man 4. Dieses zu der ganzen Länge der Grundlinie addiert, erzeugt 18, und die Hälfte davon ergiebt 9, das ist den längern Abschnitt. Subtrahiert man aber 4 von der Grundlinie, so bleiben 10 als Rest, und die Hälfte davon, das ist 5, macht den kleinern Abschnitt aus.[1])

18. *Si basis trianguli diversilateri, cuius perpendicularis 12, alterumque latus a lateribus angulo, a quo cadit perpendicularis, adiacentibus 13, reliquum vero 15 habuerit, quot ulnarum exstiterit, quaeratur,* alterum latus, quod est 13, in se ipsum multiplicans 169 provenient. Ex quibus si perpendicularis multiplicationem, quae est 144, depresseris, 25 supererit, cuius numeri radix est 5, et hic est unus casus. Post hoc alterum latus in se ipsum multiplicans habebis 225, de quibus perpendicularis multiplicationem demens 81 remanebunt, quorum radix 9 alterum casum procurabit. Hi autem duo casus in unum coniuncti 14 reddunt, quod est basis longitudo.

19. Item quaeritur: *Triangulus diversilaterus, cuius embadum cum perpendiculari 96, basis vero sine perpendiculari 14 habuerit, quot in sui perpendicularis longitudine continet?*

Solutio. Si basis dimidium assumpseris et ei unum superaddideris, eo quod embadum in quaestione semel perpendiculari coniungetur, — nam si perpendicularis et embadum bis coniungentur, duo, si vero ter, tres, et ita per singula secundum coniunctionis numerum superaddens, semper etenim tot unitates dimidio basis superadicias, quotiens embadum perpendiculari coadunaveris —, et perinde in quem collectum summam perpendicularis et embadi in unum collectam partitus fueris, perpendicularis longitudinem invenies. Quemadmodum si secundum hanc quaestionem basim in duo aequa diviseris, 7 invenies, quibus uno superaddito 8 colligentur. Per quae si 96 divisa fuerint, 12 exibunt, quod est perpendicularis longitudo. Per hoc autem, quod hac in quaestione quaeritur, reliqua latera nullatenus sciri possunt, eo quod ad eandem basim relata diversarum quantitatum inveniri poterunt. Verum si unius lateris quantitas in quaestione ponatur, alterius lateris summa patebit.[1])

20. Huc usque omnium triangulorum embada secundum laterum diversitates ostendimus. Restat autem, ut secundum angulorum alterationes earum areas demonstremus. Eorum etenim quidam sunt *acutianguli,* quidam *rectianguli,* quidam vero *ampligonii.* Licet in acutiangulis nihil aliud quam, quod dictum est, dici possit, in rectiangulis et ampligoniis, si perpendicularis super unum ex lateribus recto vel obtuso adiacentibus angulo dirigatur, alia quaedam dicendo fore decernimus. Ut perfecta igitur metiendi

---

2 cadunt. — 8 demens] adiciens. — 10—11 perpendicularis qb. — 11 sine perpendicularis. — 20 Quem si ad modum. — hac quaestione.

---

1) Da allgemein $J = h \cdot \frac{a}{2}$ ist und als bekannt $J + nh$ angenommen wird, so ist also $h\left(\frac{a}{2} + n\right)$ gegeben. Durch Division mit $\frac{a}{2} + n$ folgt also h.

18. Wenn gefragt wird: *Wieviel Ellen hat die Grundlinie eines ungleichseitigen Dreiecks von der Höhe 12, dessen eine der beiden Seiten, welche den Winkel einschliessen, von dem die Höhe gefällt ist, 13, die andere aber 15 Ellen besitzt?,* so erhält man durch Multiplikation der einen Seite von der Länge 13 mit sich selbst 169. Zieht man hiervon das Quadrat der Höhe, das ist 144, ab, so bleibt 25 Rest, und die Wurzel davon ist 5; das ist der eine Höhenabschnitt. Dann vervielfacht man die andere Seite mit sich selbst und erhält 225, davon das Quadrat der Höhe weggenommen, bleibt 81 übrig, und die Wurzel 9 liefert den andern Abschnitt. Beide Abschnitte zusammengenommen ergeben 14, und das ist die Länge der Grundlinie.

19. Ferner werde gefragt: *Wieviel Maasseinheiten wird die Höhe eines ungleichseitigen Dreiecks enthalten, dessen Inhalt plus der Höhe 96, die Grundlinie aber für sich ohne die Höhe 14 enthält?*

Auflösung. Addiert man zu der Hälfte der Grundlinie die Einheit, weil nach der Aufgabe der Inhalt nur einmal mit der Höhe vereinigt wird — denn, wenn die Höhe zu dem Inhalt zweimal hinzugefügt würde, müsste man 2, wenn dreimal, 3 und so weiter nach der Anzahl der Hinzufügungen addieren, das heisst man muss stets soviel Einheiten der Hälfte der Grundlinie hinzuzählen, so oftmal die Höhe zu dem Inhalte hinzugefügt ist —, und dividiert dann durch die erhaltene Summe die Summe aus Inhalt und Höhe, so erhält man die Länge der Höhe. Wenn man also in der vorliegenden Aufgabe die Grundlinie halbiert, so findet man 7, dazu eins addiert giebt 8. Dividiert man hierdurch 96, so erhält man 12, und das ist die Länge der Höhe. Durch das in der Aufgabe Gegebene kann man aber die andern Seiten keineswegs auffinden, da sie für dieselbe Grundlinie von verschiedener Länge gefunden werden können. Kennt man aber in der Aufgabe die Länge noch einer Seite, so kann man auch die der andern Seite finden.[1])

20. Bis hierher haben wir die Auffindung der Flächeninhalte aller Dreiecke nach der Verschiedenheit der Seiten gezeigt. Es bleibt noch übrig, dass wir auch nach der Verschiedenheit der Winkel die Inhalte derselben zu finden lehren. Von ihnen sind nämlich einige *spitzwinklig,* andere *rechtwinklig,* noch andere *stumpfwinklig.* Wenn wir nun auch für die spitzwinkligen Dreiecke nichts anderes sagen könnten als das, was wir gesagt haben, so haben wir doch für die rechtwinkligen und stumpfwinkligen, falls die Höhe auf eine der beiden dem rechten oder stumpfen Winkel anliegende Seite gefällt werden soll, noch einiges andere zu erklären. Damit also in unserem Buche die vollständige Kenntnis der Ausmessung enthalten sei, werden wir die Inhaltsbestimmung der rechtwinkligen

cognitio in hoc libro contineatur, triangulorum orthogoniorum | embada, 12
prout possumus, et prius de orthogonio explanabimus.

21. *Trianguli igitur orthogonii proprie proprium est, ut ab eius uno latere recto angulo subtenso quadratus descriptus duobus quadratis sub reliquis lateribus recto adiacentibus angulo contractis semper aequatur.* Haec autem duo latera ⟨ad⟩ trianguli aream investigandam sufficiunt, nec aliunde, nisi unde volueris, cathetus est abstrahendus. Nam *multiplicatio unius duorum laterum recto angulo adiacentium in alterius lateris dimidium trianguli embadum complet,* eo quod utrumque istorum laterum trianguli cathetus existit.

22. Poteris etiam alium cathetum eligere, cui basis erit linea, quae recto angulo subtenditur. Praeter hunc autem alium cathetum in eo adaptare non est possibile: alia etenim latera pro cathetis locantur.

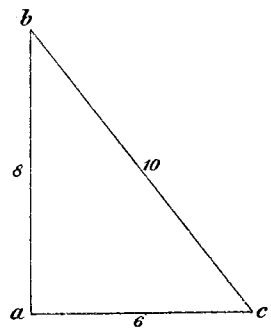


Fig. 18.

Ad huius similitudinem triangulus *abc* (Fig. 18) ponatur, cuius angulus *a* rectus existat, cui duo latera *ab*, *ac* sint adiacentia, eiusdem vero latus *bc* subtendatur, sitque lateris *ab* longitudo 8, lateris quoque *ac* 6, lateris vero *bc* 10 ulnarum. In hoc itaque triangulo quadratus lineae *bc* 100 ulnas continebit, et duobus quadratis a lateribus *ab*, *ac* descriptis aequatur. Alter etenim est 36, alter vero 64, in unum autem coadunati 100 ulnas efficiunt. Istius quidem trianguli latus *ab* si in dimidium lateris *ac* multiplicaveris vel e converso, exibit 24, quod est huius trianguli embadum.

23. In hoc autem triangulo si perpendicularem super lineam recto angulo subtensam elevare volueris, multiplicationem unius lateris ex alterius lateris multiplicatione basis coadunata deme, quemadmodum in triangulo acutiangulo et diversilatero monstravimus. Velut exempli causa si 64, quae sunt multiplicatio lateris *ab*, ex duabus multiplicationibus *ac*, *bc*, quae sunt 136, depresseris, 72 remanebunt. Cuius numeri dimidium sunt 36, quae super 10, quae sunt basis catheti quantitas, divisa fuerint, 3 et insuper tres quintas invenies, quod est casus brevior. Hoc autem si in se ipsum multiplicaveris, et quod inde proveniet, ex multiplicatione brevioris lateris abieceris, 23 et quinta quintae remanebunt, cuius summae radix 5 minus quinta continebit, et haec est perpendicularis quantitas. Quam si in basis dimidium, quod est 5, duxeris, embadum incontanter invenies.

24. Horum autem triangulorum duo sunt genera: aut enim erunt di-

---

6 ad *fehlt.* — 9 uterque. — 28 exemplicam *A.* — 30 dimidium] summa. — 32 quintas] quartas *A.* — 33 provenitur.

und stumpfwinkligen Dreiecke, soweit wir vermögen, darlegen, und zunächst wollen wir vom rechtwinkligen Dreiecke handeln.

21. *Die charakteristische Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks ist also, dass das über der einen Seite, welche den rechten Winkel überspannt, beschriebene Quadrat immer den beiden Quadraten gleich ist, welche über den beiden andern Seiten, die dem rechten Winkel anliegen, konstruiert sind.* Diese beiden Seiten genügen aber zur Auffindung des Inhaltes des Dreiecks, und man braucht, wenn man nicht will, keine anderweitige Höhe zu ziehen. Denn *das Produkt aus einer Seite, welche dem rechten Winkel anliegt, und der Hälfte der andern Seite macht den Inhalt des Dreieckes aus,* weil jede von diesen beiden Seiten eine Höhe des Dreiecks darstellt.

22. Man könnte auch eine andere Höhe wählen, für welche die gerade Linie, die den rechten Winkel überspannt, die Grundlinie wäre. Ausser dieser aber kann man keine weitere Höhe fällen, denn die beiden andern Seiten werden als Höhen gerechnet.

Als Beispiel nehme man das Dreieck abc (Fig. 18), dessen Winkel a ein rechter sei. Ihm liegen die beiden Seiten ab, ac an, und die Seite bc überspannt ihn. Die Länge der Seite ab sei 8, die der Seite ac gleich 6, die der Seite bc aber gleich 10 Ellen. In diesem Dreiecke enthält das Quadrat der Geraden bc 100 Quadratellen und ist gleich den beiden über den Seiten ab und ac beschriebenen Quadraten. Das eine ist nämlich 36, das andere aber 64, und zusammengezählt machen sie 100 Ellen aus. Multipliciert man aber die Seite ab dieses Dreiecks mit der Hälfte der Seite ac oder umgekehrt, so ergiebt sich 24, und das ist des Dreiecks Flächeninhalt.

23. Will man aber in diesem Dreiecke die Höhe auf der den rechten Winkel überspannenden Seite errichten, so muss man das Quadrat einer Seite von der Summe der Quadrate der andern Seite und der Grundlinie wegnehmen, wie im spitzwinkligen und ungleichseitigen Dreiecke gezeigt ist. Nimmt man z. B. 64, das ist das Quadrat von ab, von den beiden Quadraten von ac und bc, die zusammen 136 betragen, weg, so bleiben 72 übrig. Davon ist die Hälfte 36, und dividiert man das durch 10, das ist die Länge der zu der Höhe gehörigen Grundlinie, so findet man $3\frac{3}{5}$, und das ist der kürzere Höhenabschnitt. Multiplicieren wir diesen mit sich selbst und subtrahieren das Ergebnis von dem Quadrate der kleinern Seite, so bleibt als Rest $23\frac{1}{25}$. Die Wurzel dieser Summe ist 5 weniger $\frac{1}{5}$, und das ist die Länge der Höhe. Durch Multiplikation derselben mit der halben Grundlinie, das ist mit 5, findet man dann sicher den Inhalt.

24. Solcher Dreiecke giebt es aber zwei Arten. Sie sind nämlich ent-

versilateri aut aequicrurii, ⟨aequilateri vero nunquam, eo quod latus recto angulo subtensum⟩ reliquis lateribus maius existere necessarium ducimus. Aliter etenim triangulus rectiangulus esse non poterit.

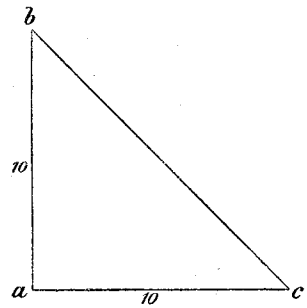


Fig. 19.

Sit ergo triangulus aequicrurius et orthogonius *abc* (Fig. 19), cuius utrumque latus *ab*, *ac* 10 ulnas et rectum angulum *a* contineat. Latus vero | *bc* fit radix 200. Totius igitur 12′ trianguli embadum 50, quod est multiplicatio 10 in 5, amplectitur, et hoc est unius lateris in alterius dimidium multiplicatio. Cumque in hoc triangulo perpendicularem super latus recto angulo subtensum elevare volueris, nimirum 50 radicem invenias. Quam si in dimidium radicis 200, quae est linea recto angulo subtensa, nec non et basis perpendicularis, multiplicaveris, 50 colligentur, quod est embadi quantitas.

Poteris etiam in hoc triangulo embadum per latera et latera per embadum, sicut in quadratis et quadrilateris ostendimus, investigare.

25. *Ampligonii vero trianguli proprie propium est, ut ab illa eius linea, quae obtuso subtenditur angulo descriptus quadratus tanto duobus quadratis duorum laterum eidem angulo adiacentium maior existit, quantum est duplum multiplicationis alterius lateris, supra quod perpendicularis erigitur, in eo, quod a perpendiculari extra comprehenditur.* Ut in hoc ampligonio triangulo *abc* (Fig. 20), cuius ebeti angulo *a* sub duobus lateribus *ab*, *ac* contento linea *bc* subtenditur. Extra hunc autem triangulum perpendicularis *bd* supra lineam *ac* protrahitur. Quadratus itaque lineae *bc* tanto duobus quadratis a lineis *ab*, *ac* descriptis maior existit, quantum est duplum multiplicationis *ac* in lineam *ad*, quod est longitudo, quae inter ipsam, scilicet *ac*, et perpendicularem continetur, ut in figura hac monstratur.

26. In hoc item triangulo perpendiculares dupliciter abstrahuntur. Nam duae extra triangulum elevantur, quarum altera super unum ex lateribus obtuso adiacentibus angulo, altera vero super alterum latus abstrahitur. Quaedam etiam intra triangulum super latus obtuso angulo subtensum erigitur. Qualiter ergo hae perpendiculares abstrahuntur, indicemus.

Esto igitur trigonus ampligonius *abc* (Fig. 21), cuius hebes angulus *a*,

---

1—2 aequilateri . . . subtensum *in A auf dem Rande ausradiert.* — 4 Sic ergo. — 5 utraque. — 15 colligantur. — 22 quod] quam *A*. — 24 ebethi *A*. — 25 linea *ab*.

weder ungleichseitig oder gleichschenklig; gleichseitig sind sie aber niemals, da die den rechten Winkel überspannende Seite immer grösser sein muss als die beiden übrigen Seiten, denn sonst könnte es eben kein rechtwinkliges Dreieck sein.

Es sei also abc (Fig. 19) ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck, dessen beide Seiten ab, ac je 10 Ellen enthalten, und dessen Winkel a ein rechter ist, dann wird die Seite bc gleich $\sqrt{200}$ sein. Der Inhalt des ganzen Dreiecks ist nun 50, das ist das Produkt von 10 mal 5, nämlich das Produkt einer Seite mit der Hälfte der andern. Will man nun in diesem Dreiecke die Höhe bestimmen, welche auf der den rechten Winkel überspannenden Seite errichtet ist, so findet man sie natürlich gleich $\sqrt{50}$, und multipliciert man dies mit der Hälfte von $\sqrt{200}$, das ist der den rechten Winkel überspannenden Geraden, und zugleich der zu dieser Höhe gehörigen Grundlinie, so entsteht 50, die Grösse des Flächeninhaltes.

Man könnte auch für dieses Dreieck den Inhalt aus den Seiten und die Seiten aus dem Inhalte finden, wie wir das für Quadrate und Rechtecke gezeigt haben.

25. *Die charakteristische Eigenschaft des stumpfwinkligen Dreiecks ist aber, dass das Quadrat, welches über der Seite errichtet ist, die den stumpfen Winkel überspannt, um so viel grösser ist als die beiden über den zwei demselben Winkel anliegenden Seiten gebildeten Quadrate, als das doppelte Rechteck aus der Seite, auf welcher die Höhe steht, und dem Stücke, das von der Höhe ausserhalb des Dreiecks abgeschnitten wird, beträgt.* Wie z. B. in dem stumpfwinkligen Dreiecke abc (Fig. 20), dessen zwischen den beiden Seiten ab, ac gelegenen stumpfen Winkel a die Linie bc überspannt, ausserhalb des Dreiecks aber die Höhe bd auf die Gerade ac gefällt ist. Hier ist also das Quadrat der Geraden bc um so viel grösser als die beiden Quadrate, die über den Geraden ab, ac beschrieben sind, als das doppelte Produkt aus ac und der Geraden ad, das ist der Strecke, welche zwischen der Geraden ac selbst und der Höhe enthalten ist, wie in nebenstehender Figur zu sehen ist.

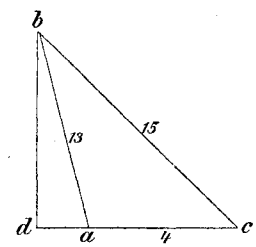


Fig. 20.

26. Bei diesem Dreiecke giebt es zweierlei Höhen. Zwei werden nämlich ausserhalb des Dreiecks geführt, von denen eine auf die eine, die andere auf die andere der beiden dem stumpfen Winkel anliegenden Seiten gefällt ist, eine wird ausserdem innerhalb des Dreiecks auf der den stumpfen Winkel überspannenden Seite errichtet. Wie man also diese Höhen finden kann, wollen wir jetzt zeigen.

Es sei also ein stumpfwinkliges Dreieck abc (Fig. 21) gegeben, dessen

sitque latus *ab* 4, latus vero *ac* 13, latus quoque *bc* angulo obtuso subtensum 15 ulnarum existat. Cuius numeri, scilicet 15, in se ipsum multiplicatio duos aliorum numerorum, quae sunt 4 et 13, multiplicationes superat in 40. Cuius superationis dimidium si per quamlibet duorum late-
5 rum summam diviseris, perpendicularis longitudinem ab eodem latere reperies. Veluti si dimidium 40, quod est 20, in lineae *ab* summam, quae est 4, diviseris, exibit linea *ea* 5 ulnarum, quod est perpendicularis a linea *ab* longitudo. Perpendicularis | autem, quae super ipsam elevatur, 13
est *ce*. Verum si idem 20 per lineae *ac* summam, quae est 13, diviseris,
10 unus et insuper 7 partes de 13 unius partibus exibunt, et hoc est longitudo perpendicularis *a* linea *ac*. Perpendicularis autem est *bd*, sicut in hac formula subscripta depingitur.[1])

27. Si perpendicularis igitur longitudinem nosse cupis, lineam *ac*, quae est longitudo longior, in se ipsam multiplicans 25 provenient. Quae
15 si ex longioris lateris in se ipsum multiplicatione depresseris, 144 remanebunt, cuius summae radix est 12, quod est linea *ce* perpendicularis. Cuius perpendicularis multiplicatio in dimidium lateris *ab*, quod ab ipsa extra comprehenditur, eiusdem trianguli embadum complet.[2])

28. Item si perpendicularis *bd* longitudinem invenire volueris, multi-
20 plicationem *ad*, qnae est longitudo brevior, in se ipsam, quae est 2 et 62 de 169 partibus unius, addiscens eam de 16, quae est brevioris lateris in se ipsum multiplicatio, deme, et 13 cum 107 partibus ⟨de⟩ 169 partibus unius remanebunt. Cuius numeri radix est 3 ulnarum et 9 partium de 13 unius partibus, quod est perpendicularis *bd* longitudo. Quam si in di-
25 midium lateris *ac* multiplicaveris, 24, quod est trianguli embadum, exibunt.[3])

29. Si autem super lineam obtuso angulo subtensam perpendicularem elevare desideras, fac, quemadmodum in triangulo acutiangulo demonstravimus, et perpendiculum in hoc subscripto triangulo trium ulnarum et quintae unius invenies. Quam si in dimidium lineae, cui perpendicularis
30 superstat, multiplicaveris, 24 in trianguli embado reperies. Manifestum est etiam, quod una perpendicularis tibi satis sufficeret, sed ut numerandi solertiam habeas et in numero promptus existas, qualiter super unumquodque cathetus elevetur, ostendimus.[4])

30. Hoc item triangulus aut erit aequicrurius aut diversilaterus, aequi-
35 laterus vero nunquam, sicut et de triangulo orthogonio supra diximus, eo

---

4 per quamlibet] supra quaelibet. — 21 eam de] eandem. — 22 de *fehlt*. — 24 Qui si.

---

1) Leonardo 36, 19. 2) Leonardo 38, 25. 3) Ebendaselbst.
4) Leonardo 38, 13.

stumpfer Winkel a, die Seite ab 4, und die Seite ac 13 sei; die Seite bc, welche den stumpfen Winkel überspannt, enthalte 15 Ellen. Das Quadrat dieser Zahl, nämlich von 15, übertrifft die Quadrate der beiden andern, nämlich von 4 und 13, in 40. Theilt man die Hälfte dieses Restes durch die Länge einer der beiden Seiten, so erhält man den Abstand der Höhe von der betreffenden Seite. Theilt man also die Hälfte von 40, das ist 20, durch die Länge von ab, das ist durch 4, so ergiebt sich die Linie ea gleich 5 Ellen, das ist der Abstand der Höhe von der Seite ab. Die daraufstehende Höhe aber ist ec. Dividiert man aber 20 durch die Linie ac, das ist durch 13, so kommen $1\frac{7}{13}$, und das ist der Abstand der Höhe von der Linie ac. Die Höhe selbst aber ist bd, wie in der nebenstehenden Figur zu sehen ist.[1])

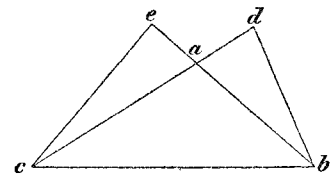


Fig. 21.

27. Um nun die Länge der Höhe zu finden, so erhält man durch Multiplikation der Geraden ae, das ist des grösseren Abstandes, mit sich selbst 25. Subtrahiert man das von dem Produkte der längern Seite mit sich selbst, so bleiben 144 übrig, davon ist die Wurzel 12, und das ist die Höhe ec. Das Produkt dieser Höhe mit der Hälfte der Seite ab, auf deren Verlängerung sie steht, macht den Flächeninhalt des Dreiecks aus.[2])

28. Will man ebenso die Länge der Höhe bd finden, so sucht man das Quadrat von ad, das ist des kleinern Abstandes, und erhält $2\frac{62}{169}$, und subtrahiert man das von 16, dem Quadrate der kleinern Seite, dann bleiben $13\frac{107}{169}$ übrig. Davon ist die Wurzel $3\frac{9}{13}$ Ellen, und so lang ist die Höhe bd. Multiplikation mit der Hälfte der Seite ac giebt 24, und das ist der Flächeninhalt des Dreiecks.[3])

29. Soll aber die Höhe auf der dem stumpfen Winkel überspannenden Seite gefunden werden, so mache man es so, wie wir es für das spitzwinklige Dreieck gelehrt haben, dann findet man für das oben gezeichnete Dreieck diese Höhe gleich $3\frac{1}{5}$ Ellen, und multipliciert man das mit der Hälfte der Geraden, auf welcher die Höhe steht, so findet man wieder 24 als Inhalt des Dreiecks. Es ist freilich klar, dass eine Höhe hingereicht hätte, damit aber der Leser Übung im Rechnen habe und in den Zahlen gewandt dastehen möge, zeigten wir auch, wie für jede Seite die Höhe zu finden sei.[4])

30. Solche Dreiecke sind wieder entweder gleichschenklig oder ungleichseitig. Gleichseitig sind sie aber niemals, wie wir schon vom rechtwinkligen Dreiecke oben behaupteten, weil in beiden Dreiecksarten die den

quod in utroque triangulo linea recto vel obtuso angulo subtensa reliquis lateribus maius existit, quemadmodum et ipsius quadratus quolibet quadrato reliquorum laterum maior habetur.

31. Hanc igitur subscriptam regulam memoriae tenaci commenda: *Si cuiuslibet trianguli unum latus reliquis lateribus longius fuerit, illud in se ipsum multiplica, eiusque multiplicationem si duabus multiplicationibus duorum reliquorum laterum aequalem invenies, eum orthogonium fore non ambigas. Si vero eam maiorem inveneris, eum ampligonium fore cognoscas. Si autem minor existiterit, eum oxigonium iudicabis. Quod si unum latus utrique reliquorum laterum aequum fuerit, eum similiter oxigonium fore non deneges, et tunc nec orthogonius nec ampligonius esse poterit.* | 13′

32. Ostensa doctrina metiendi triangulorum embada, ostensisque orthogonii trigoni nec non ampligonii proprietatibus oxigonii proprietatem ostendamus. *Trianguli igitur oxigonii proprie proprium est, ut, qui a linea acuto angulo subtensa quadratus describitur, tanto duobus quadratis a reliquis lateribus eidem angulo adiacentibus conformatis minor existat, quantum est duplum multiplicationis totius lineae, cui infra perpendicularis superstat, in eam sui partem, quae inter perpendicularem et eundem acutum angulum continetur.*

Hoc idem autem superius in extrahendo perpendicularem intra triangulum oxigonium et diversilaterum indicavimus. Ibidem etiam illud edocuimus, per quod omnium triangulorum genera mensurari possunt. Nullum enim trigonum aliquo acuto angulo expertem fore agnoscamus.

33. Et licet mensurae omnium triangulorum per eorundem perpendiculares, ut edocuimus, inveniantur, alia tamen dari potest notitia, quae omnium trilaterarum figurarum embada metitur, quam *augmentationis vel excessus* nimirum appellant. Ea igitur est, ut *in omni triangulo singulorum laterum dimidium addiscas, et in unum colligas, indeque collectum in quo singulorum laterum quantitates excedat inquire et serva. Post haec quemlibet eorum excessuum in altero duorum reliquorum multiplica, indeque proveniens si in tertium eorundem duxeris, et quod fuerit, in dimidium singulorum laterum in unum coadunatorum multiplicaveris, quadratus areae vel multiplicatio eiusdem trianguli colligitur, cuius quadrati radix illius trianguli embadum implet.*

Et ut haec levius ostendatur, triangulus, cuius unum latus 10, aliud autem 8, tertium vero 6 mensuras contineat, describatur, quorum omnium

---

18 inter] in. — 25 ut] vel. — 27 appellar̄ *A*. — 29—30 quodlibet. — 32 coadunatum.

rechten oder stumpfen Winkel überspannende Seite grösser sein muss als jede der beiden andern Seiten. Es ist auch ihr Quadrat grösser als die Quadrate der beiden andern Seiten.

31. Folgende Regel behalte man treu im Gedächtnisse: *Ist in einem Dreiecke eine Seite grösser als jede der beiden andern, so multipliciere man sie mit sich selbst. Ist dieses Quadrat dann gleich den Quadraten der beiden andern Seiten zusammengenommen, so ist das Dreieck unzweifelhaft rechtwinklig; ist es aber grösser, so erkennt man das Dreieck als stumpfwinklig; ist es kleiner, so wird man das Dreieck für spitzwinklig erklären. Ebenso muss man, wenn eine Seite jeder der beiden andern gleich ist, das Dreieck für spitzwinklig gelten lassen, denn dann kann es weder rechtwinklig noch stumpfwinklig sein.*

32. Wir haben nun die Lehre von der Ausmessung der Inhalte der Dreiecke und die charakterischen Eigenschaften sowohl des rechtwinkligen als des stumpfwinkligen Dreiecks gezeigt, und wollen jetzt auch das Kennzeichen des spitzwinkligen angeben. *Das charakteristische Merkmal des spitzwinkligen Dreiecks ist also, dass das Quadrat einer Seite, welche einen spitzen Winkel überspannt, um so viel kleiner ist als die beiden über den dem Winkel anliegenden Seiten gebildeten Quadrate, als das doppelte Produkt der ganzen Linie, der die Höhe innerhalb des Dreieckes aufsteht, mit demjenigen Theile derselben beträgt, welcher zwischen der Höhe und dem genannten spitzen Winkel enthalten ist.*

Wir haben das schon oben bei der Bestimmung der Höhe im spitzwinkligen und ungleichseitigen Dreiecke angegeben. Dort haben wir auch gezeigt, wie wir dadurch alle Arten von Dreiecken ausmessen können, denn es giebt kein Dreieck, das einen spitzen Winkel entbehrte.

33. Obwohl die Ausmessung aller Dreiecke durch ihre Höhen gefunden werden kann, wie wir gezeigt haben, so lässt sich doch noch eine andere Regel geben, durch welche der Flächeninhalt aller dreiseitigen Figuren gemessen werden kann. Man nennt sie *die Regel der Vermehrung oder des Überschusses.* Es ist aber folgende: *Man suche in einem beliebigen Dreiecke die Hälfte jeder Seite und addiere dieselben, dann sehe man zu, um wieviel diese Summe die Länge der einzelnen Seiten übertrifft, und merke sich dieses. Darauf vervielfache man eine dieser Differenzen mit der einen der beiden andern und das Ergebnis mit der dritten, das Resultat endlich mit der Summe der Hälften der drei Seiten, so entsteht dadurch das Quadrat des Flächeninhaltes, oder das Produkt des Dreiecks mit sich selbst. Die Wurzel dieses Quadrates giebt dann den Inhalt des Dreiecks.*

Damit dies leichter klar werde, sei ein Dreieck gezeichnet, dessen eine Seite 10, die zweite 8, die dritte aber 6 Maasseinheiten enthalte. Die

laterum medietas 12 reddit. Cuius 12 ab uno laterum differentia sunt 2, ab altero vero latere 4, a tertio quidem 6. Si duo igitur, quae sunt unius lateris differentia, in 4, quae sunt differentia alterius lateris, multiplicaveris, 8 colligentur. Quod si in 6, quae sunt tertii lateris differentia excessus, duxeris, 48 reperies; cuius nnmeri summam si in 12, quod est collectorum laterum medietas, multiplicaveris, 576 coadunabuntur, quorum quantitas quadratum totius embadi in praedicto triangulo manifeste complet. Cuius quadrati radicem, quae est 24, eam eiusdem trianguli embadum implere non dubites.

Haec quidem in geometriae demonstrationibus est intricata, quapropter tibi leviter explanari posse non existimo.[1])

Huc usque de secunda parte, deinceps vero ad tertiam transitum faciamus.

Pars tertia in illorum quadrilaterorum dimensionibus, quorum quaedam rhomboides, quaedam vero diversilatera nuncupantur.

1. *Ad rhomboidum itaque doctrinam investigandam* rhomboides *abcd* (Fig. 22) descri|batur, cuius duo *ab*, *cd* latera in oppositum constituta 14
sibimet invicem sint aequalia, quorum unumquodque latus 25 contineat ulnas, reliqua vero duo latera *bc*, *da* sibimet opposita alterum alteri simiiter aequentur, quorum utrumque 15 ulnas amplectatur. Cumque istius embadum nosse desideras, eius diametrum *bd*, quod est 20 ulnarum ⟨invenias⟩. Unde scilicet, quia est 20 ulnarum, ipsius angulos rectos non esse monstratu addiscas, nam si rectos haberet angulos, eius diametrum *bd* solius numeri 850 et non alterius radix existeret, ⟨quae radix⟩ 29 ulnas et quasdam insuper fractiones ad sui perfectionem recipit. Hoc autem diametrum 20 supra inventum rhomboidem in duos sibimet aequos triangulos dividit, et quoniam istius rhomboidis embadum nisi per horum triangulorum areas investigare nequimus, si in altero istorum triangulorum perpendicularem produxerimus, eius embadum addiscemus. Quod inventum si duplicaverimus, totius rhomboidis embadum non ignorabimus. Si in triangulo igitur *abc* perpendicularem super latus *ab* produxerimus, eius perpendicularis quantitas 12, triangulique area 150 continebit, cuius summae duplum 300 in se suscipit, quod est huius rhomboidis embadum. Si autem aliam perpendicularem in altero triangulo produxeris, ad idem pervenies.

---

2 latere] latus. — 8 quadrato. — radicem] radice multiplicata. — 21 desiderat. — 21—22 invenias *fehlt*. — 24 quae radix *in A über der Zeile ausradiert*. — 26 rhomboides.

---

1) Leonardo 40, 7. Er giebt auch den von Savasorda als zu verwickelt ausgelassenen Beweis im Ganzen nach dem der drei Brüder.

Summe der Hälften aller Seiten ergiebt dann 12. Die Differenz dieser 12 mit der ersten Seite ist 2, mit der zweiten Seite 4, mit der dritten aber 6. Vervielfacht man also 2, die Differenz mit der ersten Seite, mit 4, das ist der Differenz der zweiten Seite, so entsteht 8; dieses wieder mit 6, das ist der Differenz der dritten Seite, multipliciert liefert 48. Multipliciert man diese Summe mit 12, das ist mit der Hälfte der Seitensumme, so wächst das Produkt zu 576 an, und diese Grösse erfüllt das Quadrat des Gesammtinhaltes des genannten Dreiecks. Die Wurzel dieses Quadrates, und das ist 24, ist unzweifelhaft der Flächeninhalt unseres Dreiecks.

Der geometrische Beweis dieser Regel ist jedoch sehr verwickelt, sodass ich nicht glaube, ihn hier leicht auseinandersetzen zu können.[1])

Soweit der zweite Theil, nun wollen wir zum dritten übergehen.

Dritter Theil: Die Ausmessung derjenigen Vierecke, welche theils Rhomboide, theils ungleichseitige Vierecke genannt werden.

1. *Um jetzt die Lehre von den Rhomboiden zu ergründen,* sei das Rhomboid *abcd* (Fig. 22) gezeichnet, dessen beide gegenüberliegende Seiten *ab*, *cd* einander gleich seien, und jede derselben enthalte 25 Ellen. Von den beiden andern sich gegenüberliegenden Seiten *bc*, *da*, die ebenfalls einander gleich sind, sei jede 15 Ellen lang. Um nun den Inhalt desselben kennen zu lernen, muss man die Länge der Diagonale *bd* desselben suchen, sie sei gleich 20 Ellen, und daraus, nämlich dass sie 20 Ellen misst, folgt, dass seine Winkel keine rechten sein können. Denn, wären die Winkel rechte, so wäre die Diagonale die Wurzel der einzigen Zahl 850, und diese Wurzel hat eine Gesammtlänge von 29 Ellen und einem Bruche. Die oben gefundene Diagonale von 20 Ellen Länge zerschneidet das Rhomboid in zwei einander gleiche Dreiecke, und da wir den Flächeninhalt des Rhomboids nur durch die Inhalte dieser Dreiecke auffinden können, so werden wir, indem wir in einem von diesen Dreiecken die Höhe ziehen, seinen Inhalt kennen lernen. Verdoppeln wir dann das Ergebnis, so kennen wir auch den Flächeninhalt des ganzen Rhomboids. Ziehen wir also im Dreiecke *abc* die Höhe auf der Seite *ab*, so finden wir ihre Länge gleich 12, und die Fläche des Dreiecks enthält 150. Das Doppelte dieser Summe ist 300, und das ist der Inhalt des Rhomboids. Zöge man aber in dem andern Dreiecke eine andere Höhe, so käme man auf dasselbe hinaus.

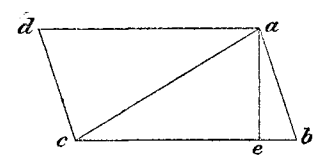


Fig. 22.

Similiter etiam, si totam perpendicularem in totius basis summam multiplicaveris, idem nimirum ostendet, ut in hoc depicta figura monstratur.[1])

2. ⟨In hac autem rhomboide quodlibet duorum diametrorum par alterius quantitatem inveniri poterit, si omnium laterum longitudinem et totius embadi quantitatem sciveris, quod qualiter invenias, per supradictas demonstrationes ostenditur.⟩

3. Quadrilatera vero diversilatera, quorum doctrina relinquitur, in duo genera dividuntur. Primi ⟨itaque⟩ generis figurae sunt, quibus duo tantum latera aequidistantia continentur. Hae autem in quatuor figurarum manerias subdividuntur. Secundum vero genus illas figuras amplectitur ⟨quarum⟩ nulla latera aequidistantia repraesentantur.

4. Primae igitur maneriei primum genus est figura quadrilatera *abcd* (Fig. 23), cuius duo latera *ab*, *cd* sibimet invicem sunt aequalia, non autem aequidistantia, quorum unumquodque 13 ulnas in se continet. Reliqua vero duo latera *ac*, *bd* aequidistantia quidem sunt, sed non aequalia. Latus etenim *ac* 8, latas vero *bd* 18 continet ulnas. Haec autem figura ⟨*aeque caput abscissa* nuncupatur. De eius aequidistantibus lateribus breve latus *abscisionis caput* nominatur, latus vero *bd* longius⟩ *abscisionis basis* vocatur. Si hanc igitur figuram metiri volueris, eius perpendicularem prius invenias. Modum autem inveniendi perpendicularis ⟨longitudinem⟩ dicimus, ut abscisionis caput ex abscisionis basi demas, et reliquum | in duo divides 14′
aequa, alteram divisionis partem in se ipsam multiplices, indeque collectum ex multiplicatione alterius duorum aequalium laterum in se ipsis minuas, et reliqui radicem addiscas, quia ipsa est perpendicularis quantitas.[2])

Huius quidem demonstrationem sic addiscas. Quia 8, quae sunt caput abscisionis, ex 18, quae sunt abscisionis basis subtraximus, 10 remanebunt, cuius summae dimidium sunt 5, quod est quantitas basis, quae ex altera parte figurae remanet, et ipsa est linea *bc* ex parte *b* remanens, ex parte vero *d* est linea *df*. Quare si a puncto *a* ad punctum *e* lineam *ae*, a puncto vero *c* usque ad punctum *f* lineam *cf* protraximus, harum linearum utramque super basim *bd* orthogonaliter cadere nulli dubium est. Triangulus igitur *aeb* est orthogonius, cuius linea recto angulo subtensa est latus *ab*. Notum est etiam, quod quadratus istius lineae *ab*, quae est 13, quadrato

1 tota. — 4—7 In hac . . . ostenditur *in A auf dem Rande ausradiert.* — 8 quadrilateras. — diversilateras. — 9 itaque *über der Zeile in A ausradiert.* — 11 quarum *fehlt.* — 18—19 aeque caput . . . longius *in A auf dem Rande ausradiert.* — 20 meteri. — 21 longitudinem *fehlt.* — 30 puncto *a*] punta *A.* — 32 utramque] unamque *B.* — 34 est 13] est ex *A.*

1) Leonardo 77, 9. 2) Leonardo 78, 24.

Ebenso würde das Produkt aus der ganzen Höhe und der ganzen Grundlinie dasselbe ergeben, wie in der nebengezeichneten Figur gezeigt ist.[1])

2. In einem solchen Rhomboide kann jede der beiden Diagonalen durch die Grösse der andern gefunden werden, wenn die Grösse aller Seiten und der Flächeninhalt bekannt sind. Wie man das findet, wird durch die obigen Darlegungen gezeigt.

3. Die ungleichseitigen Vierecke, deren Lehre noch aussteht, werden in zwei Arten getheilt. Die erste Art dieser Figuren sind solche, welche nur zwei parallele Seiten besitzen. Sie zerfallen wieder in vier Unterabtheilungen. Die zweite Art umfasst dann alle jene Figuren, welche mit gar keinen parallelen Seiten dargestellt werden.

4. Die erste Unterabtheilung der ersten Art ist ein Viereck *abcd* (Fig. 23), dessen beide Seiten *ab*, *cd* einander gleich aber nicht parallel sind, eine jede möge 13 Ellen enthalten. Die andern beiden Seiten *ac*, *bd* sind zwar parallel, aber nicht gleich. Es möge nämlich die Seite *ac* 8, die Seite *bd* aber 18 Ellen enthalten. Solche Figuren heissen *mit gleichmässig abgeschnittenem Kopfe* (gleichschenkliges Trapez). Von den beiden parallelen Seiten nennt man die kleinere Seite *ac* den *Abschnittskopf,* die längere Seite *bd* dagegen die *Abschnittsgrundlinie.* Will man diese Figur ausmessen, so muss man zuvörderst ihre Höhe finden. Als Methode, die Länge der Höhe zu bestimmen, geben wir folgende. Man ziehe den Abschnittskopf von der Abschnittsgrundlinie ab, halbiere den Rest, multipliciere die Hälfte mit sich selbst und ziehe das Ergebnis von dem Quadrate einer der beiden gleichen Seiten ab, dann suche man die Wurzel des Restes, denn diese ist die Grösse der Höhe.[2])

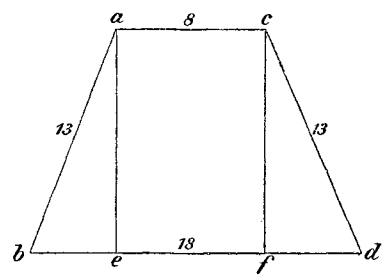


Fig. 23.

Den Beweis dafür kann man so einsehen. Wenn man 8, das ist der Abschnittskopf, von 18, der Abschnittsgrundlinie, wegnimmt, so bleibt 10 übrig. Die Hälfte dieser Summe ist 5, und das ist die Strecke, welche auf jeder der beiden Seiten der Figur übrig bleibt. Es ist auf der Seite von *b* die Gerade *bc*, auf Seite von *d* aber die Strecke *df*. Zieht man daher vom Punkte *a* nach dem Punkte *e* die Gerade *ae*, vom Punkte *c* aber nach dem Punkte *f* die Gerade *cf*, so ist nicht zweifelhaft, dass beide Geraden auf der Grundlinie *bd* senkrecht stehen. Das Dreieck *aeb* ist also rechtwinklig, und die den rechten Winkel überspannende Seite ist *ab*. Es ist ferner bekannt, dass das Quadrat dieser Seite *ab*, die gleich 13 ist,

lineae *eb*, quae est 5, et quadrato lineae *ae*, cuius quantitatem quaerimus, aequatur. Quare si quadratum 5 de quadrato 13 depresseris, 144 remanebunt, cuius summae radicem, quae est 12, perpendicularem esse non ignoramus.

5. Istius autem *aeque caput abscissae figura embadum* si nosse desideras, summam abscisionis capitis cum summa abscisionis ⟨basis coniungens 26 efficies, cuius numeri dimidium, quod est 13, in perpendicularis summam, quae est 12, multiplicans 156 in embado⟩ reperies.

Et ut huius rei demonstrationem non ignores, sic accipias. Quia embadum trianguli *abe*, sicut est manifestum, est multiplicatio perpendicularis *ae* in dimidium lineae *be*, embadum vero trianguli *cfd* est multiplicatio lineae *cf*, quae est perpendicularis, quae lineae *ae* existit aequalis, in dimidium lineae *fd*, quae est aequalis lineae *be*, erunt duorum triangulorum embada in unum collecta ut multiplicatio *ae* perpendicularis in totam eius basim *eb*. Embadum autem parte altera longioris *aecf* est multiplicatio lineae *ae* in lineam *ef*. Igitur huius figurae aeque caput abscissae embadum est multiplicatio *ae*, quae est una perpendicularis, in totam basim *bef*. Manifestum est etiam, lineam *be* dimidium superflui, lineam vero *ef* dimidium duarum linearum *ef*, *ac* continere; sunt enim *ef*, *ac* aequales. Erit igitur tota linea *bef* aequalis dimidio capitis abscisionis cum basis dimidio coadunato.[1])

6. Item si huius *aeque caput abscissae diametrum* invenire quaeris, ex ipsius basi dimidium illius augmenti, quod inter ipsam basim et abscisionis caput fuerit, deme, quodque ex basi supererit, in se ipsum multiplica, indeque collectum perpendicularis in se ipsam multiplicationem superaddens coadunati radicem accipe, et quaesitum diametrum invenies. |

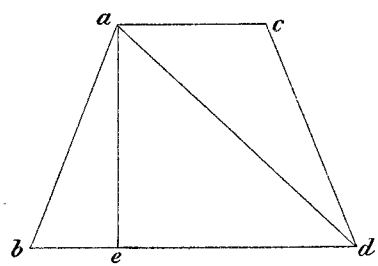


Fig. 24.

Veluti si in hac eadem figura protraxeris ab *a* usque ad *d* lineam *ad* (Fig. 24), cuius longitudinem scire quaeris. Quia ipsa subtenditur recto angulo *aed*, cui perpendicularis *ae* et linea *ed*, quae ex base supererat, sunt adiacentes, erit totius lineae *ad* in se ipsam ⟨multiplicatio⟩ multiplicationibus linearum *ae*, *ed*, quae recto adiacent angulo, aequalis. Cumque perpendicularis *ae* multiplicationem, quae est 144, multiplicationi *ed*, quae est id, quod ex basi supererat, et sunt 169, superaddideris, 313 inde col-

---

5 capitis] capias. — 5—7 basis ... in embado *auf dem Rande von A ausradiert.* — 19 coadunatum scilicet abscionis caput fuerit. — 32 multiplicatio *fehlt.* — 34 adiacet.

dem Quadrate der Geraden *eb*, die 5 beträgt, plus dem Quadrate der Geraden *ae*, deren Länge wir suchen, gleich ist. Wenn wir also das Quadrat von 5 von dem Quadrate von 13 abziehen, so bleiben 144, und dass die Wurzel dieser Zahl, die 12 beträgt, die Höhe ist, wissen wir.

5. Will man nun *den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes* kennen lernen, so addiert man die Länge des Abschnittkopfes zur Länge der Grundlinie und erhält so 26. Dann multipliciert man die Hälfte dieser Summe, das ist 13, mit der Länge der Höhe, nämlich 12, und findet so 156 als Flächeninhalt.

Um den Beweis dieser Regel zu führen, verfährt man so. Da der Inhalt des Dreiecks *abe* offenbar gleich dem Produkte der Höhe *ae* mit der Hälfte der Linie *be*, der Inhalt des Dreiecks *cfd* aber das Produkt der Geraden *cf*, das ist der Höhe, und sie ist der Linie *ae* gleich, mit der Hälfte der Geraden *fd* ist, welche der Geraden *be* gleich ist, so ist die Summe der beiden Dreiecke gleich dem Produkte der Höhe *ae* mit der ganzen Grundlinie *eb*. Der Inhalt des Rechtecks *aecf* ist aber gleich dem Produkte der Geraden *ae* mit der Geraden *ef*. Der Gesammtflächeninhalt dieses gleichschenkligen Trapezes ist daher das Produkt von *ae*, das ist einer Höhe, mit der ganzen Grundlinie *bef*. Nun ist klar, dass die Gerade *be* die Hälfte der Differenz, die Gerade *ef* aber die Hälfte der beiden Geraden *ef*, *ac* enthält, *ef* und *ac* sind nämlich gleich. Also ist die ganze Linie *bef* gleich der Hälfte des Abschnittkopfes plus der Hälfte der Abschnittsgrundlinie.[1])

6. Will man ferner die *Diagonale dieses gleichschenkligen Trapezes* bestimmen, so ziehe man von der Grundlinie die Hälfte des Unterschiedes zwischen der Grundlinie und dem Abschnittskopfe ab, den Rest der Grundlinie multipliciere man mit sich selbst und addiere zu dem Produkte das Quadrat der Höhe, nehme von der Summe die Wurzel, und findet so die fragliche Diagonale.

Wenn man z. B. in derselben Figur von *a* nach *d* die Gerade *ad* zieht (Fig. 24), deren Länge man zu finden wünscht. Da diese den rechten Winkel *aed* überspannt, dem die Höhe *ae* und die Strecke *ed* anliegen, welche von der Grundlinie übrig blieb, so muss das Quadrat der Linie *ad* den Quadraten der Linien *ae*, *ed*, welche dem rechten Winkel anliegen, gleich sein. Addiert man nun das Quadrat der Höhe, das ist 144, zu dem Quadrate von *ed*, das ist das, was von der Grundlinie übrig blieb, es sind 169,

---

1) Leonardo 78, 39.

ligentur, et haec est diametri in se ipsum multiplicatio, cuius summae radix diametri longitudinem repraesentat.[1])

7. Si duo aequalia, sed non aequidistantia latera hac in figura, quae aeque caput abscissa dicitur, illa ex parte a qua terminantur in lineam, quae abscisionis caput nuncupatur, donec ad idem punctum concurrant, abstrahere cupis, triangulus inde proveniet. Sicut exempli causa si hac in figura duo latera *ba*, *dc* a duobus punctis *a*, *c*, quae sunt capitis extremitates, extra produxeris, supra punctum *f* concurrent, et tunc haec figura caput abscissa in triangulum *fbd* terminabitur (Fig. 25). Quare si illarum duarum linearum, quae extra protrahuntur longitudines non ignorare desideras, quantitatis omnium laterum capitis abscissae prius notitiam habeas. Dehinc id, in quo basis abscisionis caput ⟨superat, et sunt 10, inquire et serva. Post hoc abscisionis caput⟩, quod est 8, in totius lateris summam, quae est 13, multiplicans 104 efficies. Quae si per 10, quod est superatio, diviseris, 10 et duas insuper unius quintas reperies, quod est lineae *af* extra productae longitudo, ⟨quae⟩ *cf*, quae similiter extra protrahitur, aequatur.[2])

8. Hoc idem, si volueris, aliter numerare poteris. Nam si proportionem 8, quae sunt abscisionis capitis longitudo, ad 10, quod est id, in quo a sua basi superatur, et est subsexquiquarta, didiceris, eandem proportionem id, quod extra protrahitur, ad illud, quod infra continetur, quod est figurae latus, habere non dubites. Scilicet latus ipsum autem est 13, linea igitur extra protracta 10 et duas quintas, quae sunt quatuor quintae de 13, continebit.

9. In hoc item triangulo si perpendicularem invenire volueris, perpendiculari *ae*, ⟨quam⟩ in figura aeque caput abscissa produxeras, quatuor eius quintas, quemadmodum et lateribus, superadde, et perpendicularis trianguli *fbd* longitudinem invenies. Perpendicularis autem *ac*, ut supra diximus, 12 in se continet, cui si quatuor eius quintas superaddideris, 21 et tres quintas invenies, quod est perpendicularis *fg* in triangulo erectae longitudo.[3])

10. Secundae vero maneriei est figura caput abscissa, cuius duo tantum latera sunt aequidistantia, quorum alterum *ac* 8, alterum vero *bd* 22 con-

---

5 concurret. — 6 triangulis. — perveniet. — 12—13 superat ... caput *auf dem Rande von A ausradiert.* — 16 *Das erste* quae *fehlt.* — 26 quam *fehlt.*

---

1) Leonardo 79, 4. 2) Leonardo 79, 43. 3) Leonardo 80, 20.

so ist die entstehende Summe 313, und das ist das Quadrat der Diagonale, und dessen Wurzel ergiebt die Länge der Diagonale.[1])

7. Wenn man die beiden gleichen, aber nicht parallelen Seiten dieser Figur, die mit gleichmässig abgeschnittenem Kopfe genannt wird, nach der Seite hin, wo sie in der Abschnittskopf genannten Geraden endigen, zu verlängern wünscht, bis sie in einem Punkte zusammenlaufen, so entsteht dadurch ein Dreieck. Verlängert man z. B. in der vorliegenden Figur die beiden Seiten *ba*, *dc* von den beiden Punkten *a*, *c* aus, den Endpunkten des Abschnittskopfes, nach aussen, so laufen sie im Punkte *f* zusammen, und dann endigt dieses Trapez in dem Dreiecke *fdb* (Fig. 25). Will man nun die Grösse der beiden Linien, die ausserhalb die Verlängerung bilden, kennen lernen, so muss man zuvor die Grösse aller Seiten des Trapezes wissen. Dann suche man den Überschuss der Grundlinie über den Abschnittskopf, das ist 10, und verwahre ihn. Darauf multipliciert man den Abschnittskopf, nämlich 8, mit der ganzen Länge der Seite, das ist mit 13, und erhält 104. Dividiert man das durch 10, das ist den obigen Überschuss, so findet man $10\frac{2}{5}$, und das ist der Betrag der äussern Verlängerung *af*, welche der andern äussern Verlängerung *ef* gleich ist.[2])

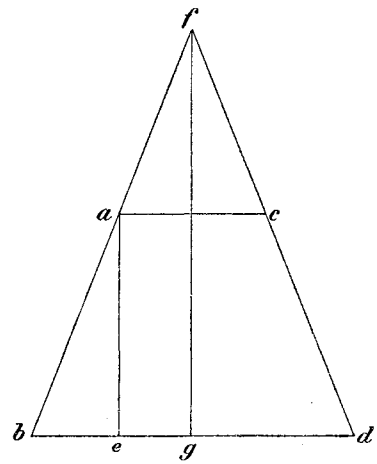


Fig. 25.

8. Das kann man auch, wenn man will, anders berechnen. Sucht man nämlich das Verhältnis von 8, der Länge des Abschnittkopfes, zu 10, das ist das, worin derselbe von der Grundlinie übertroffen wird, und dieses Verhältnis ist das von 4 zu 5, so muss die äussere Verlängerung zu dem innerhalb liegenden Stücke, das ist zu der Seite der Figur, dasselbe Verhältnis besitzen. Nun ist die Seite 13, also enthält die äussere Verlängerung $10\frac{2}{5}$, das sind $\frac{4}{5}$ von 13.

9. Will man ferner in diesem Dreiecke die Höhe finden, so braucht man nur der Höhe *ae*, die man in dem Trapeze gefällt hatte, $\frac{4}{5}$ wie den Seiten, hinzuzufügen, und findet so die Länge der Höhe des Dreiecks *fbd*. Die Höhe *ae* enthält aber, wie wir oben sagten, 12 in sich. Addiert man hierzu $\frac{4}{5}$, so ergeben sich $21\frac{3}{5}$, und das ist die Länge der in dem Dreiecke gefällten Höhe *fg*.[3])

10. Die zweite Unterabtheilung ist aber eine Figur mit abgeschnittenem Kopfe, bei der nur zwei Seiten parallel sind, von denen die eine *ac* 8,

tinet ulnas. Reliqua duo latera sunt inaequalia, quorum alterum *ab* 15, alterum vero *cd* ulnas 13 amplectitur (Fig. 26). Haec autem figura *abscissa caput diversa* | nuncupatur. Embadum per suae perpendicularis in- 15′
ventionem, sicut et superiori figura monstravimus, addiscitur.[1])

In hac etiam figura caput abscissa *puncta casus perpendicularium* nobis scire necesse est, et qualiter longiorem atque breviorem casum addiscamus. Quae taliter investigantur. Eius nempe brevius latus in ⟨se⟩ ipsum multiplica, indeque collectum ex longioris lateris in se ipsum multiplicatione deme, residuique dimidium sumens illud per basis excessum ⟨ab⟩ abscisionis capite partire, quodque exierit, si dimidio eiusdem excessus superaddideris, longiorem casum invenies, quod est catheti remotio a latere longiori. Veluti si exempli causa 13, quae sunt lateris *cd* longitudo, in semet duxeris, 169 provenient. Quae si ex 225, quae sunt multiplicatio lateris longioris, demantur, 56 remanebunt. Cuius summae dimidium, quod est 28, si per 14, quae sunt basis excessus ab abscisionis capite, partitus fueris, 2 exibunt. Quae si 7, quod est dimidium excessus basis, superaddideris, 9 procurabuntur, et haec est lineae *be* longitudo, quod est remotio perpendicularis a latere *ab* longiori. Si idem autem ex 7 depresseris, remanebunt 5, quod est lineae *df* longitudo, quae est a breviori latere perpendicularis remotio.[2])

Huius quidem demonstrationes ex demonstratione perpendicularis in triangulis diversilateris superius ostensa cognosces. Cum enim ex basi abscisionis capitis longitudinem abstuleris, reliquum ut *bg* unius continuum lineae quantitas remanebit. Et punctum *a* quasi coniungi cum puncto *g*, ipsamque figuram triangularem assumere formam tibi mente propone, et tunc longiorem atque breviorem casum sicut in triangulo diversilatero reperies.

11. Item si *perpendicularis longitudinem* nosse desideras, utriusque ⟨casus⟩ longitudinis multiplicationem ex multiplicationibus illorum laterum, quae eis sunt contigua, deme, residuique radicem accipiens perpendicularis longitudinem invenies. Veluti si 9, ⟨quae sunt linea *be*, quae est casus longior, in semet duxeris, 81 efficies. Quae si ex 225 depresseris, quae sunt multiplicatio lineae *ab*⟩, quae est latus longior, 144 remanebunt, quod est perpendicularis multiplicatio. Cuius multiplicationis radix est 12,

---

3 divisa *A*. — 7 se *fehlt*. — 8 multiplicationem. — 9 ab *fehlt*. — 11 longioris. — 22 trianguli. — 28 utriusque utriusque *A*. — 29 casus *fehlt*. — 31—33 quae est... lineae *ab in A auf dem Rande ausradiert*.

---

1) Leonardo 81, 9 v. u. 2) Leonardo 81, 5 v. u.

die andere *bd* aber 22 Ellen enthalten mag. Die beiden andern Seiten sind ungleich, die eine derselben *ab* sei 15, die andere *cd* aber 13 Ellen lang (Fig. 26). Diese Figur aber heisst *mit verschiedenartig abgeschnittenem Kopfe.* Ihr Inhalt wird, wie der der vorhergehenden Figur, durch Aufsuchung ihrer Höhe bestimmt.[1])

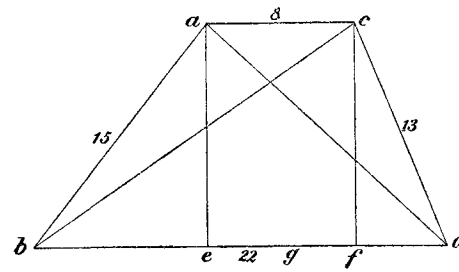


Fig. 26.

Auch für diese Figur müssen wir *die Höhenfusspunkte* kennen, und wie wir den längern und kürzern Höhenabschnitt bestimmen können. Man findet sie folgendermaassen. Man nehme das Quadrat der kleinern Seite von dem Quadrate der grössern Seite weg, dann theile man die Hälfte des Restes durch die Differenz zwischen der Grundlinie und dem Kopfe, und addiere das Ergebnis zu der Hälfte obiger Differenz, so findet man dadurch den längern Höhenabschnitt, das heisst die Entfernung derselben von der grössern Seite. Vervielfacht man nämlich 13, das ist die Länge der Seite *cd*, mit sich selbst, so kommen 169, und zieht man das von 225 ab, das ist von dem Quadrate der längern Seite, so bleiben 56. Die Hälfte dieser Zahl ist 28. Man theilt sie durch 14, die Differenz zwischen Grundlinie und Abschnittskopf, das liefert 2. Wenn man dies zu 7, der halben Differenz von Grundlinie und Kopf, addiert, so entstehen 9, und das ist die Länge der Strecke *be*, der Entfernung der Höhe von der längern Seite *ab*. Zieht man aber dasselbe von 7 ab, so bleiben 5, und das ist die Länge der Strecke *df*, der Entfernung der Höhe von der kleinern Seite.[2])

Die Beweise dafür findet man gemäss den Beweisen, die für die Höhe der ungleichseitigen Dreiecke geführt sind. Denn, wenn man von der Grundlinie die Länge des Kopfes abschneidet, so bleibt als Rest *bg*, als einer stetigen Linie Länge übrig. Nun denke man sich den Punkt *a* gleichsam mit dem Punkte *g* verbunden und dadurch die Form eines Dreiecks entstanden, dann kann man den längern oder kürzern Höhenabschnitt wie im ungleichseitigen Dreiecke auffinden.

11. Will man ferner *die Länge der Höhe* kennen lernen, so ziehe man das Quadrat eines der beiden Höhenabschnitte von dem Quadrate der Seite ab, welche jedesmal demselben anliegt. Sucht man dann die Wurzel des Restes, so findet man die Länge der Höhe.

Vervielfacht man z. B. 9, das ist die Linie *be*, der längere Höhenabschnitt, mit sich selbst, so kommt 81; zieht man das von 225, dem Quadrate der Geraden *ab*, das ist der längern Seite, so bleibt 144 als Rest,

et haec est perpendicularis *ae* longitudo. Similiter etiam, si 5, quae sunt casus brevior, in semet duxeris, 25 reperies. Quae si ex 169, quod est brevioris lateris multiplicatio, dempta fuerit, 144 remanebunt, quod est perpendicularis *ef* ⟨multiplicatio⟩, cuius longitudo est 12, sicut et alterius perpendicularis. Huius nempe demonstrationem ex demonstratione, quam superius in prima caput abscissa monstravimus, addisces.[1])

12. Istius autem *caput abscissae area* ex multiplicatione unius perpendicularis in totius capitis ⟨et⟩ totius basis dimidium sicut et in aeque caput abscissa colligitur.[2])

Verbi gratia si in hac eadem figura 8, quae sunt capitis totius summa, et 22, quae sunt totius basis quantitas, coadunaveris, 30 colligentur, | quo- 16
rum medietate sumpta, quod est 15, si eam in 12, quod est perpendicularis summa, multiplicaveris, 180 procreabuntur, et haec est huius capitis abscissae area.

15. Quod si eiusdem figurae *diametra* scire volueris, totius capitis totiusque casus perpendicularis summam in unum colligens inde collectum in se ipsum multiplica, eique multiplicationi perpendicularis in se ipsam multiplicationem superadde, et quod habueris erit illius diametri in semet multiplicatio, quod est contiguum illi lateri, cuius a perpendiculari remotionem capiti coadunaveras.

Veluti si brevius diametrum *ad* scire desideras, 8, qua totius capitis summa constituitur, cum 5, quae sunt casus brevior, coadunabis, et 13 efficies, quorum in semet multiplicatio 169 colligit. Perpendicularis vero multiplicatio 144 in se complectitur. Haeque duae multiplicationes in unum coadunatae 314 efficiunt, quod est brevioris diametri *ad* in se ipsum multiplicatio.

Item si longius diametrum *bc* nosse volueris, 8 quae sunt summa capitis, et 9, quae sunt casus longior, in unum colligens 17 invenies, quorum multiplicatio 289 colligit. Quibus si 144, quae sunt perpendicularis multiplicatio, superaddideris, 433 nimirum invenies, et haec est longioris diametri *bc* multiplicatio.[3])

14. Ac si huius capitis abscissae verticem invenire desideras, id est, si duas *ba*, *dc* lineas, donec ad idem punctum *f* concurrant, abstraxeris, et duarum linearum *af*, *cf* longitudinem nosse volueris, perpendicularis casum, qui in triangulo *bfd* forte ceciderit, taliter addiscas. Superfluum, quod inter basim et abscisionis caput exstiterit, quod est 14, inquirens, utriusque casus proportionem ad illud addisce. Verum in hac caput ab-

---

4 multiplicatio *fehlt.* — 8 et *fehlt.* — 11 colligantur *A.* — 13 multiplicaveris summa. — 32 At si *B.* — id est] idem.

und das ist das Quadrat der Höhe. Multipliciert man in ähnlicher Weise 5, das ist den kleinern Höhenabschnitt, mit sich selbst, so findet man 25, und das von 169, dem Quadrate der kleinern Seite weggenommen, lässt 144 zum Rest, und das ist das Quadrat der Höhe *ef*, deren Länge 12 ist, wie die der andern Höhe. Den Beweis dafür kann man nach dem Beweise führen, den wir oben bei der ersten Art der Trapeze gezeigt haben.[1])

12. Der Flächeninhalt unseres Trapezes wird als Produkt einer der beiden Höhen mit der Hälfte der Summe der ganzen Grundlinie und des ganzen Kopfes gefunden, wie für das gleichschenklige Trapez.[2])

Addiert man z. B. für dieses Trapez 8, das ist die Länge des ganzen Kopfes, zu 22, der Länge der ganzen Grundlinie, so erhält man 30. Nimmt man nun ihre Hälfte, also 15, und vervielfacht dieses mit 12, das ist mit der Länge der Höhe, so erzeugt das 180, und das ist der Inhalt unseres Trapezes.

13. Sollen die *Diagonalen* derselben Figur gefunden werden, so addiere man die Länge des ganzen Kopfes und des ganzen Höhensegmentes zusammen, multipliciere die Summe mit sich selbst und füge diesem Quadrate das Quadrat der Höhe hinzu. Was man dann erhält, ist das Quadrat der ganzen Diagonale, welche jener Seite anliegt, deren Höhensegment man dem Kopfe hinzugefügt hat.

Zur Auffindung der kürzern Diagonale *ad*, addiert man also 8, die die Länge des ganzen Kopfes darstellt, zu 5, dem kürzern Höhenabschnitt, und erhält 13. Das Quadrat davon enthält 169. Das Quadrat der Höhe ist aber 144; beide Quadrate zusammengezählt geben 314, und das ist das Quadrat der kleinern Diagonale *ad*.

Ebenso addiert man zur Bestimmung der grössern Diagonale die Länge 8 des Kopfes, zu 9, dem längern Höhenabschnitt, und findet 17. Das Quadrat davon ergiebt 289. Addiert man hierzu 144, nämlich das Quadrat der Höhe, so findet man 433, und das ist das Quadrat der längeren Diagonale.[3])

14. Will man aber den Scheitel dieses Trapezes bestimmen, das heisst, will man die Grösse der durch Verlängerung der beiden Geraden *ba*, *dc*, bis sie in demselben Punkte *f* zusammenlaufen, entstehenden zwei Geraden *af*, *cf* auffinden, so kann man folgendermaassen ergründen, wohin im Dreiecke *bfd* der Höhenfusspunkt fallen wird. Man suche die Differenz zwischen der Grundlinie und dem Kopfe, sie ist 14, und bestimme das Verhältnis jedes der beiden Höhensegmente zu derselben. Nun ist für unsere Figur der kürzere Höhenabschnitt 5, und das sind $\frac{2}{7} + \frac{1}{14}$ $\left(\frac{5}{14}\right)$ von jener Differenz.

1) Leonardo 82, 5. 2) Leonardo 82, 9. 3) Leonardo 82, 11.

scissa brevior casus est 5, quae sunt illius superflui duae septimae et semis. Hanc itaque proportionem si de totius basis summa, quae est 22, depresseris, 8 minus septima reperies. Quibus de basi *bd*, quae est 22, ex parte brevioris lateris, id est a puncto *d*, resectis supra punctum *h* sectionis casus reperietur. Lineam igitur *hd* longitudinem 8 minus septima continere non dubites, et hoc est perpendicularis casus ⟨in⟩ triangulo *fbd* ex parte lateris brevioris. Cumque ex linea *hd*, quae est 8 minus septima, lineam *gd*, quae est 5, et hic est casus brevior, depresseris, linea *gh* 3 ulnarum minus septima remanebit, et hoc est superfluum, quod inter casum perpendicularis trianguli et breviorem casum perpendicularis caput abscissae continetur. Hoc itaque superfluum si in latus brevius figurae caput abscissae, quod est 13, multiplicaveris, 37 et septimam procreabis. Cuius numeri summam si per breviorem casum caput abscissae, quae est 5, diviseris, 7 et tres septimas invenies, quod est id, in quo latus trianguli breve | caput abscissae latus excedit, et ipsa est linea *cf* ex parte bre- 16′
vioris lateris producta (Fig. 27).

Item si longiorem *af* lineam nosse cupis, longiorem casum in triangulo, quemadmodum et breviorem, inquirens, eum 14 et septimam continere reperies, ⟨qui⟩ longiorem caput abscissae casum in 5 et septima superabit. Quae si in latus longius, quod est 15, multiplicaveris, 79 ac septimam invenies. Cuius numeri summam si in 9, quae sunt caput abscissae longior casus, diviseris, 8 et quatuor septimae unius exibunt, quod est id, in quo latus trianguli longius caput abscissae longius latus excedit, et ipsum est linea *af*.[1])

15. Ast si perpendicularis quantitatem non ignorare desideras, superfluum brevioris casus, quae est 3 minus septima, in perpendicularem caput abscissae, quae est 12, multiplica, et quod fuerit, per breviorem casum, qui est 5, partire, vel, si volueris, superfluum longioris casus, quod est 5 et septima, in caput abscissae cathetum, quod est 12, multiplica, et per longiorem casum, qui 9 in se continet, partire. Quocumque istorum modorum operabis, ad idem pervenies, et illud erit 7 minus septima, quod est id, in quo perpendicularis trianguli caput abscissae cathetum excedit. Illud igitur 12, quae sunt caput abscissae cathetus, superadde, indeque collectum

---

2—3 depresserit *A*. — 6 casus] caput. — in *fehlt*. — 13 si per] super *B*. — 17 causam. — 19 qui *fehlt*. — septimam. — 21 summa.

---

1) Leonardo 82, 22.

Nimmt man nach diesem Verhältnis von der ganzen Länge der Grundlinie, das ist von 22, so findet man 8 weniger $\frac{1}{7}$, und schneidet man dieses von der Grundlinie, die 22 beträgt, von der kleinern Seite aus, also vom Punkte *d*, ab, so findet man im Punkte *h* den Höhenfusspunkt. Die Strecke *hd* hat also eine Länge von 8 weniger $\frac{1}{7}$, und das ist der Höhenabschnitt im Dreiecke *fbd* von der kleinern Seite ab gerechnet. Nimmt man ferner von der Geraden *hd*, die 8 weniger $\frac{1}{7}$ beträgt, die Gerade *gd* weg, deren Länge 5 ist, es ist der kleinere Höhenabschnitt (des Trapezes), so bleibt die Strecke *gh* mit 3 Ellen weniger $\frac{1}{7}$ übrig, das ist also die Differenz zwischen dem Höhenabschnitte des Dreiecks und dem kleinern Höhenabschnitte des Trapezes. Durch Multiplikation dieser Differenz mit der kleinern Seite des Trapezes, nämlich mit 13, entsteht $37\frac{1}{7}$, und dividiert man nun diese Zahl durch den kleinern Höhenabschnitt des Trapezes, der 5 beträgt, so findet man $7\frac{3}{7}$, und das ist der Betrag, um welchen die Seite des Dreiecks die kürzere Seite des Trapezes übertrifft, also der Geraden *cf*, welche die Verlängerung der kleinern Seite bildet (Fig. 27).

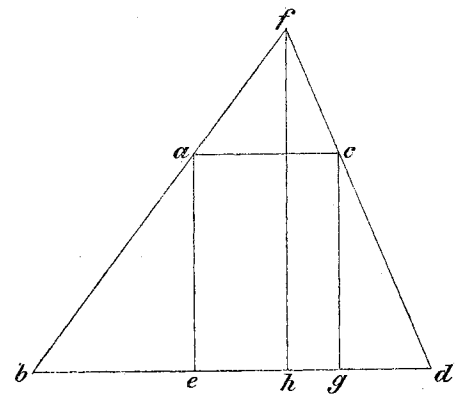


Fig. 27.

Um die längere Linie *af* zu finden, sucht man in ähnlicher Weise wie den kürzern den längern Höhenabschnitt des Dreiecks, und findet, dass er $14\frac{1}{7}$ enthält. Er übertrifft den längern Höhenabschnitt des Trapezes in $5\frac{1}{7}$. Multipliciert man dies mit der längern Seite, die gleich 15 ist, so findet man $77\frac{1}{7}$, und nach Division durch 9, den längern Höhenabschnitt (des Trapezes), kommen $8\frac{4}{7}$, und um soviel übertrifft die längere Seite des Dreiecks die grössere Seite des Trapezes, und das ist die Gerade *af*.[1])

15. Soll man aber auch die Länge der Höhe ermitteln, so multipliciere man den Überschuss des kürzern Höhenabschnittes, das ist 3 weniger $\frac{1}{7}$, mit der Höhe des Trapezes, die 12 beträgt, und theile das Ergebnis durch den kleinern Höhenabschnitt, also durch 5, oder, wenn es beliebt, man multipliciere den Überschuss des grössern Höhenabschnittes, das ist $5\frac{1}{7}$, mit der Höhe des Trapezes, also mit 12, und dividiere durch 9, den längern Höhenabschnitt. Auf welche Art man auch vorgeht, kommt man auf dasselbe Ergebnis, das ist auf 7 weniger $\frac{1}{7}$, und das ist der Überschuss der Dreieckshöhe über die Höhe des Trapezes. Addiert man also 12, die Trapez-

19 minus septima continebit, et haec est linea *fh*, quae perpendicularis trianguli dicitur longitudo, quemadmodum in hac figura describitur.

16. Tertiae quidem maneriei est figura caput abscissa, cuius caput et basis sunt aequidistantia, alterumque latus super basim perpendiculariter erigitur. Haec autem figura *semicaput abcissa* nuncupatur. Ad huius itaque similitudinem quaedam *abcd* figura describatur (Fig. 28), cuius caput *ac* 8, basisque *bd* 20, longius quoque latus *ab* 15 brevius vero latus *cd*, quod etiam perpendiculariter supra basim *bd* elevatur, 9 ulnas contineat. Istius autem figurae caput si basi superaddideris et collecti dimidium accipiens in perpendicularis summam multiplicaveris, huius *caput abscissae aream* invenies.[1])

Verbi gratia si in hac figura caput suae basi superadiunxeris, 28 colligentur, cuius summae dimidium 14 reddit, quae in perpendicularis quantitatem, quae est 9, multiplicata 126 procreabunt, et haec est caput abscissae area.

17. Istius quidem *brevius diametrum*, quod est *ad*, si scire volueris, caput, id est 8, in se ipsum multiplicans 64 invenies. Quibus si brevioris lateris, id est perpendicularis multiplicationem, quae est 81, superadderis, 145 coadunabuntur, et haec ⟨est⟩ diametri multiplicatio. Cuius summae radix brevioris diametri quantitatem efficiet. Verum si *longius diametrum* eiusdem nosse desideras, multiplicationi basis perpendicularis multiplicationem superadde, et inde 481 provenient, quae sunt longioris diametri multiplicatio, ut in hac repraesentatur figura.[2]) | 17

18. Item si huius *caput abscissae perfectionem* habere volueris, quemadmodum et in praecedenti caput abscissa monstravimus, operabis, quod est, ut id, in quo basis caput excesserit, quod hac figura 12 fore dicitur, addiscas. Cumque caput in lineam *ab* multiplicaveris et per basis excessum diviseris, illius lineae longitudo proveniet, quae a latere *ab* ad trianguli finem protrahitur. Si autem in perpendicularem *ac* caput duxeris et per basis excessum inde collectum partitus fueris, illius lineae longitudinem, quae a perpendiculari ad finem trianguli producitur, invenies. Tu autem ipse ad aliarum figurarum exemplar tibi figuram formare poteris.[3])

19. Quartae vero maneriei est figura caput abscissa, cuius caput et basis aequidistantia sunt, alterumque duorum laterum supra basim ⟨secundum⟩ hebetem angulum elevatur. Haec autem caput abscissa duas perpen-

---

4 perpendicularem. — 17 id est] idem. — 19 est *fehlt*. — 27 in eam lineam *B*. — 31 ad perpendicularis ad. — 32 figurarum] figuram. — 34—35 secundum *in A über der Zeile ausradiert.*

---

1) Leonardo 80, 29. 2) Leonardo 81, 5. 3) Leonardo 81, 16 v. u.

höhe, hinzu, so ist die Summe gleich 19 weniger $\frac{1}{7}$, und das ist die Gerade *fh*, die Länge der Dreieckshöhe, wie in der Figur gezeichnet ist.

16. Die dritte Unterart ist das Trapez, dessen Kopf und Grundlinie parallel sind, und dessen eine Seite senkrecht auf der Grundlinie steht. Dieses Trapez heisst mit *halbabgeschnittenem Kopfe.* Für diese Art werde also die Figur *abcd* gezeichnet (Fig. 28), deren Kopf *ac* 8, die Grundlinie *bd* 20, die längere Seite *ab* 15, die kürzere Seite *cd* aber, welche auf der Grundlinie senkrecht steht, 9 Ellen enthalte. Addiert man in dieser Figur den Kopf zur Grundlinie und multipliciert die Hälfte der Summe mit der Höhe, so erhält man den Inhalt des Trapezes.[1])

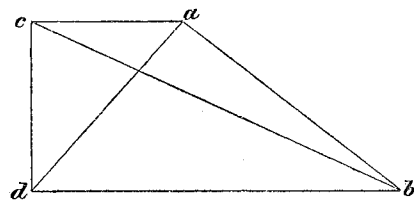


Fig. 28.

Addiert man z. B. in diesem Trapeze den Kopf zur Grundlinie, so erhält man 28. Die Hälfte davon ist 13, und durch Multiplikation derselben mit der Länge der Höhe, das ist mit 9, kommen 126, und das ist der Inhalt unseres Trapezes.

17. Zur Bestimmung der *kleinern Diagonale ad* multipliciert man den Kopf, das ist 8, mit sich selbst, und findet 64. Addiert man hierzu das Quadrat der kleinern Seite, das ist der Höhe des Trapezes, nämlich 81, so ist die Summe 145, und das ist das Quadrat der Diagonale. Um aber die *längere Diagonale* zu bestimmen, addiere man zu dem Quadrate der Grundlinie das Quadrat der Höhe, dann kommen daraus 481, und das ist das Quadrat der grössern Diagonale, wie in der beigegebenen Figur dargestellt wird.[2])

18. Um ferner die *Vollendung des Trapezes* zu finden, verfährt man ebenso, wie wir für die früheren Trapeze gezeigt haben. Man sucht nämlich den Unterschied zwischen der Grundlinie und dem Kopfe, der in unserer Figur gleich 12 ist. Multipliciert man nun den Kopf mit der Geraden *ab* und dividiert das Produkt durch den Überschuss der Grundlinie, so erhält man den Betrag der Linie, welche als Verlängerung der Seite *ab* zur Spitze des Dreiecks gezogen ist. Vervielfacht man aber die Höhe mit dem Überschuss der Grundlinie, so findet man die Länge der Geraden, welche als Verlängerung der Höhe bis zur Spitze des Dreiecks gezogen ist. Der Leser aber möge nach dem Beispiele der vorhergehenden Figuren sich selbst die betreffende Figur konstruieren.[3])

19. Die vierte Unterart aber bildet das Trapez, dessen Kopf und Grundlinie parallel sind, und dessen eine Seite mit der Grundlinie einen stumpfen Winkel bildet. Dieses Trapez besitzt zwei Höhen im Innern und

diculares infra se et unam extra continet, vocaturque *caput abscissa* ⟨*declinans*. Ad cuius similitudinem esto caput abscissa⟩ *abcd* (Fig. 29), cuius caput *ac* 14, basis vero *db* 21, longiusque latus *ab* 20, breviusque latus *cd* 15 ulnas amplectitur. Huius nempe caput abscissae aream per suarum perpendicularium abstractionem addiscas, sed prius terminum casus perpendicularis te non ignorare necesse est. Eum igitur sic ratione procedens cognosces. Caput scilicet, quod est 14, de basi, quae est 21, demens, 7 tibi supererit, quae sunt differentia basis. Hanc autem si in se ipsam duxeris, et quod fuerit, multiplicationi brevioris lateris superaddideris, 274 invenies. Cuius numeri summam si ex multiplicatione longioris lateris in se ipsum, quae est 400, proieceris, 126 remanebunt, quorum medietatem, quae est 63, si per 7, quae sunt basis differentia, diviseris, exibunt 9. Quae si differentiae basis, quae 7 sunt, superaddideris, 16 nimirum reperies, quae sunt terminus casus perpendicularis ex parte lineae *ab* longioris. Haec autem superius 9 inventa sunt brevior casus perpendicularis *eg* supra basim *bd* extra figuram elevatae. Eadem scilicet 9 etiam sunt casus interioris perpendicularis *df* supra punctum *d* cadentis.[1])

20. Verum si *perpendicularis longitudinem* nosse desideras, eius quamlibet casum in se ipsum multiplica, et si longiorem casum, quae est 16, multiplicaveris, eius multiplicationis summam ex longioris lateris multiplicatione, scilicet lateris, quod est 20, deme. Si vero breviorem casum multiplicaveris, inde collectum ex brevioris lateris multiplicatione minue, quodque ex quolibet istorum remanserit, 144 continebit, et haec est perpendicularis in semet multiplicatio. Cuius summae radix 12 in se complectitur, quod est perpendicularis longitudo.[2])

21. Istius quippe *caput abscissae aream* ex multiplicatione perpendicularis in totius basis totiusque capitis dimidium, quemadmodum in aliis figuris praemissis, quae caput abscissae dicuntur, indicavimus, agnosces. Erit scilicet area 210.

22. Demonstratio vero istius abstractionis perpendicularis est ut demonstratio diversae caput abscissae superius diligenter ostensa. Cum enim caput ex basis summa diminutum fuerit et 7 reman|serit, erit ille 7 latus 17′
trigonii ampligonii, cuius unum latus 7, alterum 15 continet, et haec sunt latera, quae obtuso adiacent angulo. Cuius anguli corda, quae est huius figurae caput abscissae linea *ab*, 20 continere non dubitatur. Quod si in

1—2 declinans . . . abscissa *in A auf dem Rande ausradiert.* — 6 procedere. — 10 summa. — 12 exibunt 8 *A.* — 14 casus casus *A.* — 21 scilicet latus. — 34 adiacent] ad invicem.

1) Leonardo 82, 11 v. u. 2) Leonardo 83, 4.

eine ausserhalb, es heisst aber Trapez *mit geneigt abgeschnittenem Kopfe.* Nach dieser Art sei ein Trapez *abcd* (Fig. 29) gezeichnet, dessen Kopf *ac* 14, die Grundlinie *db* aber 21, die längere Seite *ab* 20, die kürzere *cd* 15 Ellen betrage. Auch dieses Trapezes Flächeninhalt findet man durch Bestimmung seiner Höhen. Dazu muss man aber zunächst den Höhenfusspunkt auffinden. Diesen lernt man auf folgende Art kennen. Den Kopf von 14 Ellen Länge nimmt man von der Grundlinie weg, das ist von 21, es bleiben 7 übrig, der Überschuss der Grundlinie. Ihn multipliciert man mit sich selbst

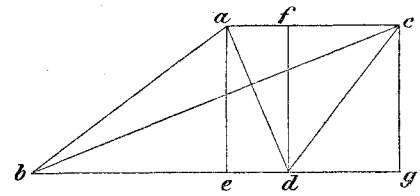


Fig. 29.

und addiert dazu das Quadrat der kleinern Seite, man erhält so 274. Subtrahiert man das von dem Quadrate der längern Seite, das ist von 400, so bleibt 126 als Rest. Theilt man die Hälfte davon, also 63, durch 7, den Überschuss der Grundlinie, so ist der Quotient 9. Addiert man diesen zu dem Überschuss der Grundlinie 7, so erhält man 16, und das ist die Länge des von der grössern Seite *ab* aus gerechneten Höhensegmentes. Die oben gefundene 9 aber ist der Abschnitt der kleinern Höhe *cg* auf der Verlängerung der Grundlinie *bd* ausserhalb der Figur. Dieselbe 9 ist auch das Höhensegment der innern Höhe *df*, die im Punkte *d* errichtet ist.[1])

20. Zur *Ermittelung der Höhe* selbst vervielfache man einen beliebigen Höhenabschnitt mit sich selbst, und ziehe dieses Quadrat, und zwar, wenn man den längern Abschnitt, also 16, benutzt hat, von dem Quadrate der längern Seite, nämlich dem von 20, ab, wenn man aber den kleinern Abschnitt quadriert hatte, zieht man das Quadrat von dem Quadrate der kleinern Seite ab. Auf beide Arten werden dann gleichmässig 144 übrig bleiben, und das ist das Quadrat der Höhe. Seine Wurzel ist 12, und das ist die Länge der Höhe.[2])

21. Den *Flächeninhalt dieses Trapezes* erhält man durch Multiplikation der Höhe mit der Hälfte der Summe aus der ganzen Grundlinie und dem ganzen Kopfe, wie wir für die früheren Trapezarten gezeigt haben. Derselbe wird übrigens gleich 210 gefunden.

22. Der Beweis für die Berechnung der Höhe ist dem Beweise für die Höhe des Trapezes mit ungleich abgeschnittenem Kopfe ähnlich, den wir oben führten. Wenn man nämlich den Kopf von der Grundlinie abschneidet, so dass 7 Rest bleiben, so ist diese 7 die Seite eines stumpfwinkligen Dreiecks, dessen eine Seite 7, die andere 15 enthält, das sind die beiden Seiten, welche dem stumpfen Winkel anliegen. Die Sehne dieses Winkels aber, es ist die Seite *ab* des Trapezes, beträgt 20. Fällt man

hoc triangulo ampligonio perpendicularem, extra scilicet triangulum ipsum, erexeris, eius casum exteriorem 9 continere cognosces, sicut superius numerando monstravimus.

23. Huius etiam *caput abscissae longius diametrum* invenies, si exterioris perpendicularis casum basi superaddideris et in se ipsum multiplicaveris, eique multiplicationi perpendicularis multiplicationem superadiunxeris. Veluti si in hac figura 21, quae sunt totius basis summa, 9, quae sunt exterioris perpendicularis casus, superadderis, 30 colliguntur. Cuius numeri summa in semet multiplicata eique perpendicularis multiplicatione in semet ipsam superaddita 1044, quod est totius diametri longioris multiplicatio, reperies. Cuius summae radix huius caput abscissae ⟨diametri⟩ longitudinem a puncto *c* usque ad punctum *b* protracti notificat. Si autem *brevius diametrum,* quod a puncto *a* ad punctum *d* protrahitur, nosse volueris, multiplicationi perpendicularis multiplicationem excessus basis super casum longiorem, qui est 5, superadde, eruntque hae duae multiplicationes in unum collectae 169, quod est brevius diametri multiplicatio, cuius numeri radix est diametri longitudo.[1])

Istius quidem demonstrationem per praemissas demonstrationes intelligeres.

24. In hac autem figura perpendicularis eiusdem caput abscissae idem cum breviori eius diametro multotiens esse poterit. Veluti si in hac alia figura (Fig. 30) longitudo capitis 9, eius basis 16, duorumque reliquorum laterum quantitas eadem, quae est in superiori figura, fuerit, perpendicularem a puncto *a* ad punctum *d* necessario protrahendam et ipsius insuper eandem eiusdem figurae brevius diametrum existere non dubitabis, eritque tunc longioris diametri longitudo, quae a puncto *c* ad punctum *b* distenditur, radix 769, quod est multiplicatio perpendicularis *ad* coniuncta multiplicationi lineae *ac* et lineae *bd*, cum ad unam lineam efficiendam convenerint, et ipsa est figurae caput abscissae, caput et basis.

Tu autem ipse ipsius demonstrationem, si subtiliter observaberis, plane cognosces.

25. *Secundi generis vero figurarum quadrilaterarum,* ut praediximus, illa quadrilatera dicuntur, quorum nulla duo latera sunt aequidistantia. Harum autem figurarum embada nullus nisi per triangulorum, in quibus ipsi dividuntur, areas investigare poterit. Omneque quadrilaterum in duos triangulos resolvitur, et manifestum est, quod, qui illorum triangulorum areas non ignoraverint et eas in unum coadunaverint, quadrilateri emba-

---

15 eritque *A*. — 21 multotiens] multiplicationes. — 33 nulla] alteri. — 35 poteris.

nun in diesem Dreiecke die ausserhalb derselben gelegene Höhe, so findet man als Betrag des ausserhalb liegenden Höhenabschnittes 9, wie wir oben durch Rechnung gezeigt haben.

23. Die *längere Diagonale des Trapezes* findet man, indem man den äussern Höhenabschnitt zur Grundlinie addiert, das Ergebnis mit sich selbst multipliciert, und hierzu das Quadrat der Höhe addiert. In unserer Figur ergiebt die ganze Grundlinie, nämlich 21, und der äussere Höhenabschnitt, nämlich 9, zusammen 30. Das Quadrat davon und das Quadrat der Höhe zusammengenommen ergeben 1044, und das ist das Quadrat der längern Diagonale unseres Trapezes, derjenigen, welche vom Punkte *c* nach dem Punkte *b* gezogen ist. Um aber die *kleinere Diagonale,* die vom Punkte *a* nach dem Punkte *d* gezogen ist, kennen zu lernen, addiert man zum Quadrate der Höhe das Quadrat von 5, des Überschusses der Grundlinie über den längern Höhenabschnitt, und beide Quadrate sind zusammen 169, das ist das Quadrat der kleinern Diagonale, und die Wurzel aus dieser Zahl ist die Länge der Diagonale.[1])

Der Beweis dafür ist nach den frühern Beweisen leicht zu verstehen.

24. In einem solchen Trapeze kann übrigens die Höhe oftmals mit der kleinern Diagonale zusammenfallen, wie z. B. in diesem andern Trapeze (Fig. 30), dessen Kopf 9, die Grundlinie 16, die Länge der beiden andern Seiten aber dieselbe ist wie im vorhergehenden Trapeze, die vom Punkte *a* gefällte Höhe nothwendigerweise durch den Punkt *d* gehen muss. Sie ist also unzweifelhaft zugleich die kleinere Diagonale des Trapezes. In diesem Falle ist die längere Diagonale gleich $\sqrt{769}$, das ist die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Höhe *ad* und der zu einer Geraden vereinigten Linien *ac* und *bd*, welche zugleich die Summe aus dem Kopfe und der Grundlinie ist.

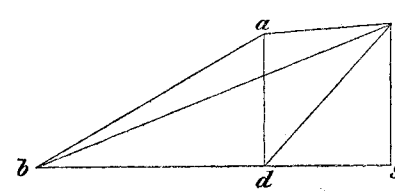


Fig. 30.

25. *Die zweite Art der vierseitigen Figuren* enthält, wie wir schon oben sagten, diejenigen Vierecke, bei denen keine Seite einer andern parallel ist. Den Flächeninhalt solcher Figuren kann niemand, ohne die Inhalte der Dreiecke, in welche sie getheilt werden können, zu Hilfe zu nehmen, berechnen.

Nun kann jedes Viereck in zwei Dreiecke aufgelöst werden, und es ist klar, dass man, wenn man den Inhalt dieser Dreiecke kennt und sie

1) Leonardo 83, 14.

dum, cuius et ipsi partes exstiterint, adinveniet. Hac itaque via omnium quadrilaterorum embada, sive tetragonica, sive parallelogramma, seu quolibet alio, id est diversilateri modo, formata fuerint, adinvenies, praeter quod aequilaterorum atque parallelogrammorum areas aliter etiam adin-
5 venire valebis, nec tibi suorum | triangulorum areas erit numerare necesse. 18
Aliorum vero quadrilaterorum diversorum laterum areae, quorum nulla duo latera sunt aequidistantia, non nisi per triangulos investigantur.

26. Ad cuius rei evidentiam illa, licet non prorsus eadem figura, qua praesens opus terminatum est, quae est quarta caput abscissa declinans,
10 satis ad aliarum figurarum notitiam superficies in exemplari describatur (Fig. 31), cuius latus *ac* 14, latus vero *bd* 21, et latus *ab* 20, latus quoque *cd* 15 mensuras amplectitur. Huius quippe brevius diametrum, quemadmodum numerando superius inveneras, 13 ulnarum exstiterit. Quod si forte in hac eadem figura alius maioris minorisve quantitatis, veluti si
15 16 ulnarum illud idem diametrum inveneris, hanc figuram nequaquam caput abscissam nuncupabis. Nulla etenim eius latera erunt aequidistantia. Nam si qua eius latera aequidistantia forent, eiusdem diametra nullatenus a praedictis quantitatibus deviarent. Quapropter duorum triangulorum *abd*, *adc* embada, in quibus hoc quadrilaterum a diametro supra protracto divi-
20 ditur, te non ignorare necesse est. Horum autem triangulorum latera sunt nota, ideoque ipsorum areas per suorum perpendicularium inventionem; ut supra docuimus, adinvenire poteris. Embadum igitur trianguli *adb* ⟨96 ulnarum et modicum minus una tertia, embadum vero trianguli *adc*⟩ 150 et parum minus duabus tertiis continere reperies. Erit itaque totius quadri-
25 lateri embadum 247 fere, scilicet quia parum minus continetur. Eius autem embadum in caput abscissa declinantis dispositione 210 ulnarum invenies. Verum quia in istius figurae dispositione diametrum crevit, et eius embadum similiter suscepit augmentum. Si vero diminutionem accepisset diametrum, et embadi quantitas similiter.[1])

30 **27.** Quapropter perpendicularis hanc regulam assignare poteris. *Omne quadrilaterum, cuius diametrum protrahitur, in duobus triangulis resolvitur, cumque in utroque triangulo perpendicularem supra diametro erexeris et utriusque perpendicularis summam in unum coadunaveris, collectique dimidium acceperis et illud in totius diametri summam multiplicaveris, vel si*

---

2 paralellograma *und so immer*. — 8 qua] quam. — 16 nuncubabis *A*. — erit. — 22—23 96 ulnarum ... trianguli *adc in A auf dem Rande ausradiert*. — 26 dispositio. — 32—33 et ut utriusque.

---

1) Leonardo 83, 21.

dann zusammenfasst, den Inhalt des Viereckes, dessen Theile sie sind, gefunden hat. Auf diesem Wege kann man also den Inhalt sämmtlicher Vierecke bestimmen, mögen es nun Quadrate oder Parallelogramme sein, oder mögen sie auf irgend eine andere Art als ungleichseitig gebildet sein, nur dass man den Inhalt der gleichseitigen Vierecke und Parallelogramme auch auf andere Weise zu bestimmen vermag, und man nicht nöthig hat, die Flächen ihrer Dreiecke zu berechnen, während die Flächeninhalte der andern ungleichseitigen Vierecke, bei denen keine Seite einer andern parallel läuft, sich nur durch die Dreiecke finden lässt.

26. Zum Augenscheine zeichne man die Gestalt der, wenn auch nicht in allen Stücken, gleichen Figur nochmals, mit welcher wir die vorhergehende Theorie beschlossen haben, die der vierten Unterart der Trapeze, da sie zur Kenntnis auch anderer Figuren hinreicht (Fig. 31). Ihre Seite ac enthalte 14, die Seite bd 21, die Seite ab 20 und die Seite cd 15 Maasseinheiten. Die kürzere Diagonale fanden wir oben zu 13 Ellen. Fände man nun diese Diagonale in derselben Figur von grösserem oder kleinerem Betrage, etwa von 16 Ellen, so kann man das Viereck keinesfalls ein Trapez nennen, denn es ist dann keine Seite einer andern parallel.

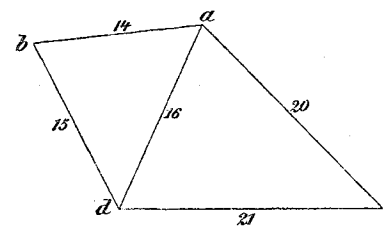


Fig. 31.

Wären nämlich die beiden Seiten parallel, so könnten die beiden Diagonalen in keiner Weise von den frühern Beträgen abweichen. Man muss also hier die Flächenräume der beiden Dreiecke abd, adc kennen, in welche das Viereck durch die oben gezogene Diagonale zerfällt. Nun kennt man die Seiten dieser Dreiecke, man kann also auch ihre Flächeninhalte durch Bestimmung ihrer Höhen, wie wir oben gesagt haben, finden. Der Inhalt des Dreiecks adb ist aber 96 und eine Kleinigkeit weniger als $\frac{1}{3}$ Quadratelle, der Inhalt des Dreiecks adc jedoch 150 und etwas weniger als $\frac{2}{3}$, also ist der Inhalt des ganzen Vierecks nahezu 247, da er nur um eine Kleinigkeit weniger enthält. In der Gestalt eines geneigten Trapezes aber wäre der Inhalt nur 210 Quadratellen. Da aber bei der Anordnung unserer Figur die Diagonale sich vergrösserte, so wuchs dementsprechend auch der Inhalt. Hätte sich aber die Diagonale verringert, so hätte das auch der Inhalt entsprechend gethan.[1])

27. Man kann also folgende Regel für die Höhe angeben. *Durch Ziehen einer Diagonale wird jedes Viereck in zwei Dreiecke getheilt. Fällt man nun in jedem dieser Dreiecke die Höhe auf die Diagonale, addiert die Beträge der beiden Höhen zusammen, und multipliciert die Hälfte der Summe mit der ganzen Länge der Diagonale, oder multipliciert die ganze Summe*

utriusque perpendicularis summam in totius diametri dimidium duxeris, quadrilateri aream nimirum invenies.

Ad harum itaque figurarum notitiam cum ista sufficiant, plura tibi monstrare supervacaneum ducimus. Tertiae igitur particulae quadrilaterorum hoc in loco finem congruum imponentes, quartae partis notitiam, qua circulares ac semicirculares figuras, et quae sunt plus minusve semicirculo, metiri possumus, deo adiuvante monstrabimus.

Pars quarta in arearum camporum circularium ac semicircularium, | et quorum formae sunt plus minusue semicirculo perfecto, 18′ *cognitione.*

1. *Perfecti quidem circuli aream nosse poteris,* si eius diametri cognitionem habueris. Igitur si diametri summam in 3 et septimam multiplicaveris, circumferentiae circuli longitudinem reperies. Qua inventa, si diametri dimidium in dimidium circumferentis lineae duxeris, circuli embadum nimirum invenies.[1])

Ad cuius evidentiam esto circulus (Fig. 32), cuius diametrum 14 contineat, quod in tria et septimam multiplicatum 44 reddet, et haec est circumferentis lineae longitudo. Cumque diametri dimidium, quod est 7, in circumferentis lineae dimidium, quod est 22, multiplicaveris, 154 inde provenient, et haec erit circuli area.

2. *Circuli autem aream aliter absque circumferentis lineae cognitione sic investigare poteris.* Diametrum scilicet in se ipsum multiplicans ex inde collecto septenam septenaeque partis dimidium deme, et reliquum erit totius circuli area. In hac namque supradicta similitudine totius diametri in semet multiplicationem 196 continere reperies. De cuius numeri summa si septenam septenaeque partis dimidium, quod est 42, depresseris, 154, sicut et supra, relinquentur, et hoc erit circuli embadum.[2])

3. Haec autem numeratio fit, secundum quod circumferentem circuli lineam suo diametro triplam septima superaddita confitentur, ideoque, si ex diametri multiplicatione septimam septimaeque dimidium minueris, embadum invenies. Illi vero, qui subtiliter circulum numerare nituntur, et sunt illi, qui stellarum loca veraciter inveniunt, circumferentem circuli

6 deo] χpo. *Da* Savasorda *als Jude jedenfalls dieses letztere Wort nicht gebraucht hat, so habe ich diese dem Übersetzer oder Abschreiber zur Last fallende Ausdrucksweise in obiger Art umgeändert.* — 8 *B. setzt vor dieser Zeile noch hinzu:* Pars quarta secundae partis. — 21 cognitionem. — 25 multiplicatione.

1) Leonardo 86, 16. D. h. $\pi = 3\frac{1}{7}$, $J = \frac{d}{2} \cdot \frac{P}{2}$.

2) Leonardo 86, 20. $J = \frac{11}{14} d^2$.

der Höhen mit der Hälfte der Diagonale, so findet man sicher den Inhalt des Vierecks.

Da das Gesagte zur Kenntnis dieser Figuren ausreicht, halten wir für überflüssig noch mehr auszuführen. Indem wir daher an diesem Orte dem dritten Theile über Vierecke ein Ziel setzen, wollen wir mit Gottes Hilfe im vierten Theile zeigen, wie man die kreisförmigen und halbkreisförmigen Figuren, und die, welche mehr oder weniger als ein Halbkreis betragen, auszumessen im stande ist.

Vierter Theil: Bestimmung der Inhalte von kreisförmigen und halbkreisförmigen Feldern und solchen, welche mehr oder weniger sind als ein vollständiger Halbkreis.

1. *Den Flächeninhalt eines Vollkreises* kann man finden, wenn man die Länge des Durchmessers desselben kennt. Vervielfacht man nämlich die Länge des Durchmessers mit $3\frac{1}{7}$, so erhält man die Länge des Kreisumfangs. Hat man diese gefunden, und multipliciert dann den Halbmesser mit dem halben Umfang, so findet man sicher den Inhalt.[1])

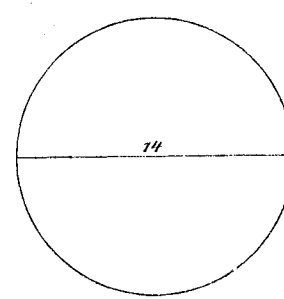


Fig. 32.

Zur genauern Erkenntnis sei ein Kreis gegeben, dessen Durchmesser 14 enthalte, das giebt mit $3\frac{1}{7}$ multiplicirt 44, und das ist die Länge des Umfangs. Wenn man nun den Halbmesser, also 7, mit dem halben Umfange, nämlich 22, multipliciert, so kommen 154, und das ist der Inhalt des Kreises.

2. *Den Inhalt des Kreises kann man aber auch ohne Kenntnis des Umfangs folgendermaassen auffinden.* Man multipliciere den Durchmesser mit sich selbst und vermindere das Ergebnis um den siebenten Theil und die Hälfte des siebenten Theiles $(\frac{3}{14})$, so ist der Rest der Inhalt des ganzen Kreises. In dem obigen Beispiele findet man nämlich das Quadrat des Durchmessers gleich 196. Zieht man hiervon $\frac{3}{14}$, das sind 42, ab, so bleiben 154 übrig wie vorher, und das ist der Inhalt des Kreises.[2])

3. Diese Rechnung geschieht nach dem Verhältnis, dass der Umfang als das $3\frac{1}{7}$-fache des Durchmessers angenommen wird, dann findet man nämlich den Inhalt, indem man $\frac{3}{14}$ von dem Quadrate des Durchmessers wegnimmt. Diejenigen aber, welche den Kreis genauer zu berechnen versuchten (es sind das jene, welche die Örter der Sterne genau aufzufinden lehren), sagen, der Umfang des Kreises enthalte das Dreifache seines Durch-

lineam suo diametro triplum et insuper 8 et dimidium de 60 diametri partibus continere pronunciant. Quapropter secundum eos non est haec numeratio ⟨facienda, sed ut antea ex diametri multiplicatione quarta pars minus 8 partibus et dimidium de eiusdem⟩ quartae partibus est minuenda, et reliquum erit circuli embadum. Veluti si in eodem supradicto exemplo ex diametri multiplicatione, quae 196 continet, quartam partem eius minus 8 partibus et dimidia de 60 ⟨eiusdem quartae partibus depresseris, quod est 42 ulnarum et 3 partium et dimidii de 60⟩ unius ulnae partibus, 154 minus tribus partibus et dimidia de 60 unius ulnae partibus remanebunt, et hoc erit circuli embadum. Verum quia inter has duas numerationes adeo minima differentia reperitur, quod nec etiam ad dimidium octavae partis unius ulnae ex 154 ulnis pervenerit, et huiusmodi differentia modicum in numerando confert, hac in scientia parvissimi difficultatem vitare volentes, primum numerandi modum sumus prosecuti.[1])

4. Igitur si diametri longitudinem cognoveris, circuli embadum absque suae circumferentiae numerositate non ignorare poteris. *Cumque circuli embadum sciveris et eius diametri longitudinem nosse volueris, tres partes de 11 embado superaddas, et diametri multiplicationem invenies, cuius summae radix diametri longitudinem continebit.*[2]) | 19

Veluti si diametrum circuli, cuius embadum 154 ulnas amplectitur, quot in longitudine mensuras contineret, quaeratur, hoc embadum in 11 partes diligenter dividas, et eius undecimam partem 14 continere reperies. Tres itaque partes in unum collectae 42 continebunt, quibus 154 superadditis 196 procurabuntur, et haec est totius diametri multiplicatio, cuius summae radix 14, quae sunt diametri longitudo, sibi connumerabit.

5. *At si circumferentis lineae summam noveris et diametri quantitatem scire volueris,* 7 partes de 22 partibus circumferentiae sumas, vel circumferentem lineam in 3 et septimam partiaris, et diametrum invenies. Quodcumque istorum feceris, ad idem pervenies. Veluti si diametrum circumferentis lineae, quae 44 ulnarum existiterit, quot in sui longitudine mensuras contineat, quaeratur, ex praedictis 44 septem partes de 22 partibus accipiens 14 reperies, quae sunt diametri longitudo. Similiter etiam si 44 in 3 et septimam diviseris, diametri longitudinem 14 continere non dubitabis.[3])

6. *Item quaerenti de circulo, cuius diametrum in 11 multiplicatum eius embadum perficit, quot in sui diametro mensuras recipiat,* sic respondeas.

3—4 facienda ... eiusdem *in A auf dem Rande ausradiert.* — 7—8 eiusdem ... de 60 *in A auf dem Rande ausradiert.* — 14 sumus] sunt. — 17 longitudine. — 21 embadum] exemplum *A.*

messers und ausserdem $8\frac{1}{2}$ Sechzigstel desselben. Nach ihnen darf man also obige Rechnung nicht machen, sondern man muss, ähnlich wie oben, von dem Quadrate des Durchmessers den vierten Theil weniger $8\frac{1}{2}$ Sechzigstel dieses vierten Theiles $(\frac{13}{120})$ wegnehmen; der Rest ist dann der Inhalt des Kreises. Wenn z. B. im obigen Beispiele vom Quadrate des Durchmessers, das 196 beträgt, der vierte Theil weniger $8\frac{1}{2}$ Sechzigstel dieses vierten Theiles, das sind 42 Ellen und $3\frac{1}{2}$ Sechzigstel einer Elle, weggenommen werden, so bleiben 154 Ellen weniger $3\frac{1}{2}$ Sechzigstel einer Elle übrig, und das wäre der Inhalt des Kreises. Da aber zwischen diesen beiden Zahlenwerthen eine so geringfügige Differenz besteht, die noch nicht einmal die Hälfte einer achtel Elle bei 154 Ellen erreicht, und ein so mässiger Unterschied nur wenig beim Rechnen ausmacht, so werden wir die erste Rechnungsart weiter benutzen, da wir bei dieser Lehre die Schwierigkeit solcher kleinen Zahlen vermeiden wollen.[1])

4. Kennt man also die Länge des Durchmessers, so kann man auch seinen Inhalt ohne Kenntnis des Umfanges bestimmen. *Hat man aber den Inhalt des Kreises, und sucht die Länge des Durchmessers, so addiert man zu dem Inhalte $\frac{3}{11}$ desselben, und erhält damit das Quadrat des Durchmessers. Die Wurzel desselben zeigt die Länge des Durchmessers an.*[2])

Wenn etwa gefragt würde, wieviele Maasseinheiten die Länge des Durchmessers enthält, dessen Inhalt 154 Quadratellen umfasst, so theilt man diese Zahl genau in 11 Theile, und findet, dass ein Elftel 14 enthält. Drei solche Theile zusammengenommen sind also gleich 42, und zählt man dies zu 154 hinzu, so kommt 196, das Quadrat des Durchmessers, und die Wurzel aus dieser Zahl, das ist seine Länge, beträgt 14.

5. *Kennt man aber die Grösse des Umfanges und sucht die Länge des Durchmessers,* so nehme man $\frac{7}{22}$ des Umfangs oder theile den Umfang durch $3\frac{1}{7}$, und findet so den Durchmesser. Welche Methode man auch wählt, man gelangt zu demselben Ergebnis. Wird z. B. gefragt, wieviel Maasseinheiten der Durchmesser enthalte, wenn der Umfang 44 Ellen Länge besitzt, so erhält man 14, wenn man $\frac{7}{22}$ von diesen 44 nimmt, und das ist die Länge des Durchmessers. Dividiert man ähnlich 44 durch $3\frac{1}{7}$, so findet man auch auf diese Weise, dass die Länge des Durchmessers 14 beträgt.[3])

6. *Wenn man fragt, wieviel Maasseinheiten der Durchmesser eines Kreises enthält, wenn dieser Durchmesser mit 11 multipliciert den Inhalt*

---

1) Das ist der Werth des Ptolemäus $\pi = \frac{377}{120}$, $J = \frac{377}{480} d^2$.

2) Leonardo 86, 6 v. u. $d = \frac{7}{22} P = P : 3\frac{1}{7}$.

3) Savasorda hat hier die oben gegebene Formel $J = \frac{d}{2} \cdot \frac{P}{2}$ in $J = d \cdot \frac{P}{4}$ umgewandelt, was sonst im Mittelalter nicht vorkommt.

Cum diametri multiplicationem in quartam sui circumferentiae partem ipsius circuli embadum complere manifestum sit, et in hac quaestione diametrum in 11 multiplicatum sui circuli aream efficere proclamatur, quartam ipsius circumferentis lineae partem 11 mensuras continere non est ambiguum. Igitur si 11 in 4 multiplicaveris, 44, quae sunt circumferentis lineae summa, reperies, quam si in 3 et septimam diviseris, exibit diametri longitudo.[1])

7. Huc usque perfecti circuli dimensionibus ostensis ad portionum circuli dimensiones arcuum formas habentium transitum faciamus. Circulorum itaque portiones sicut et omnium figurarum in tria dividuntur. Quaedam etenim *semicirculum,* quaedam *minus,* quaedam *plus semicirculo* continebunt. Harum autem portionum singulae *cordam* et *sagittam* habere dicuntur.

Igitur eius *corda est linea recta ab altero fine arcus ad alterum finem protracta,* et eiusdem vero *sagitta est linea recta a praedictae cordae dimidio usque ad arcum secundum rectum angulum elevata.*

Cumque dimidio cordae sagitta aequalis exstiterit, erit arcus ille semicirculus; si autem minor ea fuerit, erit et ipse minor semicirculo; verum si maior apparuerit, et ipse arcus semicirculo maior apparebit.

8. Sit igitur exempli causa circuli portio $\widehat{abc}$, cuius corda adc 8, eiusque sagitta db 4 ulnas contineat: erit ergo *semicirculus.* Cuius embadum si nosse deside|ras, dimidium eius cordae, quae est circuli diametrum, in arcus 19′
dimidium multiplica, et semicirculi embadum exibit (Fig. 33).[2])

9. Arcus vero summam si nosse cupis, dimidium cordae, quae est 4, in 3 et septimam multiplica, et 12 ulnas quatuorque septenas invenies, et haec est ipsius arcus, totius circumferentiae dimidium in se continentis quantitas. Huius quidem arcus dimidium, 6 scilicet duasque septimas, assumens in 4, quae sunt totius cordae dimidium, multiplica, et 25 ac unius septimam invenies, quod est semicirculi embadum.

10. Aliter etiam embadum scire poteris, scilicet si cordam in semet multiplicaveris et ex inde collecto septimam septimaeque dimidium abstuleris, residuique dimidium acceperis, semicirculi aream nimirum reperies. Quare si 8 praefatas ulnas in semet duxeris, 64 innascentur, de cuius numeri summa si septimam septimaeque partis dimidium, quod est 13 ulnas et 5 septimas, abstuleris, 50 ulnae et duae septimae remanebunt, cuius summae

---

3 procreatur. — 6 summam. — 33 12 ulnas.

---

1) Leonardo 92, 4. Man beachte die Bezeichnung der zum Theil krummlinig begrenzten Figur durch $\widehat{abc}$ im Gegensatze zu dem geradlinigen Dreiecke abc.

2) $d = \sqrt{1\frac{3}{11}\,J}$.

ergiebt, so ist die Antwort folgende. Da das Produkt aus dem Durchmesser und dem vierten Theile seines Umfanges den Inhalt des Kreises erzeugt, so ist klar, da nach obiger Frage der Durchmesser mit 11 vervielfacht den Inhalt des zugehörigen Kreises ausmachen soll, dass der vierte Theil des Umfanges 11 Maasseinheiten enthält. Multipliciert man also 11 mit 4, so findet man als Länge des Umfanges 44, und dividiert man das durch $3\frac{1}{7}$, so kommt die Länge des Durchmessers.[1])

7. Bisher haben wir die Ausmessung des Vollkreises gelehrt, nun wollen wir zur Ausmessung der Kreisabschnitte, welche die Form von Kreisbogen haben, übergehen. Die Kreisabschnitte werden wie alle solche Figuren in drei Arten getheilt. Einige nämlich enthalten einen *Halbkreis,* einige *weniger,* einige *mehr als einen Halbkreis.* Von jedem solchen Abschnitte sagt man, er besitze eine *Sehne* und einen *Pfeil.*

Sehne desselben ist nämlich die gerade Linie, welche von einem Endpunkte des Bogens nach dem andern gezogen ist;

Pfeil desselben aber ist die gerade Linie, welche im Halbierungspunkte der Sehne bis zum Bogen senkrecht errichtet ist.

Ist der Pfeil der Hälfte der Sehne gleich, so ist der Bogen ein Halbkreis; ist er kleiner als die Hälfte, so ist der Bogen ebenfalls kleiner als der Halbkreis; ist er aber grösser, so ist der Bogen auch grösser als der Halbkreis.

8. Um ein Beispiel zu zeigen, sei der Kreisabschnitt $\widehat{abc}$ vorgelegt, seine Sehne adc enthalte 8, der Pfeil db 4 Ellen: es ist also *ein Halbkreis.* Um seinen Inhalt zu finden, multipliciere man die Hälfte seiner Sehne, die zugleich Durchmesser des Kreises ist, mit der Hälfte des Bogens, so kommt der Inhalt des Halbmessers (Fig. 33).[2])

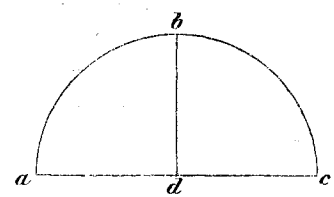


Fig. 33.

9. Um aber die Länge des Bogens zu bestimmen, vervielfache man die halbe Sehne, das ist 4, mit $3\frac{1}{7}$, so erhält man $12\frac{4}{7}$ Ellen, und das ist die Grösse des Bogens, der die Hälfte des ganzen Umfanges in sich fasst. Die Hälfte dieses Bogens, das ist $6\frac{2}{7}$, multipliciere man nun mit 4, das ist der Hälfte der Sehne, und man erhält $25\frac{1}{7}$ als Inhalt des Halbkreises.

10. Den Inhalt kann man auch auf andere Weise bestimmen. Wenn man nämlich die Sehne mit sich selbst vervielfacht, von dem Quadrate $\frac{3}{14}$ abzieht und von dem Reste die Hälfte nimmt, so findet man ohne weiteres den Inhalt des Halbkreises. Wenn man also die 8 obengenannten Ellen mit sich selbst vervielfacht, so entstehen 64. Zieht man hiervon $\frac{3}{14}$ ab, das ist $13\frac{5}{7}$ Ellen, so bleiben $50\frac{2}{7}$ Ellen übrig. Die Hälfte dieser Grösse,

dimidium, quod est 25 et unius insuper septima, semicirculi embadum complet. Hac itaque via semicirculi embadum addiscere ⟨poteris⟩, et haec est semicirculi figura.

11. Ad illius autem portionis similitudinem, quae semicirculo minor existit, $\widehat{abc}$ constituatur, cuius corda ac 8, eiusque sagitta db 2 mensuras in se contineat. Haec quidem portio non est semicirculus, sed minor semicirculo, eo quod ipsius sagitta eiusdem cordae minor invenitur. Huius autem portionis aream absque illius circuli, cuius portio est, diametri cognitione scire non poteris. Circuli vero diametrum addiscas, si cordae dimidium in semet multiplicaveris, et quod fuerit, per sagittae summam diviseris, quodque exierit, toti summae sagittae superaddideris. Illud etenim, quod inde collectum fuerit, erit totius diametri quantitas (Fig. 34).[1])

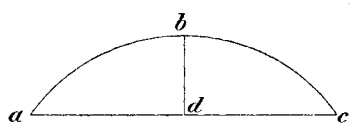


Fig. 34.

Verbi gratia si hac in portione dimidium cordae, quod est 4, in se ipsum multiplicaveris, 16 invenies, cuius numeri summam si in duo, quae sunt sagittae quantitas, diviseris, 8 nimirum exibunt. Quibus superadditis 2, quae sunt sagittae longitudo, 10, quae sunt summa diametri illius circuli, cuius haec est portio, colligentur.

Istius quippe numerationis demonstrationem si nosse desideras, huius portionis circulum perficiens (Fig. 35) sagittam bd ex altera parte usque ad circumferentem lineam protrahas ad similitudinem lineae bdf, quae in hac subscripta figura circulari protracta est, eruntque duae lineae ac, bf in circulo $abcf$ supra punctum d sese invicem abscinden|tes. Multiplicatio 20 igitur lineae ad in lineam dc, quae sibimet invicem sunt aequales, erit ut multiplicatio lineae bd in lineam df, quemadmodum ab Euclide, geometra peritissimo, manifeste monstratur. Linea df ⟨lineam⟩ ac in duo secat aequalia, ad cuius sectionis dimidio linea bf perpendiculariter super ipsam protrahitur, quapropter eam per centrum transire et circuli diametrum esse necesse est, ut in suo libro dictus Euclides ostendit. Huius itaque circuli diametrum 10 continere mensuras nulli dubium est.

12. His ita repertis, si eiusdem portionis embadum nosse volueris,

---

2 poteris *fehlt.* — 16 est cordae 4. — 28 lineam *fehlt.*

---

1) Savasorda kennt also die Beziehungen zwischen Halbsehne, Sagitta und Durchmesser. Am Schlusse des Kapitels kommt er nochmals darauf zurück und bezieht sich zum Beweise ausdrücklich auf Euklides.

das ist $25\frac{1}{7}$, macht den Inhalt des Halbkreises aus. Auf diese Art kann man also den Inhalt eines Halbkreises finden, und das ist die Figur des Halbkreises.

11. Als Beispiel eines Kreisabschnittes, der kleiner als ein Halbkreis ist, sei $\widehat{abc}$ gezeichnet, dessen Sehne ac 8, der Pfeil db 2 Maasseinheiten in sich fasse. Dieser Abschnitt ist kein Halbkreis, sondern kleiner als ein Halbkreis, weil sein Pfeil kleiner als die Hälfte seiner Sehne ist. Der Inhalt dieses Abschnittes lässt sich aber ohne Kenntnis des Durchmessers des Kreises, von dem er ein Theil ist, nicht bestimmen. Den Kreisdurchmesser findet man aber, wenn man die halbe Sehne mit sich selbst vervielfacht, das entstehende Quadrat durch die Länge des Pfeils dividiert, und das Ergebnis der ganzen Länge des Pfeiles hinzuzählt, denn diese Summe ist die Länge des Durchmessers (Fig. 34).[1])

Multipliciert man z. B. die Hälfte der Sehne des gegebenen Abschnittes, die 4 beträgt, mit sich selbst, so findet man 16; dividiert man das durch 2, die Länge des Pfeiles, so kommen 8, und das zu 2, nämlich zu der Länge des Pfeiles, hinzugelegt, macht zusammen 10, das ist die Länge des Durchmessers des Kreises, zu welchem der gegebene Abschnitt gehört.

Zum Beweise dieser Berechnung vollende man den zu dem Abschnitte gehörigen Kreis (Fig. 35), und verlängere den Pfeil bd nach der andern Seite bis zum Umfange; wie die Gerade bdf zeigt, die in der nebenstehenden Figur des Kreises gezogen ist. Dann schneiden sich die beiden Geraden ac, bf im Kreise $abcf$ im Punkte d, also ist das Produkt aus der Geraden ad und der Geraden dc, die einander gleich sind, gleich dem Produkte der Geraden bd und der Geraden df, wie von Euklides, dem erfahrensten Geometer, klar bewiesen ist. Die Gerade df schneidet die Gerade ac in zwei gleiche Theile, und in diesem Halbierungspunkte ist die Gerade bf senkrecht auf derselben errichtet, sie muss daher durch den Mittelpunkt gehen und Durchmesser des Kreises sein, wie der ebengenannte Euklides in seinem Buche gezeigt hat. Dass also der Durchmesser dieses Kreises 10 Ellen enthält, kann nicht zweifelhaft sein.

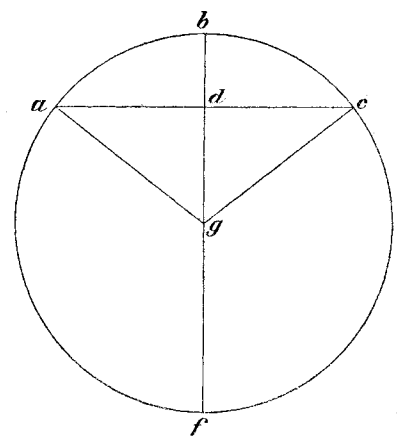


Fig. 35.

12. Will man nach Bestimmung des Durchmessers den Inhalt des Ab-

lineam bf in duo aequa supra punctum g, quod est circuli centrum, partiaris, a quo scilicet puncto duas ag, gc lineas ad duo puncta a, c dirigas, cumque lineam ag, quae est diametri dimidium, in dimidium arcus $\widehat{ac}$, quod est $\widehat{ab}$, multiplicaveris, embadum trianguli, cuius duo latera sunt
5 lineae ag, gc, eiusque basis est arcus $\widehat{abc}$, reperies. De cuius numeri summa si trianguli agc aream abstuleris, embadum portionis $\widehat{abcd}$ remanebit. Huius autem trigoni embadum, quod est 12, est multiplicatio lineae gd, quae hac in figura trium existit ulnarum, in dimidium lineae ac, quod 4 ulnas amplectitur, et ipsum videlicet embadum ⟨est⟩ illa quantitas,
10 quae ex multiplicatione rectae lineae ag in lineam $\widehat{ab}$ circularem proicitur. Reliquum itaque portionis $\widehat{abcd}$ aream complet.[1])

Manifestum est igitur, quod *in omni circuli portione, quae semicirculo minor exstiterit, si circuli, cuius ipsa portio fuerit, diametri dimidium in dimidium arcus eiusdem portionis duxeris, et quod fuerit, seorsum servaveris,*
15 *post haec ex diametri dimidio sagittae summam proieceris, residuumque in cordae dimidium multiplicaveris, et, quod fuerit, ex servata quantitate depresseris, reliquum eiusdem portionis embadum fore non dubites.*

13. Item ad exemplar illius portionis circuli, quae semicirculo maior fuerit, $\widehat{abc}$ portio constituatur, cuius corda ac 12, eiusque sagitta bd
20 12 mensuras amplectitur. Huius autem portionis embadum taliter scire poteris. *Si diametrum scilicet illius circuli, cuius portio est, produxeris et ipsius dimidium in dimidium arcus multiplicaveris, eique multiplicationi embadum trianguli supra cordam existentis superadiunxeris, inde coadunatum totius portionis embadum incunctanter efficiet.*

25 Veluti si dimidium cordae in se ipsum multiplicaveris, 36 invenies, cuius numeri summam si in sagittae quantitatem, quae est 12, diviseris, 3 nimirum exibunt. Quibus eaedem sagittae superadditis, 15, quae sunt totius diametri longitudo, colli|gentur, cuius dimidium, quod est linea bf, 20′
7 et semissem suscipit. Quod si in dimidium arcus multiplicaveris, emba-
30 dum portionis sub lineis cf et af, nec non et arcu $\widehat{abc}$ contentae reperies. Cui si embadum trianguli acf superaddideris, et ipsum est id, quod ex multiplicatione lineae df in dimidium lineae ac colligitur, quod inde coadunatum fuerit, istius portionis aream complebit (Fig. 36).

---

2 duas scilicet puncta ag, gc. — 6 triangulum. — 9 est *fehlt*. — 23 inde] n̄ *A*.

---

1) Leonardo 100, 4 v. u. Die *Portio minor* ist also gleich dem Kreisausschnitt *minus* dem durch die Sehne und die Radien gebildeten Dreiecke.

schnittes finden, so halbiere man die Gerade bf im Punkte g, das ist der Mittelpunkt des Kreises, und ziehe von diesem Punkte die beiden Geraden ag, gc nach den beiden Punkten a und c. Wenn man dann die Linie ag, die gleich dem Halbmesser ist, mit der Hälfte des Bogens $\widehat{ac}$, das ist mit $\widehat{ab}$ multipliciert, so erhält man den Inhalt des Dreiecks, dessen beide Seiten die Geraden ag, gc sind, und als dessen Grundlinie man den Bogen $\widehat{abc}$ findet. Zieht man von diesem Produkte die Fläche des Dreiecks agc ab, so bleibt der Inhalt des Kreisabschnittes $\widehat{abcd}$ übrig. Der Inhalt des genannten Dreiecks ist 12, er ist nämlich das Produkt der Geraden gd, die in unserer Figur 3 Ellen lang ist, mit der Geraden ac, welche 4 Ellen enthält, und der obige Flächeninhalt ist die Grösse, welche aus der Multiplikation der geraden Linie ag mit dem Kreisbogen $\widehat{ab}$ entsteht. Der Rest macht daher die Fläche des Abschnittes $\widehat{abcd}$ aus.[1])

Es ist also klar, *dass, wenn man für jeden Kreisabschnitt, der kleiner ist als ein Halbkreis, den Halbmesser des Kreises, dessen Abschnitt er ist, mit der Hälfte des Bogens des Abschnittes vervielfacht und das Produkt sich merkt, dann die Länge des Pfeiles von dem Halbmesser wegnimmt, und den Rest mit der halben Sehne multipliciert, das Ergebnis aber von dem gemerkten Produkte subtrahiert, der Rest zweifellos den Inhalt des Kreisabschnittes bildet.*

13. Als ein Beispiel eines Kreisabschnittes, der grösser ist als ein Halbkreis, zeichne man einen Abschnitt $\widehat{abc}$, dessen Sehne ac 12, sein Pfeil bd ebenfalls 12 Maasseinheiten umfasst. Den Inhalt dieses Abschnittes kann man folgendermaassen bestimmen. *Zieht man nämlich den Durchmesser des Kreises, zu welchem er gehört, multipliciert dessen Hälfte mit der Hälfte des Bogens und addiert zu dem Produkte den Inhalt des Dreiecks, das über der Sehne steht, so macht die Summe den Inhalt des ganzen Abschnittes aus.*

Wenn man hier die Halbsehne mit sich selbst vervielfacht, so findet man 36, Division dieser Grösse durch die Länge des Pfeiles, nämlich 12, ergiebt 3. Dies zu dem Pfeile addiert liefert 15, und das ist die ganze Länge des Durchmessers. Seine Hälfte, das ist die Länge bf ist also $7\frac{1}{2}$. Multipliciert man das mit dem halben Bogen, so erhält man den Inhalt des Ausschnittes, der zwischen den Geraden cf und af sowie dem Bogen $\widehat{abc}$ enthalten ist, und wenn man hierzu den Inhalt des Dreiecks acf addiert, und derselbe entsteht durch Multiplikation der Geraden df mit der Hälfte der Geraden ac, so ist die Summe gleich dem Flächeninhalte des Kreisabschnittes (Fig. 36).

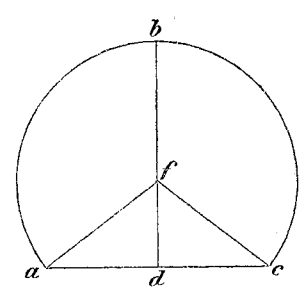


Fig. 36.

Quicumque igitur portionis circuli semicirculo maioris existentis embadum scire voluerit, dimidium diametri illius circuli, cuius portio fuerit, in dimidium arcus portionis multiplicet, et quod fuerit, servet. Post haec dimidium diametri ex totius sagittae summa demat reliquumque in cordae dimidium multiplicet, et quod fuerit, servatae quantitati superaddat, indeque collectum eiusdem portionis semicirculi maioris adparentis embadum fore confirmet.

Cuius demonstratio supradictas demonstrationes non ignoranti manifesti patebit.[1])

14. Ad horum itaque similitudinem omnes circulares figuras, illa etiam insuper, quae partim ex arcubus, partim ex rectis lineis formantur, metiri poteris. Ut in triangulo, cuius basis est arcus $\widehat{bdc}$ (Fig. 37), eiusque duo latera sunt lineae ab, ac rectae, si rectam lineam bc protraxeris, triangulus rectilineus abc nec non et figura $\widehat{bdc}$ ex recta et circulari linea constans circulique portio nuncupata formabitur. Cumque utriusque istarum figurarum aream singulariter noveris, si eas in unum colligeris, totius figurae aream continebunt, et haec est figura.[2])

15. Simili quoque ratione si figura $\widehat{aecbd}$ procreatur (Fig. 38), cuius basis bc recta linea fuerit, eiusdemque duo latera $\widehat{adb}$, $\widehat{aec}$ lineae circulares exstiterint, et in ea duas rectas ab, ac lineas protraxeris, in tres partes tota figura dividetur. Quarum una fuerit trigonus rectilineus abc, reliquae vero duae circuli portiones apparebunt, quarum ⟨alteram tres a, d, b⟩, alteram autem tres a, e, c litterae designabunt. Istorum quidem trium partium embada via praedicta reperies.

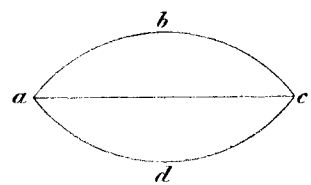


Fig. 39.

16. Quod si forte aliqua figura ex duabus circuli portionibus constare contingit, ut in hac figura $\widehat{abcd}$, quam *piscis formam* habere dicunt, et rectam in eo lineam ab produxeris (Fig. 39), duae circulorum portiones separabuntur, quarum embada singulariter addiscens totius figurae piscis formam habentis embadum non ignorabis.[3])

---

4 reliquumque] reliquum quidem quod. — 22 alteram tres a, d, b *über der Zeile in A ausradiert.* — 29 et *fehlt in B.* — 31 embada.

---

1) Leonardo 101, 9. Die *portio maior* ist also Kreisausschnitt *plus* dem obengenannten Dreiecke. Da sonst im Mittelalter die *portio maior* durch Subtraktion der *portio minor* vom ganzen Kreise gewonnen wird, so ist die Übereinstimmung Leonardo's mit Savasorda um so beachtenswerther.

2) Leonardo 101, 13. 3) Leonardo 101, 18.

Wer also den Inhalt eines Kreisabschnittes, der grösser ist als der Halbkreis, finden will, muss den Halbmesser des Kreises, zu dem der Abschnitt gehört, mit dem halben Bogen des Abschnittes multiplicieren und das Produkt sich merken. Dann muss er den Halbmesser von der ganzen Länge des Pfeiles wegnehmen und den Rest mit der halben Sehne vervielfachen, das Produkt aber zu dem vorher gemerkten Produkte addieren, dann kann er behaupten, dass die Summe gleich dem Inhalte des Kreisabschnittes grösser als der Halbkreis ist.

Der Beweis hierfür wird jedem, der den vorhergehenden Beweis verstanden hat, klar sein.[1])

14. In dieser Weise kann man alle Kreisfiguren, sowie ausserdem auch diejenigen, welche zum Theil aus Kreisbogen, zum Theil aus geraden Linien gebildet werden, ausmessen. Wenn man z. B. in dem Dreiecke, dessen Grundlinie der Bogen $\widehat{bdc}$ (Fig. 37), seine beiden Seiten aber die Geraden ab, ac sind, die gerade Linie bc zieht, so wird dadurch das geradlinige Dreieck abc und die von einer Geraden und einem Kreisbogen begrenzte Figur $\widehat{bdc}$, die Kreisabschnitt genannt wird, gebildet. Da man nun für jede einzelne dieser Figuren den Inhalt kennt, so werden sie durch Addition den Inhalt der ganzen Figur ergeben, und das ist die zugehörige Figur.

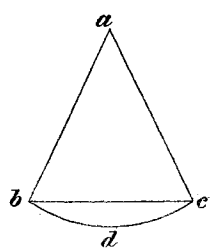


Fig. 37.

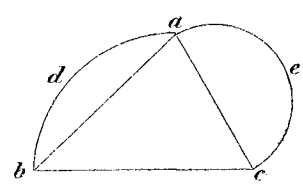


Fig. 38.

15. Wird in ähnlicher Weise eine Figur $\widehat{aecbd}$ gebildet (Fig. 38), deren Grundlinie bc eine gerade Linie, die beiden Seiten $\widehat{adb}$, $\widehat{aec}$ aber Kreisbogen darstellen, und man zieht in derselben die beiden Geraden ab, ac, so zerfällt die ganze Figur in drei Theile. Einer davon ist das geradlinige Dreieck abc, die andern beiden aber erscheinen als Kreisabschnitte, von welchen den einen die drei Buchstaben a, d, b, den andern aber die Buchstaben a, e, c bezeichnen. Die Inhalte dieser drei Theile findet man auf dem vorgenannten Wege.

16. Besteht zufällig eine gegebene Figur aus zwei Kreisabschnitten, wie die Figur $\widehat{abcd}$, von welcher man sagt, sie habe die *Form eines Fisches,* und man zieht in derselben die Gerade ab, so werden dadurch zwei Kreisabschnitte getrennt, deren Inhalt man einzeln berechnen und so auch den Inhalt der ganzen fischähnlichen Figur kennen wird.[3])

17. *Item in figura, quae non sit circularis, sed obliqua procreatur, cuius duo diametra sunt inaequalia, utriusque diametri dimidium accipiens in unum collige, collectumque | in semet ipsum multiplica. Ex qua multi-* 21
plicatione septimam septimaeque dimidium, sicut in circulo feceras, abiiciens reliquum huius obliquae figurae aream fore non ambigas (Fig. 40).[1])

Istarum quippe figurarum variabilium multas invenies, ad quorum cognitionem, ne prolixitas operis taedium generet, ista sufficiant.

18. Cum circuli cuiuslibet diametrum sciveris, et quaelibet, in ipso scilicet circulo, tibi data corda fuerit, si eiusdem cordae arcum nosse volueris, et, quemadmodum certam regulam in cognitione longitudinis cuiuslibet diametri per suam circumferentiam, vel cuiuslibet circumferentiae per sui diametri notitiam inveneris, ita certam regulam, qua per cordam vel sagittam longitudinem sui arcus addiscas, invenire desideras, hanc regulam te nullatenus invenire posse cognoscas, eo quod portio cordae ad suum arcum non semper eodem intervallo procedit, sed secundum arcuum cordarumque variationes alteratur. Veluti si in eodem circulo duo inaequales procreantur arcus, proportio maioris arcus ad minorem erit maior proportione cordae maioris ad cordam minoris, et eorum huiusmodi differentia non semper est eadem, quapropter nulli subiacet regulae, ideoque cordarum et arcuum numeratio nonnullis obscura difficilisque videtur. Eos autem, qui hoc numerando scire voluerunt, quamplures geometriae regulas non ignorare necesse est.

Tabula arcum et cordarum.

Partes Cordarum	Arcus		
	Partes	Min.	Sec.
1	1	0	2
2	2	0	8
3	3	0	26
4	4	0	55
5	5	1	44
6	6	2	54
7	7	4	42
8	8	7	11
9	9	9	56
10	10	13	42
11	11	18	54
12	12	24	38
13	13	31	9
14	14	40	0
15	15	50	10
16	17	2	16
17	18	16	36
18	19	33	27
19	20	53	26
20	22	17	10
21	23	45	6
22	25	19	24
23	27	0	0
24	28	49	56
25	31	26	37
26	33	20	52
27	36	27	32
28	44	0	0

19. In astronomia vero peritissimi istud addiscere summopere curaverant, eo quod astronomicae doctrinae valde necessarium est. Quapropter quaedam inde scripta, ne oblivione traderetur, composuerunt, ex quibus illud hoc in opusculo transtulimus, quod nobis operique nostro necessarium fore cognovimus. Quasdam insuper tabulas, in quibus 28 lineationes protrahuntur, ordinavimus. Diametrum enim circuli similiter in 28 partes divisimus, quare secundum istas divisiones linea circumferens 88 partes | neces- 21′

15 intervallo] calle. — 16 set *A und so später immer.* — 19 portione. — 22 nullius *A.* — 24 Eos qui autem. — *In der* Tabula arcuum et cordarum *liest A in der dritten Tafelzeile* 25 *statt* 26 *und in der sechszehnten* 15 *statt* 16 *in den Sekunden.*

17. *In einer Figur ferner, die kein Kreis ist, sondern eine ovale Gestalt hat, und deren beide Durchmesser ungleich sind, addiere man die Hälften der beiden Durchmesser und multipliciere die Summe mit sich selbst. Nimmt man dann von dem Produkte* $\frac{3}{14}$ *hinweg, wie beim Kreise geschah, so wird der Rest den Inhalt der ovalen Figur darstellen* (Fig. 40).[1]

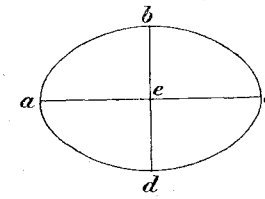


Fig. 40.

Solcher veränderlicher Figuren kann man viele finden, doch mögen, damit nicht die Verwickeltheit des Werkes Abscheu errege, zu ihrer Kenntnis die gegebenen Beispiele genügen.

18. Kennt man den Durchmesser eines Kreises, und ist eine Sehne desselben Kreises gegeben, man will den zu der Sehne gehörigen Bogen bestimmen und man wünscht in ähnlicher Weise, wie man den Durchmesser aus dem zugehörigen Umfange oder den Umfang aus seinem Durchmesser durch eine sichere Formel finden kann, ebenso eine sichere Regel zu finden, durch welche man aus der Sehne oder dem Pfeile die Länge des zugehörigen Bogens bestimmen kann, so muss man wissen, dass eine solche Regel überhaupt nicht gefunden werden kann, weil nämlich das Verhältnis der Sehne zu ihrem Bogen nicht immer in gleichem Maasse wächst, sondern nach der Veränderung von Sehne und Bogen verschieden ist. So ist, wenn in demselben Kreise zwei ungleiche Sehnen gezogen werden, das Verhältnis des grössern Bogens zum kleinern grösser als das Verhältnis der Sehne des grössern zur Sehne des kleinern, und der Unterschied der Verhältnisse ist nicht immer derselbe, und deshalb unterliegt er eben keiner Regel, und hierdurch erscheint die Berechnung der Sehnen und Bogen manchem dunkel und schwierig. Diejenigen aber, welche diese Berechnung anstellen wollen, müssen eine sehr grosse Zahl geometrischer Sätze kennen.

Die in der Astronomie Erfahrensten sind das zu lernen am meisten beflissen, da es für die Lehren der Astronomie unumgänglich nöthig ist. Einige von ihnen haben daher Schriften darüber verfasst, damit es nicht in Vergessenheit gerathe, und wir haben aus denselben dasjenige in unser Werk aufgenommen, was wir für unser Werk als nothwendig erkannten. Wir haben ferner eine Tafel hinzugefügt, in welcher 28 Zeilen gezogen sind. Auch den Durchmesser des Kreises haben wir in ähnlicher Weise in 28 Theile getheilt, so dass von diesen Theilen der Umfang nothwendiger-

---

1) Leonardo 101, 23. Es handelt sich hier offenbar um eine Ellipse mit den Achsen a und b. Savasorda so gut wie Leonardo geben für den Inhalt die Formel $J = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \pi$.

sario continebit. Istarum etiam tabularum latitudo in quatuor lineationes dividitur, quarum prima 28 diametri partes in longitudine continet, in reliquis autem tribus, arcuum quantitates ab uno usque ad 28, prout singulis cordis debetur, inscribuntur. Aream vero tabularum idcirco in tria divisimus, quoniam cum cuiuscunque arcus quantitatem subtiliter investigare voluimus, cum in 60, quae minuta vocantur, quorum iterum unumquodque in 60, quae secunda dicuntur, dividimus, ut in his subscriptis tabulis ostenditur.[1])

20. Ad harum autem tabularum notitiam quandam regulam tibi valde necessariam et perutilissimam indicabimus. Ea est huiusmodi. *Si quatuor proportionales quantitates exstiterint, multiplicatio primae ⟨in quartam⟩ ea erit, quae et secundae in tertiam.* Hac itaque regula tibi bene cognita et tenaci memoriae commendata, istarum tabularum numerationes breviter ostendamus.

21. *Si cuiuslibet igitur arcus corda tibi data fuerit, et eius arcum scire volueris,* ipsius circuli diametrum per cordae sagittaeque longitudinem, ut supra docuimus, prius addiscas. Quod diametrum si 28 partium exstiterit, quemadmodum circuli diametrum in his tabulis positum fore praediximus, laboris expers cum data corda in lineam partium cordarum ingrediens, quod in eius directo in lineis arcuum ex partibus et minutis ac secundis invenies, erit quaesiti arcus quantitas. Si autem illius dati circuli diametrum plus minusve 28 partibus continuerit, quam proportionem ad 28 partes habuerit, inquire, quoniam eadem erit datae cordae ad cordam tabularum proportio. Nam manifestum est, quod proportio diametri dati circuli ad datam cordam est eadem, quae et diametri tabularum, quod 28 partes in se recipit, ad illam cordam, quae secundum illius diametri quantitatem his in tabulis esset accipienda. Quare si datam cordam, quae in proportione prima consequens est, assumpseris, et eam in tabularum diametrum, quod in secunda proportione est antecedens et 28 partes suscipit, multiplicaveris, indeque proveniens per dati circuli diametrum, quod in prima proportione est antecedens, diviseris, corda, quae his tibi debetur in tabulis, exibit. In cuius directo ipsius quaesitum arcum reperies. Proportio autem istius inventae cordae ad suum arcum ea est, quae et datae cordae ad suum arcum, quem quaeris. Quapropter, si arcum in his tabulis repertum, qui est in prima proportione consequens, in datam cordam multiplicaveris, et per tabularum cordam diviseris, quaesitum arcum incontanter invenies.

---

9 perutissimam *A*. — Ea] Hea *A*. — 10 in quartam *in A über der Zeile ausradiert*. — 21 tabulatam *A*. — 22 portio. — 25 portione. — 30 portio. — 31 ea] eo. — arcus. — 33 portione.

---

1) Die Sehnentafel Savasorda's dürfte wohl die älteste sein, welche in einem lateinisch geschriebenen Werke nachweisbar ist.

weise 88 Theile enthält. Die Breite der Tafel ist in vier Kolumnen getheilt. In der ersten sind die 28 Theile des Durchmessers enthalten, in den drei übrigen ist der Betrag der Kreisbogen, wie er zu den einzelnen Sehnen von 1 bis 28 gehört, eingeschrieben. Die Fläche der Tafel ist aber deshalb in drei Kolumnen getheilt, weil wir den Betrag der einzelnen Bogen genau finden wollten, und deshalb jeden einzelnen Theil desselben in 60 Theile, die wir Minuten nennen, und von diesen wieder jeden einzelnen in 60 Theile, die Sekunden heissen, zerschneiden, wie in der beigegebenen Tafel zu sehen ist.[1])

20. Für den Gebrauch der Tafel wollen wir eine sehr nöthige und höchst nützliche Regel hier anführen. Es ist folgende: *Wenn vier Grössen in Proportion stehen, so ist das Produkt der ersten und vierten gleich dem der zweiten und dritten.* Nachdem diese Regel bekannt und in treuem Gedächtnis festgehalten ist, wollen wir den Gebrauch jener Tafel in Kürze darlegen.

21. *Ist also die Sehne irgend eines Bogens gegeben, und man will den Bogen bestimmen,* so suche man nach dem oben Gelehrten zunächst den Durchmesser des Kreises durch die Länge der Sehne und des Pfeiles. Hat dann der Durchmesser 28 Theile, wie wir sagten, dass der Durchmesser des Tafelkreises gesetzt sei, so geht man ohne jede Rechnung mit der gegebenen Sehne in die Kolumne der Theile der Sehne ein, und der Betrag, welchen man in derselben Zeile in den Kolumnen der Bogen an Theilen, Minuten und Sekunden findet, ist die gesuchte Länge des Bogens. Enthält aber der Durchmesser des gegebenen Kreises mehr oder weniger als 28 Theile, so sehe man zu, wie gross sein Verhältnis zu 28 Theilen ist, da das Verhältnis der gegebenen Sehne zur Tafelsehne dasselbe ist. Es ist nämlich klar, dass das Verhältnis des Durchmessers der gegebenen Kreises zu der gegebenen Sehne dasselbe ist als das des Tafeldurchmessers, der 28 Theile enthält, zu derjenigen Sehne, welche der Länge dieses Durchmessers entsprechend in der Tafel zu nehmen wäre. Multipliciert man daher die gegebene Sehne, welche in dem ersten Verhältnis das Hinterglied ist, mit dem Tafeldurchmesser, dem Vordergliede des zweiten Verhältnisses, und theilt das Produkt durch den Durchmesser des gegebenen Kreises, der im ersten Verhältnis das Vorderglied bildet, so kommt die Sehne, die in der Tafel entspricht, und in derselben Zeile findet man den zugehörigen Bogen. Das Verhältnis dieser gefundenen Sehne zu ihrem Bogen ist dasselbe wie das der gegebenen Sehne zu ihrem Bogen, den man sucht. Multipliciert man daher den in der Tafel gefundenen Bogen, der im ersten Verhältnis das Hinterglied bildet, mit der gegebenen Sehne, und dividiert dann mit der Tafelsehne, so findet man unverzüglich den gesuchten Bogen.

Ad cuius similitudinem circulus, cuius diametrum 10 et semissem contineat, proponatur, | in quem quaedam corda, cuius longitudo 6 mensuras 22
recipiat, protrahatur. Huius autem cordae ⟨arcum⟩ si scire desideras, datam cordam, et sunt 6, in 28, quae sunt tabularum diametrum, multi-
5 plicans, 168 nimirum reperies. Cuius numeri summam si in 10 et semissem, quod est dati circuli diametrum, diviseris, 16 partes exibunt, et haec est corda, cuius proportio ad tabularum diametrum ea est, quae et datae cordae ad sui circuli diametrum. In istius autem cordae directo 17 partes et 2 minuta 16que secunda invenies, quae sunt eiusdem cordae arcus in
10 tabulis. Quem si in 6, quae sunt datae cordae quantitas, duxeris, 102 partes et 13 minuta ac 36 secunda procreabuntur. Quam summam si ⟨per⟩ 16, quae sunt tabularum corda, diviseris, 6 partes et 13 minuta ac 21 secunda reperies, quod est quaesiti arcus summa.

Hac itaque via in omnibus datis cordis, si sui circuli diametrum non
15 ignoraveris, et, quemadmodum ostendimus, processeris, ad illius datae cordae arcum pervenies.

22. *Item si cuiuslibet circuli arcus, cuius diametrum sciveris, datus fuerit, et eius cordam nosse volueris,* si illius circuli diametrum 28 partes habuerit, nullo labore metitur. Datum arcum in lineis partium arcuum in-
20 quirens, quod in directo ipsius ex cordarum partibus inveneris, accipe, quia ipsum erit eius cordae longitudo.

Quod si circuli diametrum plus minusve 28 partibus ad sui constitutionem susceperit, datum arcum in 28, quod est tabularum diametrum, multiplica, indeque collectum per diametrum circuli, cuius ipse arcus ex-
25 stiterit, partire, et exibit arcus, cuius proportio ad tabularum cordam ea est, quae etiam arcus ad suam cordam. Eius itaque cordam in ipsius directo positam ⟨ex⟩ tabulis abstrahens eam in datum arcum multiplica, et quod fuerit, per arcum tabularum partire, quodque exierit, erit corda quaesita. In hoc autem nulla, ni fallor, eget similitudine, eo quod si prae-
30 dictae similitudinis conversam non ignoraveris, tu ipse absque omni doctrina manifeste illud agnoscas.

23. *Item si cuiuslibet circuli, cum circumferentem lineam sciveris, corda quaelibet data fuerit, et eius arcum nosse volueris,* si circuli diametrum per circumferentem lineam, ut supra docuimus in areae circuli cognitione, di-
35 diceris, idem, quod et supra monstravimus, invenies. Habebis etenim cordam circuli, cuius diametrum non ignorabis. Hunc autem operandi modum superius diligenter | ostendimus. 22′

---

3 arcum *in A über der Zeile ausradiert.* — 9 secundas. — 11 per *fehlt.* — 18 corda. — 25 portio. — 27 ex *fehlt in A.* — 29 similitune *A.* — 35 idem] id est. — 35—36 corda.

Als Beispiel nehmen wir einen Kreis an, dessen Durchmesser gleich $10\frac{1}{2}$ sei, und in demselben werde eine Sehne gezogen, deren Länge 6 Maasseinheiten enthält. Zur Bestimmung des Bogens dieser Sehne multipliciert man die gegebene Sehne, das ist 6, mit 28, dem Tafeldurchmesser, und erhält so 168. Wenn diese Zahl durch $10\frac{1}{2}$, den gegebenen Durchmesser, dividiert wird, so kommen 16 Theile, und das ist die Sehne, deren Verhältnis zum Tafeldurchmesser dasselbe ist, wie das der gegebenen Sehne zu ihrem Durchmesser. In der Zeile dieser Sehne findet man nun 17 Theile 2 Minuten 16 Sekunden, und das ist die Länge des Bogens, der zu der Tafelsehne gehört. Multipliciert man diesen Bogen mit 6, nämlich der Länge der gegebenen Sehne, so erhält man 102 Theile 13 Minuten und 36 Sekunden, welche durch 16, das ist die Tafelsehne, dividiert, 6 Theile 13 Minuten und 21 Sekunden ergeben, und das ist die Grösse des gesuchten Bogens.

Auf diesem Wege also kommt man für alle gegebenen Sehnen zur Kenntnis des zu der gegebenen Sehne gehörigen Bogens, sobald man nur den Kreisdurchmesser kennt, und so vorgeht, wie wir gelehrt haben.

22. *Ist ebenso der Bogen eines beliebigen Kreises, dessen Durchmesser man kennt, gegeben, und man wünscht die Sehne desselben zu finden,* so wird dieselbe, falls der Durchmesser des Kreises 28 Theile besitzt, ohne Mühe gemessen. Man sucht den gegebenen Bogen in den Kolumnen der Theile des Bogens auf, und nimmt das, was man in derselben Zeile als Theile der Sehne findet, denn das ist dann die Länge der Sehne.

Ist jedoch der gegebene Kreisdurchmesser mehr oder weniger als 28 Theile lang, so multipliciere man den gegebenen Bogen mit dem Tafeldurchmesser 28, und theile das Produkt durch den Durchmesser des Kreises, dessen Bogen gegeben ist, so ergiebt sich der Bogen, dessen Verhältnis zur Tafelsehne dasselbe ist, als das des gegebenen Bogens zu seiner Sehne. Man entnimmt also die in derselben Zeile stehende Sehne aus der Tafel und multipliciert sie mit dem gegebenen Bogen, theilt das Produkt durch den Bogen der Tafel, so ist das Ergebnis die gesuchte Sehne. Hierbei bedarf es, wenn ich nicht irre, keines Beispieles, weil, wenn man die Umkehrung des vorhergehenden Beispieles sich vergegenwärtigt, man ohne jede Belehrung die Sache klar erkennen wird.

23. *Ist ferner eine Sehne eines beliebigen Kreises, dessen Umfang man kennt, gegeben, und man will den zugehörigen Bogen ermitteln,* so wird man, sobald man den Kreisdurchmesser aus dem Umfange so berechnet hat, wie wir oben bei der Lehre vom Kreisinhalte gelehrt haben, in derselben Weise, wie wir soeben gezeigt haben, das Gewünschte finden. Man kennt ja die Sehne des Kreises, dessen Durchmesser bekannt ist. Die Methode der Auffindung haben wir oben deutlich dargelegt.

Verum si hoc idem aliter scire desideras, datam cordam in circumferentem lineam circuli tabularum, quam 88 partium constare diximus, multiplica, indeque coadunatum per summam circumferentiae circuli, corda cuius arcus data fuerit, partire, quodque exierit, erit corda circuli tabularum similis cordae datae. Eius igitur arcum per has tabulas inquirens eum in datae cordae summam multiplica, et inde collectum per cordam, quam ex tabula inveneras, quemadmodum in praecedenti numeratione feceras, partire, et quaesitum arcum veraciter invenies.

Huius autem numerationis similitudo est, ut in circulo, cuius circumferens linea 33 partes continet, si corda, cuius longitudo 6 partium exstiterit, protrahatur, et, quota sit eius arcus longitudo, non ignorare volueris, datam cordam, quae est 6, in circumferentem lineam circuli tabularum, quae est 88 partium, multiplica, et 528 procreabuntur. Cuius numeri summam per 33, quae sunt summa circumferentis lineae circuli, cuius haec corda, partire, et 16 partes invenies, quae sunt corda circuli tabularum datae cordae similis. Istius itaque cordae arcum per tabulas, ut supra monstravimus, addiscito, et eum in summam datae cordae multiplica, indeque repertum per tabularum cordam, ut superius feceras, partire, et quaesitum arcum ut supra reperies.

24. *Si quilibet arcus cuiuslibet circuli, cuius circumferentiam noveris, datus fuerit, et eius cordam per tabulas nosse volueris,* datum arcum in 88, quae sunt summa circumferentiae circuli tabularum, multiplica, et quod inveneris, per circumferentem lineam circuli, cuius datus arcus fuerit, partire, quodque exierit, erit arcus circuli tabularum arcu dato similis. Eius itaque cordam in tabulis, ut diximus, addiscens eam in arcus dati ⟨summam⟩ multiplica, indeque coadunatum per summam arcus tabularum supra reperti partire, et quod fuerit, erit corda quaesita.

Ad cuius similitudinem sit arcus 5 ulnas et semissem in sui obliquitate continens ex circulo, cuius circumferens linea 33 ulnas recipiat. Huius autem arcus longitudinem nosse volens eum in 88, quae sunt circumferentia circuli tabularum, multiplica, et 484 invenies, quibus per 33, quae sunt circumferens linea circuli, cuius arcus datus exstiterit, divisis 14 partes et 40 minuta, id est duas tertias, reperies, et hic est arcus circuli tabularum dato arcu similis, cuius cordam in tabulis 14 partes continere non dubites. Quam si in 5 et semissem, quae est | dati ⟨arcus⟩ quantitas, duxeris, 23
77 partes colligentur. Cuius numeri summam si in 14 et duas tertias di-

---

19 ut] valde. — 25—26 summam *in A über der Zeile ausradiert.* — 33 id est] idem. — 35 arcus *fehlt.*

Wünscht man aber auf andere Weise vorzugehen, so multipliciere man die gegebene Sehne mit dem Umfange des Tafelkreises, den wir zu 88 Theilen angeben, und dividiere das Produkt durch die Länge des Umfangs des gegebenen Kreises, dessen Bogen gegeben ist, dann ist das Ergebnis die Sehne des Tafelkreises, welche der gegebenen Sehne entspricht. Sucht man nun dazu den Bogen durch unsere Tafel, multipliciert ihn mit der gegebenen Sehne und theilt das Produkt durch die in der Tafel gefundene Sehne, wie man es in der vorhergehenden Berechnung that, so findet man den gesuchten Bogen nach wahrer Länge.

Ein Beispiel für diese Rechnung ist folgendes. In einem Kreise, dessen Umfang 33 Theile enthält, sei eine Sehne, deren Länge aus 6 Theilen besteht, gezogen. Will man nun wissen, wie lang der Bogen derselben ist, so multipliciere man die gegebene Sehne von 6 Theilen mit dem Umfange des Tafelkreises, der 88 Theile enthält, dann entstehen 528. Dieses Produkt dividiere man durch 33, das ist die Länge des Umfangs desjenigen Kreises, dessen Sehne gegeben ist, so findet man 16 Theile, und das ist die Sehne des Tafelkreises, die der gegebenen Sehne entspricht. Zu dieser Sehne sucht man den Bogen in der Tafel, wie wir oben gezeigt haben, und multipliciert ihn mit der Länge der gegebenen Sehne, das Produkt aber dividiert man durch die Tafelsehne, wie oben geschah, und findet dadurch den gesuchten Bogen wie oben.

24. *Ist aber ein Bogen eines beliebigen Kreises, dessen Umfang man kennt, gegeben, dessen Sehne man vermittelst der Tafel finden will,* so multipliciere man den gegebenen Bogen mit 88, das ist mit dem Umfange des Tafelkreises, und dividiere das Ergebnis durch den Umfang des Kreises, dessen Bogen gegeben ist, der Quotient ist dann der Bogen des Tafelkreises, der dem gegebenen Bogen ähnlich ist. Die zugehörige Tafelsehne sucht man, wie wir oben gezeigt haben, multipliciert sie mit der Länge des gegebenen Bogens, und dividiert das Ergebnis durch die Länge des Tafelbogens, den wir oben gefunden haben, der Quotient ist dann die gesuchte Sehne.

Als ein Beispiel sei ein Bogen gegeben, der $5\frac{1}{2}$ Ellen in seiner Rundung enthält, von einem Kreise, dessen Umfang 33 Ellen fasst. Will man nun die Länge des Bogens der Tafel ermitteln, so multipliciere man ihn mit 88, das ist mit dem Umfange des Tafelkreises, dann findet man 484, die durch 33, den Umfang des Kreises, dessen Bogen gegeben ist, dividiert 14 Theile und 40 Minuten, das sind $\frac{2}{3}$, ergeben, und das ist der Bogen des Tafelkreises, der dem gegebenen Bogen ähnlich ist. Seine Sehne ist in der Tafel ohne Zweifel gleich 14 Theilen. Multipliciert man sie mit $5\frac{1}{2}$, der Länge des gegebenen Bogens, so erhält man 77 Theile, und dividiert

viseris, quae sunt quantitas arcus tabularum, 5 et quarta provenient, quod est arcus dati corda, quam quaeris.

25. Item si arcus, cuius quantitas 27 et semissem continuerit, ex circulo, cuius circumferentiam 33 partes metiuntur, proponatur, et eius cordae longitudinem scire desideras, eam 5 et quartam, sicut et supra, continere reperies, propterea quod omnis arcus, qui semicirculo maior exstiterit, si ex tota sui circuli circumferentia demptus fuerit, arcum semicirculo minorem relinquit. Horum quidem duorum arcuum corda erit eadem, eo quod omnis recta linea, quae in circulo protrahitur praeter diametrum, si ex utraque sui parte in ipsius circumferentia terminatur eum per inaequales dividit partes. Diametra enim eum semper per aequalia partiuntur, aliae vero lineae circulum per inaequales partes dividunt. Harum altera pars maior, altera vero semicirculo minor existit, et linea dividens corda utriusque arcus iudicatur. Arcus autem in tabulis cordarum descriptus est duorum arcuum eandem cordam habentium minimus. Maiorem quidem arcum ibi describere non necessarium duximus, eo quod per minorem arcum in tabulis descriptum leviter inveniri poterit. Minore enim arcu ex tota circumferentia dempto maior arcus, qui ei ad eandem cordam habendam copulatur, relinquitur. Verum si arcum semicirculo maiorem habueris et eius cordam nosse volueris, eum totum ex sui circuli circumferentia demens arcus semicirculo minor remanebit, cuius cordam inveniens eam eiusdem maioris arcus quaesitam cordam fore non ambigas.

26. Hoc etiam similiter ab animo non labatur, quod *in omnibus circulorum cordis duae sagittae in earum dimidio secundum rectum angulum elevatae et per centrum productae reperiuntur.* Hae autem in nulla linearum, quae circuli corda vocetur, sibimet invicem sunt aequales, sed altera longior, altera brevior iudicabitur. Longior quidem in directo longioris, brevior autem in directo brevioris arcus protrahitur. Harum quippe sagittarum longitudines in arearum portionum circuli cognitione, cum embadis portionum embada triangulorum eisdem portionibus contigua superaddere vel minuere volueris, sunt perutillimae, quemadmodum in hac eadem particula superius indicavimus.

Cum igitur cordam et circuli diametrum sciveris, si sagittae longitudinem | *nosse desideras,* diametri dimidium in semet multiplica, et ex collecto 23′
medietatis cordae multiplicationem deme, residuique radicem inquire, quam si diametri dimidio superadderis, longiorem sagittam invenies, si vero ex

---

1 quartam *B*. — 4 circumferentia. — 6 minor *A*. — 7 fueris. — 11 inaequalia *A*. — 12 Harum] Nam *B*. — 15 Maiorem] Maior est. — 26 sunt sunt *A*. — 29—30 portionum portionum *A*. — 30 eisdem] eiusdemque *B*.

man diese Zahl durch $14\frac{2}{3}$, das ist die Länge des Tafelbogens, so kommen $5\frac{1}{4}$, und das ist die Sehne des gegebenen Bogens, den man sucht.

25. Wird ferner ein Bogen von der Länge $27\frac{1}{2}$ vorgelegt von einem Kreise, dessen Umfang 33 Theile misst, und man sucht die zugehörige Sehne, so findet man, dass sie $5\frac{1}{4}$ Theile wie oben enthält, weil jeder Bogen, der grösser ist als ein Halbkreis, von dem ganzen Kreisumfange abgezogen einen Bogen kleiner als der Halbkreis übrig lässt. Diese beiden Bogen besitzen dieselbe Sehne, weil jede gerade Linie, die, ohne Durchmesser zu sein, im Kreise gezogen wird und nach beiden Seiten in dem Umkreise endigt, ihn in zwei ungleiche Stücke theilt. Der Durchmesser halbiert ihn nämlich immer, jede andere Gerade aber zerschneidet den Kreis in zwei ungleiche Theile. Von diesen Theilen ist der eine grösser, der andere kleiner als der Halbkreis, und die Theilungslinie wird als Sehne von beiden Bogen angesehen. Der Bogen aber, der in der Sehnentafel verzeichnet ist, ist von den beiden Bogen, welche dieselbe Sehne besitzen, der kleinste. Den grössern Bogen dort auch zu verzeichnen hielten wir für nicht nöthig, weil er durch den in der Tafel aufgeführten kleinern Bogen leicht gefunden werden kann. Nimmt man nämlich den kleinern Bogen von dem ganzen Umfange weg, so bleibt der grössere Bogen übrig, der jenem als zu derselben Sehne gehörig verbunden ist. Hat man aber einen Bogen grösser als der Halbkreis und will seine Sehne finden, so zieht man ihn von dem Umfange des zugehörigen Kreises ab, und es bleibt der Bogen übrig, der kleiner als der Halbkreis ist, dessen Sehne sucht man auf, und sie ist dann sicher auch die gesuchte Sehne desselben grösseren Bogens.

26. Das lasse man auch niemals ausser Acht, *dass für jede Sehne im Kreise zwei Pfeile in ihrem Halbierungspunkte unter rechten Winkeln errichtet und durch den Mittelpunkt gezogen gefunden werden können.* Sie sind aber für keine Gerade, die Kreissehne genannt werden kann, einander gleich, sondern der eine ist länger, der andere aber kürzer; der längere wird nach dem grössern Bogen, der kleinere aber nach dem kleinern hin gezogen. Die Länge der Pfeile ist für die Auffindung des Inhaltes der Kreisabschnitte, wenn man dem Inhalte der Kreisausschnitte den Inhalt der Dreiecke, welche diesen Ausschnitten anliegen, hinzufügen oder von ihnen wegnehmen muss, von höchstem Nutzen, wie wir oben in diesem Theile schon auseinander setzten.

Kennt man nun die Sehne und den Kreisdurchmesser, und will die Länge des Pfeiles finden, so multipliciere man den Halbmesser mit sich selbst und subtrahiere von dem Produkte das Quadrat der halben Sehne, von dem Reste suche man die Wurzel. Addiert man diese dann zu dem

eodem depresseris, breviorem sagittam nimirum reperies.[1]) Quapropter si duarum sagittarum alteram sciveris et eam ex diametro depresseris, alteram sagittam incontanter habebis. Atque *si utramque sagittam sciveris et earum cordam nosse volueris,* sagittarum alteram in alteram multiplica, indeque
5 collecti radicem accipiens, eam quaesitae cordae dimidium fore non dubites. Qua duplicata cordam integram reperies.[2])

Si autem cordam et sagittarum alteram sciveris, diametrum vero non ignorare volueris, cordae dimidium in se ipsum multiplica, et collectum inde per notam sagittam partire, quodque exierit, erit alterius sagittae longitudo.
10 Istarum nempe sagittarum longitudines in unum coadunatae totius diametri longitudinem efficiunt.[3])

Huius itaque partis dimensionibus perfecte monstratis ad dimensionem multilaterarum figurarum explanationem transitum faciamus.

Quinta pars in multilaterarum figurarum dimensionibus.

15 **1.** Ut superius in his, quae praemissa sunt, ostendimus, harum figurarum diversa sunt genera. Quaedam enim sunt *pentagonae,* quaedam *exagonae,* quaedam autem *eptagonae* et aliarum etiam conplurium generum. Hae autem figurae nunc aequilaterae et aequiangulae, nunc diversorum laterum et diversorum angulorum inveniuntur. Quapropter earum dimen-
20 siones monstrare volentes ad earum figurarum evidentiam, quae sunt aequilaterae et aequiangulae, quaedam regula praemittatur. Ea est huius modi.

Si circulus intra figuram rectilineam eius omnia latera contingens describatur, multiplicatio medietatis diametri illius in omnium laterum eiusdem figurae dimidium ipsius figurae aream reddit.[4])

25 In omni vero tali figura tetragona et deinceps omnia eius latera contingens circulus scribi potest. In illis autem, quarum latera et anguli diversificantur, circulus nequaquam circumscribi potest. Quod si in aliqua figurarum, ut in triangula, vel tetragona, seu pentagona, sive aliarum qualibet circulus eius omnia latera contingens circumscribatur, multiplicationem
30 medietatis diametri in illius omnium laterum figurae dimidium eiusdem embadum procreare non dubites.

---

2 ex diametro eam *B.* — 5 quaesitam cordam. — 14 *In A ausradiert.* — 24 *Hinter* dimidium *setzt A nochmals:* ipsius figurae dimidium. — 25 tali *fehlt in B.* — 25—31 *Neben diesen Zeilen steht in B die Randglosse:* Hic vel omnino tota littera corrupta est, vel autor falsitates maximas ait. *B hat also übersehen, dass der Verfasser nur von regulären Figuren handeln will.*

---

1) D. h. $\operatorname{sag}\alpha = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{cord}\alpha}{2}\right)^2}$.

Halbmesser, so erhält man den längern Pfeil, subtrahiert man sie aber davon, so findet man den kürzern Pfeil.[1]) Kennt man also den einen der beiden Pfeile und subtrahiert ihn von dem Durchmesser, so erhält man ohne weiteres den andern Pfeil. *Kennt man beide Pfeile und will ihre gemeinsame Sehne finden,* so multipliciere man den einen mit dem andern, dann ist sicherlich die Wurzel des erhaltenen Produktes die Hälfte der gesuchten Sehne, durch deren Verdoppelung man die ganze Sehne findet.[2])

Hat man aber die Sehne und den einen Pfeil gegeben, und will die Länge des Durchmessers erhalten, so multipliciert man die Halbsehne mit sich selbst und theilt das Ergebnis durch den bekannten Pfeil. Der Quotient ist die Länge des andern Pfeils. Beide Pfeillängen zusammengezählt machen dann die Länge des ganzen Durchmessers aus.[3])

Nachdem so die Ausmessungen dieses Theiles vollständig erledigt sind, gehen wir zur Darlegung der Ausmessung vielseitiger Figuren über.

Fünfter Theil. Die Ausmessung der vielseitigen Figuren.

1. Wie wir oben in den vorausgeschickten Bemerkungen gezeigt haben, giebt es verschiedene Arten dieser Figuren. Einige sind nämlich *Fünfecke,* andere *Sechsecke,* wieder andere *Siebenecke* und anderer vielerlei Arten. Diese Figuren sind nun bald gleichseitig und gleichwinklig, bald ungleichseitig und ungleichwinklig. Indem wir jetzt ihre Ausmessung zeigen wollen, soll zur näheren Kenntnis derjenigen Figuren, welche gleichseitig und gleichwinklig sind, ein gewisser Satz vorausgeschickt werden. Es ist folgender: *Wenn innerhalb einer geradlinigen Figur ein Kreis beschrieben werden kann, der sämmtliche Seiten derselben berührt, so ergiebt das Produkt des Halbmessers desselben mit der halben Summe aller Seiten der Figur den Inhalt der Figur.*[4])

In jede solche (regelmässige) Figur, nämlich Quadrat u. s. w., lässt sich ein alle Seiten berührender Kreis beschreiben. In diejenigen aber, deren Seiten und Winkel nicht gleich sind, kann niemals ein Kreis beschrieben werden. Deshalb ist sicher, dass, wenn in irgend eine solche Figur, wie in ein Dreieck, ein Quadrat, ein Fünfeck oder irgend eine der andern, ein Kreis, der sämmtliche Seiten berührt, beschrieben werden kann, das Produkt des Halbmessers mit der halben Summe aller Seiten der Figur den Inhalt derselben erzeugt.

---

2) $\operatorname{cord} \alpha = 2\sqrt{\operatorname{sag} \alpha\,(d - \operatorname{sag} \alpha)}$.

3) $d = \operatorname{sag} \alpha + \left(\frac{\operatorname{cord} \alpha}{2}\right)^2 : \operatorname{sag} \alpha$.

4) Leonardo 84, 11.

2. Trianguli quidem tetragonique similiter ostendere nobis super|vaca- 24
neum est, eo quod, qualiter ad eorum arearum cognitionem perveniatur, superius ostendimus.

Pentagoni vero similitudinem, in cuius lateribus *abcde* litterae de-
5 signentur (Fig. 41), et cuius omnia latera omnesque anguli sint ad invicem aequales, indicamus, intra quam circulus *fghkl* ipsius quinque latera contingens circumscribatur, cuius centrum punctus *m*. Dicemus igitur, ⟨quod⟩ multiplicatio medietatis diametri circuli in dimidium omnium quinque laterum pentagoni eius embadum efficiet. Diametri vero dimidium est
10 linea a puncto *m* ad quamlibet punctorum contactus protracta. Quare si a puncto *m*, quod est circuli centrum, ad duo *a*, *b* puncta, quae sunt duo anguli pentagoni, duas lineas protraxerimus, triangulum *mab* constituamus, cuius embadum multiplicatio perpendicularis supra dimidium basis erectae in basis dimidium efficit. Si autem a puncto *m* ad punctum *l*, in quo
15 circulus latus *ab* contingit, lineam produxerimus, erit illa linea perpendicularis trianguli *mab*, quod est diametri illius circuli medietas. Igitur si hanc perpendicularem lineam in dimidium *ab* multiplicaveris, embadum trianguli *mab* procuratur. Manifestum est igitur, quod multiplicatio medietatis diametri in sui lateris dimidium trianguli embadum con-
20 stituit. Hac itaque via quinque triangulos super quinque pentagoni latera constitues, eritque singulorum area ut multiplicatio medietatis diametri in sui lateris dimidium. Quinque vero triangulorum embada simul collecta totius pentagoni embadum constituunt, quod totum ex multiplicatione medietatis diametri in omnium quinque laterum dimidium
25 provenit.[1])

3. Ad istius omnium simulitudinem in omni figura multorum vel paucorum laterum, si circulum in ipsam omnia eius latera contingentem circumscripseris, operari poteris. Et erit etenim eius embadum ut multiplicatio medietatis diametri in omnium eius laterum dimidium.

30 **4.** Et quoniam in omni figura circulus eius omnia latera contingens circumscribi non potest, ad omnium figurarum plus quam quatuor latera continentium dimensiones non est haec regula sufficiens. Quapropter hanc regulam aliam ad omnium figurarum rectilinearum dimensiones sufficientem indicabo.

---

8 quod *in A über der Zeile ausradiert.* — 14 a puncto *l.* — 18 procurabunt. — 22 diametri] dimidium. — 32 sufficiens] subiciens. — 33 sufficiente.

---

1) Leonardo 84, 14.

2. Dies für das Dreieck und ebenso für das Quadrat zu zeigen, ist überflüssig, weil wir schon oben gelehrt haben, auf welche Weise wir zur Kenntnis ihres Inhaltes gelangen.

Als Beispiel eines Fünfecks nehmen wir eines, an dessen Seiten die Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d*, *e* geschrieben seien (Fig. 41), und dessen Seiten und Winkel sämmtlich einander gleich sind. Innerhalb desselben sei ein alle seine fünf Seiten berührender Kreis *fghkl* beschrieben, dessen Mittelpunkt *m* heisse. Wir behaupten also, es mache das Produkt des Halbmessers des Kreises mit der halben Summe aller fünf Seiten des Fünfecks den Inhalt desselben aus. Halbmesser des Kreises ist aber die vom Punkte *m* nach irgend einem Berührungspunkte gezogene Gerade. Verbinden wir also den Punkt *m*, das ist den Mittelpunkt des Kreises, mit den beiden Punkten *a*, *b*, das sind zwei Ecken des Fünfecks, durch zwei gerade Linien, so bilden wir dadurch das Dreieck *mab*, dessen Inhalt durch Multiplikation der auf dem Halbierungspunkte der Grundlinie errichteten Höhe mit der halben Grundlinie entsteht. Wenn man aber vom Punkte *m* nach dem Punkte *l*, in welchem der Kreis die Seite *ab* berührt, eine gerade Linie zieht, so ist diese die Höhe des Dreiecks *mab* und zugleich Halbmesser jenes Kreises. Wenn wir also die Höhe mit der Hälfte von *ab* multiplicieren, so entsteht dadurch der Inhalt des Dreiecks *mab*. Es ist also klar, dass das Produkt aus dem Halbmesser und der Hälfte der Seite des Dreiecks dessen Inhalt ausmacht. Auf diese Weise kann man fünf Dreiecke über den fünf Seiten des Fünfecks konstruieren, und der Inhalt jedes einzelnen ist gleich dem Produkte des Halbmessers mit der Hälfte seiner Seite. Die Inhalte der fünf Dreiecke geben aber addiert den Flächeninhalt des ganzen Fünfecks, das also als das Produkt des Halbmessers mit der halben Summe aller Seiten herauskommt.[1])

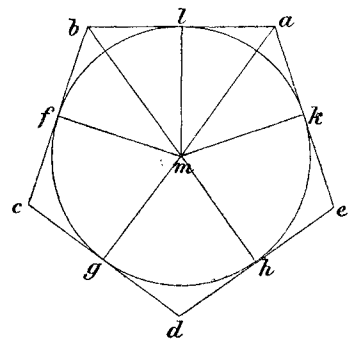


Fig. 41.

3. In genau derselben Weise kann man bei jeder Figur mit vielen oder wenigen Seiten vorgehen, wenn man in sie einen allen Seiten berührenden Kreis einbeschreiben kann, und es wird dann der Inhalt gleich dem Produkte des Halbmessers mit der halben Summe aller Seiten hervorgehen.

4. Da nun nicht in jede Figur sich ein Kreis beschreiben lässt, der alle ihre Seiten berührt, so ist die obige Regel zur Ausmessung aller Figuren, welche mehr als vier Seiten besitzen, nicht ausreichend. Deshalb werden wir noch die folgende Regel angeben, welche für die Ausmessung aller geradliniger Figuren ausreicht.

Scito igitur, quod *omnis plana superficies rectilinea in tot rectilineos triangulos dividitur, quot sunt eiusdem figurae latera duobus inde subtractis,* ut quadrilaterum in duos, pentagonum in tres, exagonum in quatuor, et ita de singulis. Hac igitur regula quamlibet figuram rectilineam per rectilineos triangulos | partire poteris. Cumque 24′ singulorum triangulorum embada, sicut supra docuimus, didiceris, et ea in unum coadunaveris, illius totius figurae aream reperies. Veluti si in praedicto pentagono (Fig. 42) a puncto *a* ad duo *d*, *c* puncta duas rectas lineas protraxeris, ipsum pentagonum in tres ad minus triangulos dividatur, quorum areas addiscens totius pentagoni aream non ignorabis, ut in hac figura monstratur.[1])

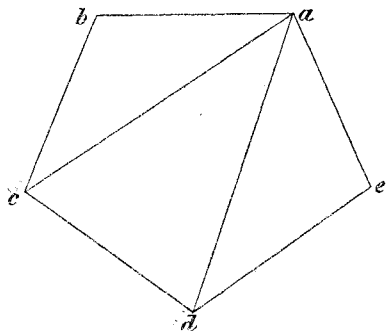


Fig. 42.

5. Has nempe dimensiones, quas hucusque docuimus, sunt agrorum superficialium, quorum superficies a rectitudine et aequalitate non recedunt. Et quia multipliciter agrorum alii in declivio reperiuntur, alii vero superficiem quasi gibbosam repraesentant, ne eos metiendo devies, tibi quam maxime dico cavendum. Si campus igitur, cuius aream nosse cupis, in declivi montis latere proiciatur, ipsius altitudinem, quod est eius in alto longitudo a summo capitis usque ad eius radicem, addiscens eius altitudinis multiplicationem ex multiplicatione longitudinis eiusdem campi deme, residuique radicem in ipsius campi latitudinem multiplicans eius incontanter embadum reperies.

6. Si vero campus ille concavus fuerit, hac eadem via procedas, ⟨ut ipsius embadum secundum planam et rectam superficiem addiscas⟩. Illa etenim, quae quolibet ei modo superponuntur, ut semina, arbores et aedificia, secundum rectum angulum et non aliter elevantur. Quare, quod in metiendo propter elevationem vel depressionem supererit, nullum conferret ulli iuvamen: est igitur inde prorsus resecandum.[2])

7. In mensurando vero peritissimi, qualiter montium altitudines, investigarent, summa solertia assiduoque labore didicerunt, ut per eas ad ipsarum arearum cognitionem veraciter provenirent. Quandam enim arundinem in radice montis secundum rectum angulum elevantes in eiusdem arundinis supremo aliam arundinem secundum rectum angulum coaptabant,

---

5 Hanc igitur regulam. — 19 multipliciter] multiplicationes. — 20 gibosa. — 27—28 ut . . . addiscas *in A auf dem Rande ausradiert.* — 29 quaelibet. — 29—30 haedificia *A.* — 30 Quare pro in.

Man wisse also, *dass jede geradlinige ebene Fläche in soviel geradlinige Dreiecke getheilt werden kann, als die betreffende Figur Seiten hat, weniger zwei.* So das Viereck in zwei, das Fünfeck in drei, das Sechseck in vier u. s. w. Durch diese Regel hat man also die Möglichkeit, jede geradlinige Figur in geradlinige Dreiecke zu zerschneiden. Da man nun den Inhalt der einzelnen Dreiecke, wie wir oben gezeigt haben, finden und sie alle zusammennehmen kann, so erhält man so den Inhalt jener ganzen Figur. Zieht man z. B. in dem oben gezeichneten Fünfecke (Fig. 42) vom Punkte *a* nach den beiden Punkten *d*, *c* zwei gerade Linien, so wird dadurch das Fünfeck mindestens in drei Dreiecke zerschnitten, und indem man von diesen die Inhalte sucht, kennt man auch die Fläche des ganzen Fünfecks, wie aus beigegebener Figur ersichtlich.[1])

5. Die Ausmessungen nun, die wir bis jetzt gelehrt haben, sind solche von Ackerflächen, deren Oberflächen von der Horizontalebene nicht abweichen. Da aber vielfach einige Felder auf Abhängen gefunden werden, andere wieder eine gleichsam einen Höcker bildende Oberfläche darstellen, so rathe ich, man möge sich gar sehr hüten, bei ihrer Ausmessung Fehler zu machen. Wenn nämlich ein Feld, dessen Flächeninhalt man finden will, auf dem Abhange eines Berges liegt, so suche man zunächst die Höhe desselben, das ist seine Abmessung in der Höhe vom Gipfel bis zu seinem Fusse, und subtrahiere das Quadrat dieser Höhe von dem Quadrate der Länge desselben Ackers. Multipliciert man dann die Wurzel des Restes mit der Breite des Feldes, so findet man unverzüglich seinen Flächeninhalt.

6. Wäre aber das Feld vertieft, so müsste man ebenso vorgehen, um seinen Flächeninhalt nach der Horizontalebene zu erhalten. Denn das, was man irgendwie darauf thut, wie Sämereien, Bäume oder Gebäude, wird unter rechtem Winkel und nicht anders errichtet. Das also, was sich beim Messen wegen der Erhöhung oder Vertiefung mehr ergiebt, bringt niemandem irgend welchen Nutzen, und ist deshalb vollständig zu vernachlässigen.[2])

7. Die kundigsten unter den Feldmessern untersuchten nun mit grösster Sorgfalt und beharrlichstem Fleisse, wie sie die Höhen der Berge auffinden könnten, um durch sie zur genauen Kenntnis ihres Inhaltes zu gelangen. Sie errichteten nämlich am Fusse eines Berges eine Latte und verbanden am Kopfende dieser Latte unter rechtem Winkel damit eine zweite Latte von solcher Länge, dass auch der zweite äussere Theil der Kopflatte irgend einen Punkt des Berges berührte. Dann massen sie genau die Länge der Fläche des Berges vom Fusse der senkrechten Latte bis zu dem Punkte, den die obere Latte berührte, und fanden diese Länge immer

1) Leonardo 83, 5 v. u. 2) Leonardo 107, 19.

tantae videlicet longitudinis, ut ipsius vel alterum capitis extrema pars alicui parti superficiei montis adhaereret. Post haec a radice arundinis erectae usque ad locum, quem arundo superposita tangebat, montis superficiem diligenter metiendo illius quantitatem semper maiorem illa quantitate arundinis superpositae, quae est a loco contactus usque ad arundinis erectae verticem, inveniebant, et secundum illam differentiam iudicabant differentiam, quae erat inter declivam et planam montis superficiem.

Ad cuius similitudinem campus in declivi montis constitutus proponatur (Fig. 43), in cuius declivo 20, in latitudine vero 15 ulnae contineantur. Eius autem planam et directam superficiem, supra quam continetur, scire cupientes, super notae longitudinis lineam duas *a*, *b* litteras describamus, ipsiusque longitudinem secundum planam et directam superficiem linea *eb* repraesentat, | altitudo vero eiusdem ab *ae* linea demonstratur. Erit ergo haec figura trigonus *aeb*, in cuius *ab* linea 20, ut praediximus, ulnas invenimus. Et manifestum est, quod campus, qui nobis proponitur, metiendus est ut linea *eb*, quae totius campi basis esse dicitur. Omnis namque campus, in cuius epiphania aliquid est seminandum, vel plantandum, vel superaedificiandum, taliter est metiendus. Quapropter, qualiter ad certam congnitionem longitudinis lineae *eb* ignotae per lineam *ab* notam perveniatur, elaborabimus. Quandam igitur arundinem, loco cuius linea *bc* ponitur, in inferiori parte lineae *ab*, quod est punctus *b*, orthogonaliter constituimus, in cuius supremo capite quandam aliam arundinem, pro qua linea *dc* protrahitur, secundum rectum angulum adaptamus, tantae scilicet quantitatis, ut ex altera sui parte ad praefati campi superficiem perveniat et eam contingat. Triangulus itaque *bcd* triangulo *aeb* similis est elevatus, in cuius *dc* latere duas ulnas et semissem, in alio vero latere *bd* tres tantum et non plus invenimus. Verum quia hi duo trianguli sibimet invicem similes ordinantur, erit proportio lineae *cd* minoris trianguli ad lineam *eb* maioris trianguli ut proportio lineae *db* ad totam lineam *ba*. Quare si *dc*, primum antecedens, in *ba*, secundum consequens, multiplicaverimus, et quod fuerit, per *db*, secundum antecedens, diviserimus, primum *eb* consequens quaesitum ex divisione proveniet. Veluti si duo et semissem, quod est longitudo lineae *dc*, in 20, quae sunt lineae *ab* longitudo, multiplicaverimus, 50 provenient. Cuius numeri summam si in 3, quae sunt lineae *db* longitudo, diviserimus, 17 minus triente reperies, et haec est longitudinis *eb* summa, per quam praedicti

---

17 ephiphania. — 18 superhaedificiandum *A*. — 19 qualiter] quoniam *A*. — 34 50] L *A*. — 35 3] III *A*.

grösser als die Grösse der obern Latte vom Berührungspunkte bis zum Scheitelpunkte der senkrecht errichteten Latte. Und nach dem Betrage dieses Unterschiedes beurtheilten sie den Unterschied, der zwischen der abhängigen und der Horizontalfläche des Berges bestand.

Um ein Beispiel zu zeigen, sei ein Feld gegeben, das auf dem Abhange eines Berges liegt (Fig. 43); der Abhang möge 20, die Breite aber 15 Ellen enthalten. Um aber die Horizontalfläche, auf welcher es enthalten ist, zu finden, schreiben wir an seine bekannte Länge die Buchstaben *a*, *b*, seine Länge auf der Horizontalebene stelle die Gerade *eb* dar, seine Höhe aber sei durch die Gerade *ae* bezeichnet. Es ist also diese Figur das Dreieck *aeb*, in dessen Seite *ab*, wie wir oben sagten, 20 Ellen gefunden sind. Nun ist klar, dass das uns vorgelegte Feld nach der Geraden *eb* zu messen ist, welche die Grundlinie des ganzen Feldes heisst. Jedes Feld nämlich, auf dessen Fläche etwas zu säen, oder zu pflanzen, oder zu erbauen ist, muss so genommen werden. Wir müssen daher untersuchen, wie wir zur genauen Kenntnis der Länge der unbekannten Linie *eb* durch die bekannte Linie *ab* gelangen können. Wir stellen deshalb am untern Ende der Geraden *ab*, das ist im Punkte *b*, eine Latte, welche die Gerade *bc* darstellen soll, senkrecht auf, der wir im Scheitelpunkte eine andere Latte, für welche die Linie *dc* gezogen werden möge, unter rechtem Winkel verbinden, und zwar von solcher Länge, dass ihr anderes Ende an die Fläche des vorgenannten Feldes heranreicht und sie berührt. Das Dreieck *bcd* ist dadurch dem Dreiecke *aeb* ähnlich konstruiert. In seiner Seite *dc* finden wir $2\frac{1}{2}$ Ellen, in der andern *bd* nur drei und nicht mehr. Da aber die beiden Dreiecke einander ähnlich angeordnet sind, so wird das Verhältnis der Seite *cd* des kleinern Dreiecks zur Seite *eb* des grössern gleich dem Verhältnis der Seite *db* zur ganzen Länge *ab* sein. Multipliciert man daher *dc*, das erste Vorderglied, mit *ab*, dem zweiten Hintergliede, und dividiert das Produkt durch *db*, das zweite Vorderglied, so wird aus der Division das gesuchte erste Hinterglied *eb* hervorgehen. Wenn man also hier $2\frac{1}{2}$, die Länge der Linie *dc*, mit 20, der Länge der Linie *ab*, multipliciert, so kommen 50. Theilen wir dann diese Zahl durch 3, das ist die Länge der Linie *db*, so finden wir 17 weniger $\frac{1}{3}$, und das ist der Betrag der Länge *eb*, durch welche die Fläche des genannten

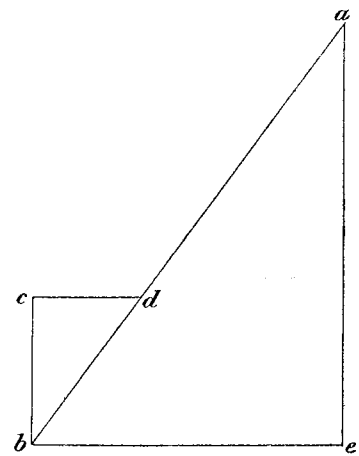


Fig. 43.

campi *eb* embadum est investigandum. Quapropter si 15, quae sunt totius campi latitudo, in lineam *eb*, quae 17 in se minus triente continet, multiplicaverimus, praedicti campi embadum non ignorabimus.[1])

8. Ad huius itaque similitudinem omnes agros, quorum superficies non sunt aequales, directe mensurare debemus. Cumque lineam *cb* in triangulo *dcb* consequens, quae arundo stans, cuius longitudo unam et modicum plus duabus tertiis in se recipit, in totam lineam *ab* notam, quae est in triangulo *aeb* antecedens, multiplicaverimus, et quod fuerit, per notam lineam *db*, antecedens in triangulo *dcb*, diviserimus, lineae *ae*, in triangulo *aeb* consequentis, longitudo proveniet, quod est campi altitudo a terrae superficie, ipsamque | in hac figura 11 ulnas et unam 33^{am} continere 25′ probatur. Altitudinis namque numeratio est multis necessaria, nam ad perpendiculares piramidum inveniendas, quemadmodum in quarto capitulo deo volente monstrabimus, est satis ydonea.

9. Item si campus in declivo rotundi montis constituatur, et eius embadum secundum planam et directam superficiem nosse desideras, quandam arundinem orthogonaliter in radice montis erigens in eiusdem arundinis supremo capite aliam arundinem secundum rectum angulum coapta, tantae scilicet longitudinis, ut eius alterum caput campi superficiem, sicut supra docuimus, contingat. Et manifestum est, quod duae lineae *db*, *ab* sunt duo arcus circumferentiae eiusdem circuli, et uterque notus, eo quod arcus *ab* campi, cuius embadum quaeritur, longitudinem repraesentat (Fig. 44). Arcus vero *db* est arcus a duabus arundinibus superius ordinatis inclusus, cuius cordam per triangulum, intra quem ipsa continetur, addisces, si lineam *dc* et lineam *cb* in se ipsas duxeris, et duas multiplicationes in unum coadunaveris, collectique radicem acceperis. Ipsa etiam erit longitudo cordae arcus *db*, ut hac in figura subscripta docetur. Istius itaque cordae longitudine nota eius sagittam invenire laboremus, ut per eas ad totius circuli diametrum perveniamus. Manifestum est autem, quod omnis sagitta cordam et arcum in duo partitur aequalia. Huius igitur sagittae loco lineam *ghf* a puncto *g*, quod est cordae dimidium, protractam et arcum *db* in duo aequalia supra punctum *h* secantem constituamus, eamque versus lineam *cb*, donec supra punctum *f* ipsam tangat,

---

6—7 modius plus. — 18—19 coapta, tantae] coaptantae. — 24 corda. — 28 longitudinem. — 29 perveniam.

---

1) Leonardo 108, 12 v. u.

Feldes *eb* zu bestimmen ist. Multiplicieren wir aber 15, das ist die Breite der ganzen Fläche, mit der Geraden *eb*, welche 17 weniger $\frac{1}{3}$ enthält, so werden wir den Flächeninhalt des gegebenen Feldes kennen lernen.[1])

8. Nach Art dieser Betrachtung müssen wir also alle Felder ausmessen, deren Oberflächen nicht in der Horizontalebene liegen. Wenn wir ferner die Gerade *cb*, die im Dreiecke *dcb* das Hinterglied ist, sie heisst die stehende Latte und enthält eine Elle und eine Kleinigkeit mehr als $\frac{2}{3}$, mit der ganzen bekannten Linie *ab*, die im Dreiecke *aeb* das Vorderglied bildet, multiplicieren, und das Produkt durch die bekannte Linie *db*, das Vorderglied im Dreieck *dcb*, dividieren, so kommt die Länge der Geraden *ae*, des Hintergliedes im Dreiecke *aeb*, und sie ist die Höhe des Feldes von der Erdoberfläche. Man findet, dass sie in der vorliegenden Figur $11\frac{1}{33}$ Ellen enthält. Die Berechnung der Höhe ist nämlich vielfach nothwendig, denn sie ist zur Bestimmung der Höhe der Pyramiden sehr nützlich, wie wir im vierten Kapitel, so Gott will, zeigen werden.

9. Ist ferner ein Feld auf dem Abhange eines runden Berges gelegen, und man will seine Fläche nach der Horizontalebene kennen lernen, so errichtet man wieder eine Latte senkrecht am Fusse des Berges, und verbindet mit ihr im Scheitelpunkte rechtwinklig eine zweite Latte von solcher Länge, dass ihr anderes Ende die Fläche des Berges berührt, so wie wir oben gelehrt haben. Nun ist klar, dass die beiden Linien *db* und *ab* zwei Bogen des Umfanges ein und desselben Kreises, und dass beide bekannt sind, weil der Bogen *ab* die Länge des Feldes darstellt, dessen Inhalt wir suchen (Fig. 44), der Bogen *db* aber der Bogen ist, welcher von den beiden oben errichteten Latten eingeschlossen wird. Die Sehne des letzteren findet man vermöge des Dreiecks, dem sie angehört, wenn man jede der beiden Linien *dc* und *cb* mit sich selbst vervielfacht, die beiden Quadrate zusammenaddiert und aus der Summe die Wurzel zieht. Sie ist dann die Länge der Sehne des Bogens *db*, wie in beigegebener Figur gezeigt ist. Nachdem wir so die Länge der Sehne kennen, müssen wir uns bemühen, den Pfeil zu finden, damit wir durch ihn zur Kenntnis des ganzen Kreisdurchmessers gelangen. Es ist aber klar, dass der Pfeil jedesmal die Sehne und den Bogen in zwei gleiche Theile theilt. Für den fraglichen Pfeil ziehen wir daher die Gerade *ghf* vom Halbierungspunkte *g* der Sehne aus, welche den Bogen *db*

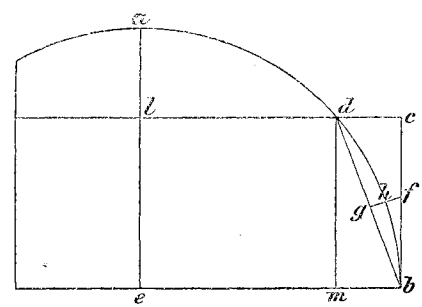


Fig. 44.

extrahamus. Triangulus itaque *fbg* triangulo *bcd* similis constituetur: erit ergo proportio lineae *dc* ad lineam *cb* sicut proportio lineae *fg* ad lineam *gb*. Tres autem lineae *dc*, *cb*, *gb* sunt notae, quarta vero *fg* ignota, quare si notam ⟨lineam *dc*, antecedens, in notam lineam *gb*, consequens, multiplicaverimus, et quod fuerit, per notam⟩ *cb* lineam diviserimus, exibit linea *fg* ignota. Qua reperta qualiter ad lineam *gh* pervenire possimus, ostendamus. Quia igitur proportio *dc* ad *db* est ut proportio *fg* ad *fb*, si lineam *fg* in lineam *db* multiplicaverimus, indeque collectum per lineam *cd* diviserimus, summam lineae *fb* reperiemus. Qua inventa spatium, quod est a puncto *f* noto usque ad punctum *h* subtiliter mensuremus, qua lineae *fh* longitudinem addiscamus. Cumque eam cognoverimus, si eius summam ex summa totius notae lineae *fhg* depresserimus, longitudo lineae *gh*, quae est sagitta quaesita, remanebit, per quam et per cordam *db* circuli diametrum, quemadmodum in fine quartae partis explanavimus, inveniemus. Quo veraciter cognito cordam | arcus, 26
qui noto arcui *ad* duplum exstiterit, sicut in tabulis cordarum et arcuum monstravimus, investigare potuissemus. Erit itaque illius cordae dimidium ut linea *dl* in hac eadem figura. Cui si lineam *dc* notam superadiunxerimus, tota linea *cdl* nota perveniet. Ipsam autem lineae *bme*, quae pro totius obliquitatis campi longitudine ponitur, aequam fore ratio demonstrat.[1])

10. Ad alterius vero partis, quae latitudo dicitur, cognitionem, nisi eandem vel consimilem tortuositatem habuerit, laborandum fore non existimamus. Quod si tortuositas in utraque parte, sicut in apium thalamis, vel alvis, vel in sphaera fuerit, ad istius similitudinem numerando procedemus. Saepe tamen illud subtiliter observare iubemur, quantum ad veram ipsius embadi numerationem perveniamus.

Hoc itaque secundo capitulo diligenter enodato ad tertium capitulum divina opitulante clementia transeamus oportet.

---

1 simul *B*. — 4—5 lineam . . . notam *in A auf dem Rande ausradiert.*

---

1) Leonardo 109, 21.

im Punkte *h* in zwei gleiche Stücke theilt, und verlängern sie nach der Geraden *cb* hin, bis sie diese im Punkte *f* trifft. Dann ist das Dreieck *fbg* dem Dreiecke *bcd* ähnlich angeordnet, also ist das Verhältnis der Linie *dc* zur Linie *cb* gleich dem Verhältnis der Linie *fg* zur Linie *gb*. Die drei Linien *dc*, *cb*, *gb* aber sind bekannt, die vierte *fg* unbekannt. Wenn wir also das bekannte Vorderglied, die Gerade *dc*, mit dem bekannten Hintergliede, der Geraden *gb*, multiplicieren, und das Produkt durch die bekannte Gerade *cb* dividieren, so kommt die unbekannte Gerade *fg*. Nach ihrer Bestimmung wollen wir nun zeigen, wie wir zur Linie *gh* kommen können. Da das Verhältnis von *dc* zu *cb* gleich dem Verhältnis von *fg* zu *fb* ist, so finden wir durch Multiplikation der Geraden *fg* mit der Geraden *db* und Division des Produktes durch die Gerade *cd* die Länge der Geraden *fb*. Haben wir diese gefunden, so messen wir genau die Entfernung vom Punkte *f* bis zum Punkte *h*, und haben so die Länge der Strecke *fb* gefunden. Da wir sie nun kennen und ihre Länge von der Länge der ganzen bekannten Linie *fgh* wegnehmen, so bleibt die Länge der Linie *gh* übrig, welche der gesuchte Pfeil ist. Durch ihn und durch die Sehne *db* bestimmen wir, wie am Ende des vierten Theiles auseinandergesetzt ist, den Durchmesser des Kreises. Nachdem dieser genau gefunden ist, können wir die Sehne des Bogens bestimmen, welcher doppelt so gross ist als der Bogen *ad*, wie wir das bei Gelegenheit der Tafel der Sehnen und Bogen gezeigt haben. Die Hälfte dieser Sehne ist also dann gleich der Geraden *dl* in derselben Figur. Addieren wir hierzu die bekannte Gerade *dc*, so kommt die ganze Gerade *dl* als bekannt heraus. Diese ist aber, wie der Augenschein lehrt, der Geraden *bme* gleich, welche als Länge der ganzen Krümmung des Feldes zu gebrauchen ist.[1])

10. Mit der Auffindung des andern Theiles, der die Breite genannt wird, meine ich, wollen wir uns nicht beschäftigen, wenn sie nicht dieselbe oder eine ähnliche Krümmung besitzt. Wäre die Krümmung auf beiden Seiten vorhanden, wie bei den Bienenzellen, oder den Bienenkörben, oder der Kugel, so würden wir mit ähnlicher Berechnung vorgehen. Aber oft muss man sehr genau beobachten, wie man zur richtigen Berechnung des Flächeninhaltes gelangen kann.

Nachdem so dieses zweite Kapitel emsig entwickelt ist, müssen wir mit Gottes gnädigem Beistande zum dritten Kapitel übergehen.

Capitulum tertium in arearum divisionum explanatione.

1. In secundo quidem capitulo agrorum ac domorum dimensionibus executis, eorundemque arearum secundum figurarum alterationes cognitione habita, geometricalibus deductionibus, ut dimensionum modus planius intelligeretur, adductis, deinceps in hoc tertio capitulo agrorum domorumque divisiones inter consortes et conhaeredes ostendere proposuimus. In singulis etiam divisionibus rationes immo demonstrationes apertas, ut lucidius clarescant, certas insuper regulas, quibus fides adhibenda sit, subiungere decrevimus. A triangulis igitur exordium in dividendo faciemus, quibus diligenter executis quadrilateras et pentagonas aliasque figuras in partes dividere non formidabimus.

2. *Si cuiuslibet trianguli summitas inter duorum dividentium campos exstiterit.* De triangulorum divisoribus, quorum uterque suam trigoni portionem proprio campo velit adiungere, ipsius basim in duo partiaris aequalia. Quo facto ab ipsius summitatis puncto usque ad basis dimidium rectam lineam protrahas, eritque triangulus in duo aequa divisus.

Veluti si triangulus abc (Fig. 45) proponatur, cuius basis linea bc, summitas vero sit punctus a, praedictam basim in duo aequa supra punctum d partiaris. Qua divisa rectam lineam a puncto a usque ad d protrahens triangulus abc in duos aequos triangulos adb, adc dividetur. Eorum enim bases sunt ad invicem aequales, et utriusque altitudo est eadem. Duos autem huiusmodi triangulos sibimet invicem aequales esse necesse est, ut in | hac subscripta figura cernitur.[1]) 26′

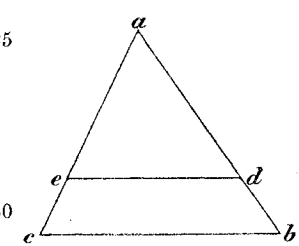


Fig. 46.

3. *Verum si alterius divisoris terminus in directo summitatis praedicti trianguli, cui a suprascribitur, alterius vero terminus in directo basis bc eiusdem trigoni fuerit, et utrique suam portionem in sui termini directo dare volueris* (Fig. 46), ut si altera pars in directo lineae bc, altera vero in directo summitatis, cui a superponitur, existat, utrumque duorum laterum ab, ac sic in duo dividas, ut totius lateris multiplicatio sui maioris portionis multiplicationem duplicem contineat.

Veluti si lineam ac supra punctum d, et lineam ac supra punctum e

---

1 in arearum] manierarum *B*. — 15 a basis usque. — 29 alteram. — 29—30 alteri vero.

---

1) Leonardo 110, 13 v. u.

Drittes Kapitel. Die Darlegung der Feldertheilung.

1. Nachdem so im zweiten Kapitel die Ausmessung der Felder und Häuser vollendet ist, und wir ihren Inhalt nach der Verschiedenheit ihrer Gestalten kennen gelernt, und sie durch geometrische Beweise gestützt haben, damit die Methode der Ausmessung deutlicher verstanden würde, haben wir nun in diesem dritten Kapitel die Theilung der Äcker und Häuser unter Genossen und Miterben zu zeigen uns vorgenommen. Bei den einzelnen Theilungsarten haben wir die betreffenden Gründe, vielmehr noch offenkundige Beweise dafür hinzuzufügen beschlossen, damit sie heller und klarer werden, sowie noch gewisse Regeln dafür, denen man Vertrauen schenken darf. Wir werden also von den Dreiecken den Anfang der Theilungen nehmen, und nachdem dieses gründlich durchgeführt ist, uns nicht scheuen, auch die Vierecke, Fünfecke und andere Figuren in Stücke zu theilen.

2. *Wenn die Spitze des Dreiecks zwischen den Feldern der Theilenden eingeschlossen ist,* und wenn von den das Feld Theilenden jeder seinen Theil des Dreiecks seinem eigenen Felde hinzufügen will, theilt man die Grundlinie desselben in zwei gleiche Theile, dann zieht man von der Spitze bis zum Halbierungspunkte der Grundlinie eine gerade Linie, so wird dadurch das Dreieck in zwei gleiche Stücke getheilt sein.

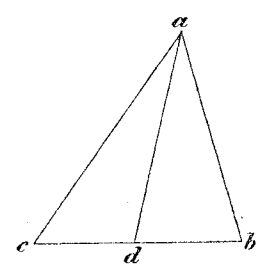


Fig. 45.

Es sei z. B. das Dreieck abc gegeben (Fig. 45), dessen Grundlinie die Gerade bc, die Spitze aber der Punkt a sei, dann halbiert man die genannte Grundlinie im Punkte d. Nachdem sie so getheilt ist, zieht man eine gerade Linie vom Punkte a nach d, und dann ist das Dreieck abc in die beiden gleichen Dreiecke adb, adc getheilt. Ihre Grundlinien sind nämlich gleich, und die Höhe beider ist ein und dieselbe. Zwei dergleichen Dreiecke aber sind nothwendigerweise einander gleich, wie in der beigegebenen Figur zu sehen ist.[1])

3. *Wenn aber die Grenze des einen Theilenden der Spitze des vorgenannten Dreiecks, die mit a bezeichnet ist, anliegt, die Grenze des andern aber an die Grundlinie bc anstösst, und man jedem seinen Theil direkt an seiner Grenze geben will* (Fig. 46), wenn z. B. der eine Theil an der Geraden bc, der andere aber an der Spitze, die mit a bezeichnet ist, anliegen soll, so theilt man jede der beiden Seiten ab, ac so in zwei Stücke, dass das Quadrat der ganzen Seite das Doppelte des Quadrates seines grössern Theiles enthält, also so, dass man die Gerade ac im Punkte d, und die

in duo diviseris, ut tetragonus lineae *ad* dimidium tetragoni lineae *ab*, tetragonus vero lineae *ae* dimidium tetragoni lineae *ac* continebit. Lineam igitur a puncto *d* usque ad punctum *e* protrahens triangulum *abc* in duo aequa, quorum altera pars erit trigonus *adc*, altera vero pars erit super-
5 ficies *debc* almuncharif, ut subiecta figura repraesentat.[1])

Ad horum tetragonorum numerationem pervenies, si ex utriusque linearum *ab*, *ac* longitudine, a puncto videlicet *a*, quod est trianguli summitas, quinque septimas minus fere medietate decenae unius septenae partis acceperis, cuius regula est, ut in 140 partes totam lineam partiaris, ex qui-
10 bus 99 partes minus parte modica sumas.[2]) Quemadmodum, si exempli causa longitudo lineae *ab* 7 ulnarum exstiterit, linea *ad* 5 ulnas fere medietate decenae partis unius septenae subtracta continebit. Latus etiam *ac* si 10 ulnas in longitudine receperit, linea *ae* 7 ulnas fere dimidio septenae partis unius ulnarum superaddito in sui longitudine non refutabit.
15 His itaque duobus lateribus ita divisis si *ed* lineam divisionis produxeris, triangulus *abc* in duo dividatur aequalia, eo quod lineam *ed* sic protractam basi *bc* aequidistantem fore geometricalis ratio demonstrat. Quare triangulus *ade* triangulo *abc* similis existit: eorum etenim anguli sibimet invicem aequantur. Omnium autem similium triangulorum proportio est ut
20 proportio tetragoni unius lateris trianguli ad tetragonum illius lateris alterius trianguli, quod ei in proportione similis existit, sicut Euclides in suo libro demonstrationibus explicat. At in triangulo *abc*, tetragonus lateris *ac* tetragoni lateris *ae* alterius trianguli *ade* duplus esse probatur. Haec autem duo latera sunt in proportione consimilia. Item tetragonus
25 lateris *ab* tetragonum lateris *ad* in dupla continet proportione: triangulus igitur *abc* duplus est triangulo *ade*, superficies igitur *debc* almuncharif aequa est triangulo *ade*. In duo igitur aequa triangulus *abc* divisus ostenditur, et hoc voluimus. | 27

4. *Item si terminus alterius duorum divisorum in aliqua parte cuius-*
30 *libet lateris trigoni fuerit, et suam portionem in directo sui termini quaesierit.*

Veluti si in triangulo vel trigono *abc* (Fig. 47) supra latus *ab* circa punctum *d* terminus divisoris exstiterit, et suam portionem ab ipso *d* puncto postulaverit, utrum in eiusdem lateris dimidio punctus *d* fuerit, observa. Qui si in dimidio lateris inventus exstiterit, nil tibi faciendum supererit,
35 praeter quod ab anguli summitate usque ad praedictum *d* punctum rectam lineam protrahens triangulum in duo secabis aequalia.[3])

---

3 protractis *A*. — 8 medietatem. — 19 similium *fehlt in B*. — 30 quaesieris. — 33 utra.

---

1) Leonardo 119, 6. 2) $\sqrt{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{7}\sqrt{25-\frac{1}{2}} \sim \frac{5}{7} - \frac{1}{140} = \frac{99}{140}$. 3) Leonardo 111, 3 v. u.

Gerade *ac* im Punkte *e* so in zwei Stücke theilt, dass das Quadrat der Geraden *ad* die Hälfte des Quadrates der Geraden *ab*, das Quadrat der Linie *ae* aber die Hälfte des Quadrates der Linie *ac* enthält. Zieht man dann vom Punkte *d* nach dem Punkte *e* eine gerade Linie, so theilt man dadurch das Dreieck *abc* in zwei gleiche Stücke. Der eine Theil ist das Dreieck *adc*, der andere aber das Trapez *debc*, wie die beigegebene Figur zeigt.[1])

Auf rechnerischem Wege gelangt man zu obigen Quadraten, wenn man von der Länge jeder der beiden Geraden *ab*, *ac* vom Punkte *a* aus, das ist von der Spitze des Dreiecks, $\frac{5}{7}$ minus ungefähr der Hälfte eines Siebentels abschneidet, das ist als Regel gefasst, dass man die ganze Linie in 140 Theile theilt und von diesen 99 weniger eine ganze Kleinigkeit nimmt.[2]) Ist z. B. die Länge der Geraden *ab* 7 Ellen, so wird die Gerade *ad* etwa 5 Ellen weniger $\frac{1}{140}$ enthalten. Wenn ebenso die Seite *ac* 10 Ellen in der Länge hat, so wird die Gerade *ae* nahezu 7 Ellen plus $\frac{1}{140}$ Elle in ihrer Länge aufweisen. Sind also die beiden Geraden so getheilt, und man zieht die Theilungslinie *ed*, so zerfällt das Dreieck in zwei gleiche Hälften, weil die so gezogene Linie *ed* aus geometrischen Gründen der Grundlinie *bc* parallel sein muss, und daher das Dreieck *ade* dem Dreiecke *abc* ähnlich ist, denn ihre Winkel sind einander gleich. Das Verhältnis ähnlicher Dreiecke ist aber gleich dem Verhältnis des Quadrates einer Seite des einen Dreiecks zu dem Quadrate der Seite des andern Dreiecks, die ihm proportional entspricht, wie Euklides in seinem Werke beweist. Nun ist aber gezeigt, dass im Dreiecke *abc* das Quadrat der Seite *ac* doppelt so gross ist als das Quadrat der Seite *ae* des andern Dreiecks *ade*. Diese beiden Seiten sind aber proportionalisch ähnlich. Ebenso enthält das Quadrat der Seite *ab* das Doppelte des Quadrates der Seite *ad*: also ist das Dreieck *abc* das Doppelte des Dreiecks *ade*, und folglich ist das Trapez *debc* gleich dem Dreiecke *ade*. Es ist also bewiesen, dass das Dreieck *abc* in zwei Hälften getheilt ist, und das wollten wir.

4. *Fällt ferner die Grenze des einen der beiden Theilenden in irgend einen Punkt einer Seite des Dreiecks, und will er seinen Theil an seine Grenze anliegend erhalten,* wenn also z. B. in dem Dreiecke *abc* (Fig. 47) der Theilpunkt auf der Seite *ab* im Punkte *d* liegt, und er seinen Theil vom Punkte *d* aus fordert, so sehe man zu, ob der Punkt *d* etwa in die Mitte der Seite fällt. Ist er wirklich im Halbierungspunkte der Seite gelegen, so bleibt nichts weiter zu thun übrig, als von der Spitze des Winkels nach genanntem Punkte *d* eine gerade Linie zu ziehen, die das Dreieck in zwei gleiche Stücke theilt.[3])

At si punctus *d* non in dimidio praefati lateris inventus fuerit, aliter triangulum dividamus oportet. Exempli namque causa praedictum trigoni latus *ab* 12, secundum vero latus *bc* 10, tertium quoque latus *ac* 15 ulnas continere ponamus, punctumque *d*, qui pro divisoris termino ponitur, prius a puncto *b* per spatium duarum ulnarum elongemus. Linea igitur *ad* 10 ulnas continebit, positoque puncto *f* supra lateris *ab* dimidium lineam *af* 6 ulnas continere non dubitabimus: latus etenim *ab* 12 ulnas habere posuimus. Linea igitur *af* cum sit totius *ab* lineae dimidium in 4 ulnis, quae sunt duae quintae totius *ad* lineae, *ab* eadem *ad* linea superabitur. Quapropter ex latere *ac*, quod est lateri *ad* contiguum, duas quintas a parte *c*, quae est trianguli summitas, accipe, et quod fuerit, puncto impresso *e* signabis. Erit igitur linea *ec* 6 ulnarum: totum namque latus *ac* 15 ulnas continere supra posuimus. Quo facto a puncto *d* usque ad punctum *e* rectam lineam protrahens totus triangulus in duo dividetur aequalia, quorum altera pars erit trigonus *ade*, alteram vero partem superficies *debc* almuncharif sibi perfecte vindicabit.

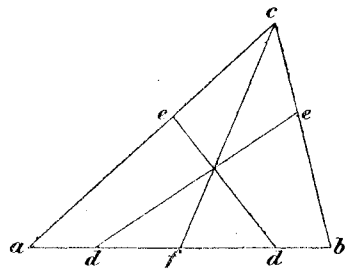


Fig. 47.

Quod si praenominatus terminus *d* a puncto *a* per duarum ⟨ulnarum⟩ spatium elongatus fuerit, divisionis lineam non ad latus *ac*, ut prius, sed ad latus *bc* dirigas. Duas namque quintas ex latere *bc*, quod 10 existit ulnarum, a puncto *c* sumens *e* puncto signabis. Erit itaque linea *ce* 4 ulnarum. Divisionis ergo lineam a puncto *d* ad punctum *e* sicut in hac figura cernitur, produces. In hac etenim similitudine divisionis linea semper ad latus maiori portioni contiguum transmittatur, quare, si linea *bd* maior portio fuerit, divisionis lineam ad latus *bc* producas; si vero non ⟨haec⟩, sed *ad* linea portio maior exstiterit, ad latus *ac* producta linea dirigatur.

Istud etiam nullatenus oblivioni traderetur, quod illae duae quintae semper a puncto *c*, quae est trianguli summitas, sunt assumendae, quoniam ad hunc idem punctum divisionis linea producetur, cum terminus, qui est punctus *d*, supra dimidium *ab* lineae ceciderit. Quapropter secundum illam quantitatem, in qua terminus a dimidio lineae elongabitur, erit *e* punctus a puncto *c*, qui est trigoni summitas, elongandus. Hoc autem, et si nullo | monstratur exemplo, satis tamen esset apertum. Quod autem exemplo 27′
monstravimus, ideo fecimus, ut auditoribus levius et apertius innotesceret.

12 lineae *ab* lineam. — 19 altera vero. — 21 ulnarum *fehlt*. — 27 minor *A*. — 28 haec *in A über der Zeile ausradiert*. — 32 hunc] hoc. *Es ist aber sonst stets* punctus *als Masculinum gebraucht.*

Findet man aber, dass der Punkt *d* nicht in der Mitte der genannten Seite liegt, so muss man das Dreieck auf andere Weise theilen. Nehmen wir z. B. an, es sei die Seite *ab* genannten Dreiecks 12, die andere Seite *bc* aber 10, und die dritte *ac* 15 Ellen lang, und der Punkt *d*, der als Grenzpunkt des Theilenden genommen wird, sei zunächst vom Punkte *b* aus um die Länge zweier Ellen entfernt, so wird also die Strecke *ad* 10 Ellen enthalten, und wenn wir an den Halbierungspunkt der Seite *ab* den Buchstaben *f* setzen, so muss unzweifelhaft die Strecke *af* 6 Ellen enthalten: wir haben ja angenommen, es habe die Seite *ab* 12 Ellen. Die Strecke *af*, welche der ganzen Geraden *ab* Hälfte ist, wird von der Strecke *ad* um 4 Ellen übertroffen, das sind $\frac{2}{5}$ der ganzen Linie *ad*. Man schneide deshalb von der Seite *ac*, die der Seite *ad* anliegt, von *c*, dem Scheitel des Dreiecks, aus $\frac{2}{5}$ ab, und bezeichne den Endpunkt durch den Buchstaben *e*. Dann ist also die Strecke *ec* 6 Ellen, denn die ganze Seite *ac* haben wir vorher zu 15 Ellen angenommen. Hierauf wird durch Verbindung des Punktes *d* mit dem Punkte *e* durch eine gerade Linie das ganze Dreieck in zwei Hälften getheilt, von denen die eine das Dreieck *ade*, die andere aber das Trapezoid *debc* für sich in Anspruch nimmt.

Wäre aber der obengenannte Grenzpunkt *d* vom Punkte *a* aus um die Länge zweier Ellen entfernt, so würde man die Theilungslinie nicht, wie früher, nach der Seite *ac*, sondern nach der Seite *bc* führen müssen. Man schnitte nämlich $\frac{2}{5}$ von der Seite *bc*, die 10 Ellen lang ist, vom Punkte *c* aus ab, und bezeichnete den Endpunkt durch *e*. Dann ist die Strecke *ce* 3 Ellen lang. Die Theilungslinie würde alsdann vom Punkte *d* nach dem Punkte *e* gezogen, wie in der beigegebenen Figur zu sehen ist. In diesem Falle wird nämlich die Theilungslinie immer nach der Seite, die der grössern Theilstrecke anliegt, gezogen. Ist also *bd* der grössere Theil, so führt man die Theilungslinie nach der Seite *bc*; ist aber nicht diese, sondern die Strecke *ad* der grössere Theil, so wird die Linie nach der Seite *ac* geführt.

Man behalte auch stets im Gedächtnis, dass die obigen $\frac{2}{5}$ immer vom Punkte *c* aus, das heisst von der Spitze des Dreiecks, zu nehmen sind, weil die Theilungslinie nach demselben Punkte gezogen wird, wenn der Grenzpunkt, das ist der Punkt *d*, auf die Mitte von *ab* fällt, Nach dem Verhältnis also, nach welchem der Grenzpunkt sich von der Mitte der Linie entfernt, muss der Punkt *e* von dem Punkte *c*, nämlich der Spitze des Dreiecks, entfernt genommen werden. Das Obige wäre auch, wenn kein Beispiel gezeigt wäre, doch genügend klar gewesen, dass wir aber ein Beispiel durchgeführt haben, ist deshalb geschehen, damit es dem Hörer leichter und offenkundiger einleuchte.

Huius quidem demonstrationem addisces, si a puncto *f*, qui lineae *ab* dimidium sibi vindicat, duas lineas, alteram scilicet ad punctum *c* alteram vero ad punctum *e*, et si a puncto etiam *d* ad punctum *c* aliam rectam lineam produxeris, quemadmodum in hac figura depingitur (Fig. 48). His lineis hac in subscripta figura productis, linea *fe* lineae *cd* aequidistans invenietur, eo quod proportio lineae *ce* ad lineam *ea* est ut proportio lineae *df* ad lineam *fa*. Nam linea *ce* duas quintas totius lineae *ca*, linea quoque *df* duas itidem totius *ad* lineae quintas amplectitur. Omnesque duo trianguli, qui super eandem basim ad easdem partes in eisdem alternis lineis conformantur sunt aequales ad invicem. Triangulus igitur *cdf* in hac figura aequus est triangulo *cde*: sunt enim inter duas subalternas lineas *fe*, *dc* et super eandem basim *cd*. Triangulo igitur *cda* communiter assumpto erit totus triangulus *caf* toti superficie *cade* almuncharif aequalis. Triangulus autem *caf* trianguli *abc* dimidium continet, eo quod punctus *f* im dimidio lateris *ab* collocatur, superficies itaque *ceda* almuncharif, quam ei aequalem fore monstravimus, dimidium trianguli *abc*, ut supra diximus, continet.[1])

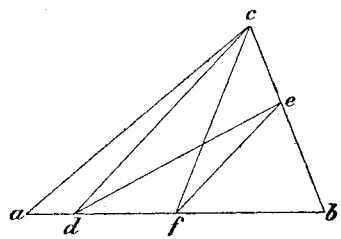


Fig. 48.

5. *Item si triangularis campus,* ut triangulus *abc, tribus divisoribus dividendus proponatur, quorum unus supra unum, alius vero supra aliud, tertius quoque supra tertium trianguli latus suam portionem habere voluerit,* quodlibet trianguli latus, ut exempli causa latus *ab* supra punctum *d*, in duo partiaris aequalia. Dehinc a puncto *d* usque ad punctum *c* rectam lineam protrahens triangulum in duo aequa secabis. Quo diviso per medium, ex linea *cd* tertiam sui partem a puncto *d* sumens puncto *e* impresso signabis. Post hoc a puncto *e* duas lineas, alteram scilicet ad punctum *a*, alteram vero ad punctum *b* producens in tres aequales partes, quae sunt *cea*, *ceb*, *aeb*, triangulus *abc* dividetur, ut haec figura repraesentat (Fig. 49).

Istius nempe demonstratio est, quod, quia linea *bd* aequalis est lineae *da*, erit trigonus *cda* trigono *cdb* aequalis, et quia linea *dc* tertiam totius lineae *dc* partem continet, trigonus *aed* totius trigoni *acd* tertiam partem continebit. Triangulus *acd* est dimidium trianguli *abc*, triangulus igitur *aec* tertia pars | trianguli *abc* remanebit. Simili quoque ⟨modo⟩ tri- 28

12 eisdem] eiusdem *A*. — 21 divisoribus] dominis *B*. — 31 aequalis est] aequalem. — 35 modo *fehlt*.

1) Leonardo 112, 5.

Den Beweis hierfür führt man so, dass man vom Punkte f aus, der die Mitte der Linie ab bezeichnet, zwei Gerade, eine nach dem Punkte c, die andere nach dem Punkte e, und zugleich vom Punkte d nach dem Punkte c eine andere gerade Linie zieht, wie in der nebenstehenden Figur gezeichnet ist (Fig. 48). Sind diese Linien in der Figur gezogen, so findet man die Gerade fc parallel der Geraden cd, da das Verhältnis der Linie ce zu der Linie ea gleich dem Verhältnis der Linie df zu der Linie fa ist. Denn die Linie ce enthält $\frac{2}{5}$ der ganzen Linie ca, und auch die Linie df umfasst $\frac{2}{5}$ der ganzen Linie da. Nun sind je zwei Dreiecke, welche über derselben Grundlinie nach derselben Seite hin zwischen Parallelen gebildet sind, einander gleich. Das Dreieck cdf in der Figur ist also gleich dem Dreiecke cde: sie liegen eben zwischen den beiden Parallelen fe, dc, und haben dieselbe Grundlinie cd. Nimmt man also beidemale das Dreieck cda hinzu, so ist das ganze Dreieck caf dem ganzen Trapezoid $cade$ gleich. Das Dreieck caf ist aber die Hälfte des Dreiecks abc, weil der Punkt f in der Mitte der Seite ab gelegen ist, also ist das Trapezoid $cade$, das wir als ihm gleich erwiesen haben, die Hälfte des Dreiecks abc, wie wir oben gesagt haben.[1])

5. *Wenn ferner ein dreieckiges Feld,* etwa das Dreieck abc, *gegeben ist, das unter drei Theilende auszutheilen ist, von denen der eine seinen Antheil auf der einen Seite, der zweite aber auf der andern, der dritte endlich auf der dritten Seite des Dreiecks zu haben wünscht,* so theilt man eine beliebige Seite des Dreiecks, z. B. die Seite ab, im Punkte d in zwei gleiche Theile. Dann zieht man vom Punkte d nach dem Punkte c eine gerade Linie, und theilt so das Dreieck in zwei gleiche Stücke. Nachdem es so in zwei Hälften getheilt ist, schneidet man vom Punkte d aus von der Geraden dc ihren dritten Theil ab, und bezeichnet den Endpunkt mit e. Darauf zieht man vom Punkte e zwei Gerade, eine nach dem Punkte a, die andere nach dem Punkte b, und theilt dadurch das Dreieck in drei gleiche Stücke, nämlich in cea, ceb, aeb, wie die beigegebene Figur zeigt (Fig. 49).

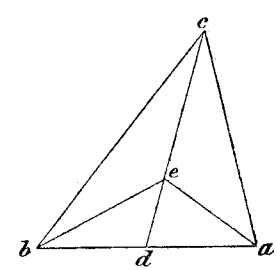


Fig. 49.

Der Beweis dafür ist folgender. Weil die Strecke bd der Strecke da gleich ist, wird das Dreieck cda dem Dreick cdb gleich sein, und weil die Strecke de den dritten Theil der ganzen Strecke dc enthält, so ist das Dreieck aed von dem ganzen Dreiecke acd der dritte Theil. Das Dreieck acd ist die Hälfte des Dreiecks abc, also bleibt das Dreieck aec als dritter Theil des Dreiecks abc übrig. Auf ähnliche Art beweist man, dass

angulum *ceb* tertiam trianguli *abc* partem continere probabitur. Hac itaque ratione cognosces, quod triangulus *abc* in tres aequales partes super eius tria latera dividatur.[1])

6. *Item si tres divisores exstiterint, quorum unus suam portionem supra unum trianguli latus, reliqui vero duo ab eiusdem trigoni summitate suas portiones habere postulaverint.*

Veluti si in triangulo *abc* (Fig. 50) unus ex tribus divisoribus suam portionem supra latus *bc*, reliqui vero duo a puncto *a*, qui est trianguli summitas, suas portiones habere voluerint, utrumque latus *ab*, *ac* in duo partiaris inaequalia, ⟨ita⟩ tamen, quod multiplicatio totius lateris semel maioris portionis multiplicationem et insuper eius dimidium contineat. Ut exempli causa latus *ab* in duas portiones *ad*, *db*, latus vero *ac* in duas itidem *ae*, *ec* portiones partiaris ita, quod multiplicatio lateris *ad* in se ipsum duas tertias totius multiplicationis *ab*, ⟨et multiplicatio lateris *ae* duas tertias totius multiplicationis *ac*⟩ contineat, et triangulus *abc* in duas inaequales partes dividatur, quarum altera sit superficies *bdce* almuncharif, quae totius trianguli tertiam partem amplectitur, altera vero pars sit triangulus *ade* triangulo *abc* ⟨similis⟩ duas totius trianguli tertias in sui constitutione recipiens, eo quod triangulus *ade* triangulo *abc*, quemadmodum in istius capituli secunda figura docuimus, assimiliatur. Trianguli autem ad triangulum proportio ut proportio quadrati unius lateris ad quadratum alterius lateris, quod ei in proportione adsimiliatur. Sed quadratus lateris *ab* in triangulo *abc* unum et semissem totius summae quadrati lateris *ad* in triangulo *ade* continet, quapropter trigonus *ade* duas tertias totius trianguli *abc* continebit. Superficiei igitur *bdec* almuncharif tertia pars relinquetur. Quare si lineam *de* in duo aequa supra punctum *f* diviseris, et ab ipso puncto *f* usque ad punctum *a* lineam rectam protraxeris, triangulum *ade* in duos aequos triangulos *afe*, *afd* secabis. Totus itaque triangulus *abc* in tres aequales partes, quae sunt duo trigoni *afe*, *afd* et superficies *bdec* almuncharif, erit divisus, ut hac in figura monstratur.

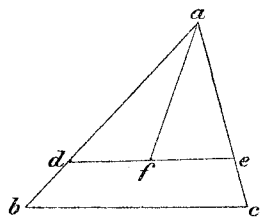


Fig. 50.

Horum item duorum laterum divisiones si per numerum invenire volueris, latus *ab* 6 ulnas continere proponas, quod cum in duo divisum fuerit, ita tamen, quod totius lateris multiplicatio in se ipsum totam alterius portionis multiplicationem et eius insuper dimidium amplectitur, 5 ulnas

---

4 unius. — 11 ita *in A über der Zeile ausradiert.* — 17—18 et . . . ac *in A auf dem Rande ausradiert.* — 21 similis *fehlt.*

das Dreieck *ceb* den dritten Theil des Dreiecks *abc* enthält. Auf solche Weise ersieht man also, dass das Dreieck *abc* in drei gleiche Theile über den Seiten desselben zerschnitten ist [1])

6. *Sind weiter drei Theilende vorhanden, von denen der eine seinen Antheil auf einer Dreiecksseite, die andern beiden aber von der Spitze des Dreiecks aus zu haben wünschen,* wenn also z. B. für das Dreieck *abc* (Fig. 50) der eine der drei Theilenden seinen Antheil an der Seite *bc*, die beiden übrigen aber vom Punkte *a*, das ist der Spitze des Dreiecks, aus ihre Antheile zu haben verlangen, so theilt man die beiden Seiten *ab*, *ac* jede in zwei ungleiche Stücke, jedoch so, dass das Quadrat der ganzen Seite das Quadrat des grössern Theiles ein und ein halb mal enthält. Z. B. also so, dass die Seite *ab* in zwei Stücke *ad*, *db*, die Seite *ac* aber in die beiden Stücke *ae*, *ec* getheilt werde, so dass das Quadrat der Seite *ad* $\frac{2}{3}$ des Quadrates der ganzen Seite *ab*, und das Quadrat der Seite *ae* $\frac{2}{3}$ des Quadrates der ganzen Seite *ac* enthält, dann wird das Dreieck *abc* in zwei ungleiche Stücke getheilt, von denen das eine das Trapez *bdec* ist, das den dritten Theil des ganzen Dreiecks umfasst, das andere aber das Dreieck *ade* ist, das dem Dreiecke *abc* ähnlich zwei Drittheile des ganzen Dreiecks in sich begreift, weil nämlich das Dreieck *ade* dem Dreiecke *abc* ähnlich ist, wie wir in dieses Kapitels zweiter Figur gelehrt haben, das Verhältnis eines solchen Dreiecks aber zum andern gleich dem Verhältnis des Quadrates einer Seite des einen zum Quadrate der Seite des andern ist, welche der ersten proportionalisch ähnlich ist, das Quadrat der Seite *ab* aber im Dreiecke *abc* $1\frac{1}{2}$ mal das Quadrat der Seite *ad* im Dreiecke *ade* enthält. Es wird also für das Trapez *bdec* der dritte Theil übrig bleiben. Halbiert man also die Gerade *de* im Punkte *f* und zieht von diesem Punkte *f* nach dem Punkte *a* eine gerade Linie, so theilt diese das Dreieck *ade* in zwei gleiche Dreiecke *afe*, *afd*. Das ganze Dreieck *abc* ist daher in drei gleiche Stücke getheilt, und zwar in die beiden Dreiecke *afe*, *afd* und das Trapez *bdec*, wie die Figur zeigt.

Will man die Theilung der beiden Seiten durch Rechnung finden, so nehme man an, es enthalte die Seite *ab* 6 Ellen. Wird dieses nun in zwei Stücke getheilt, jedoch so, dass das Quadrat der ganzen Seite das $1\frac{1}{2}$-fache des Quadrates des andern Theiles umfasst, so enthält dieser Theil 5 Ellen, von denen $\frac{1}{60}$ einer Elle abgezogen ist. Das Quadrat der ganzen Seite enthält nämlich 36, das Quadrat jenes Theiles macht aber

1) Leonardo 120, 12 v. u.

decena unius ulnae inde subtracta illa portio continebit: totius enim lateris multiplicatio 36, multiplicatio quoque illius portionis fere 24 | ulnas efficiet. 28′ Alterius vero lateris longitudinem si 9 ulnas habere dixeris, eius altera pars 7 ulnas et insuper tres decenas ac unius decenae semissem continebit. Huius namque portionis multiplicatio fere 54, multiplicatio quoque totius lateris 81 ulnas constituit, cuius numeri summa totam praenominatae portionis multiplicationem et eiusdem insuper dimidium amplectitur. Ipsius quippe doctrinae regula est, ut radix duarum tertiarum cuiuslibet quadrati 5 sextas radicis totius quadrati decena unius sexta inde subtracta contineat, et sunt 49 partes de 60 partibus totius radicis cuiuslibet quadrati.[1]) Haec itaque regula in huius modi numeratione nullatenus a memoria labatur.

7. *Hoc item alio modo probetur.* Triangulum *abg* constituamus (Fig. 51), de cuius latere *bg* tertia pars, et ex parte *g* excipiatur, et puncto ⟨*d*⟩ etiam signetur, a quo ad punctum *a* linea *da* dirigatur. Post hoc supra lineam *dg* punctus utlibet imprimatur, sitque punctus *e*, a quo ad punctum *a* linea *ea* trahatur. Dehinc ad punctum *d* linea *df* parallela lineae *ea* abstrahatur. Quo facto linea *ef* dirigatur, quam si in duo aequa supra punctum *c* diviseris, et lineam *bc* produxeris, erit triangulus *agb* in tres aequales partes divisus, quae sunt superficies *afge* almuncharif et trianguli duo *feb*, *bec*. Quod sic probatur. Quia duo trianguli *afd*, *fde* super eandem basim, lineam *fd*, ad easdem partes et in eisdem alternis lineis *df* et *ae* conformantur, sunt ad invicem aequales. Communiter itaque sumpto *fdb*, erit totus triangulus *abd* toti triangulo *feb* aequalis. Triangulus autem *abd* duas totius trianguli *abg* tertias partes continet, igitur triangulus *feb* similiter duas tertias partes eiusdem trianguli continet, quae sunt triangulus *fbc* et triangulus *bec*. Superficies itaque *afeg* almuncharif tertiam reliquam partem eiusdem trianguli continet. Divisus est igitur triangulus *abg* in tres aequales partes ita, quod una pars super unum latus *ag* existit, et reliquae duo a summitate eiusdem trianguli, quae est *b*, sunt abstractae.[2])

8. *Item si tres inaequales divisores* ⟨*exstiterint*⟩, *quorum scilicet unus dimidium alius vero tertiam, tertius quoque sextam totius triangulateri campi quaesierit, et singuli suas portiones super singula trianguli latera postulaverint.*

Ut in triangulo *abc* (Fig. 52) lateris *ab*, supra quod ille, cuius est

12 Triangulus. — 13 a parte *d*. — *d fehlt*. — 16 lineam *ea*. — punctum *g*. — 18 triangulus *ace*. — 19 sunt] est *B*. — 31 exstiterint *in A über der Zeile ausradiert*.

1) $\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{1}{6}\sqrt{24} \sim \frac{5}{6} - \frac{1}{60}$. 2) Leonardo 120, 7.

nahezu 24 Ellen aus. Nimmt man die Länge der andern Seite zu 9 Ellen an, so wird ihr einer Theil 7 Ellen und $\frac{3}{10}$ und die Hälfte eines Zehntels enthalten. Das Quadrat dieses Theiles macht nämlich nahezu 54 aus, und das Quadrat der ganzen Seite 81, und letztere Zahl ist das $1\frac{1}{2}$-fache des vorgenannten Quadrates.

Die Rechnungsregel für diese Lehre ist, dass die Wurzel von $\frac{2}{3}$ eines beliebigen Quadrates $\frac{5}{6}$ der Wurzel des ganzen Quadrates weniger $\frac{1}{60}$ derselben enthält, das sind $\frac{49}{60}$ der ganzen Wurzel eines beliebigen Quadrates.[1]) Diese Regel darf also bei dieser Rechnung niemals dem Gedächtnis entschwinden.

7. *Diese Theilung kann auch auf andere Weise erfolgen.* Wir zeichnen das Dreieck *abg* (Fig. 51), von dessen Seite *bg* der dritte Theil, und zwar von *b* aus genommen und durch den Punkt *d* bezeichnet werde. Von ihm aus werde nach dem Punkte *a* die Gerade *da* gezogen. Dann sei auf der Strecke *dg* ein beliebiger Punkt angenommen, es sei der Punkt *e*, und von ihm nach dem Punkte *a* die Gerade *ea* gezogen. Man ziehe ferner durch den Punkt *d* die Linie *df* parallel der Linie *ea* und sodann die Linie *ef*. Theilt man diese im Punkte *c* in zwei gleiche Stücke und zieht die Gerade *bc*, so wird das Dreieck *abg* in drei gleiche Theile zerschnitten, nämlich in das Trapezoid *afge* und die beiden Dreiecke *fcb*, *bec*, was man folgendermaassen beweist. Da die beiden Dreiecke *afd*, *efd* über derselben Grundlinie, der Geraden *df*, nach derselben Seite und zwischen denselben Parallelen *df*, *ae* gezeichnet sind, so sind sie einander gleich. Addiert man hierzu das gemeinsame Dreieck *fdb*, so wird das ganze Dreieck *adb* dem ganzen Dreieck *feb* gleich. Das Dreieck *adb* enthält aber $\frac{2}{3}$ des ganzen Dreiecks *abg*, also umfasst das Dreieck *feb* ebenfalls $\frac{2}{3}$ desselben Dreiecks, und diese Drittel sind die Dreiecke *fbc* und *bce*. Das Trapezoid *afeg* enthält also den noch übrigen dritten Theil unseres Dreiecks. Es ist daher das Dreieck *abg* so in drei gleiche Stücke getheilt, das der eine Theil an der Seite *ag* anliegt, die beiden andern aber von der Spitze desselben Dreiecks aus, das ist *b*, genommen sind.[2])

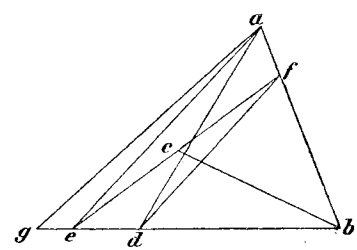


Fig. 51.

8. *Sind ferner drei ungleiche Theilende, von denen der eine die Hälfte, der zweite den dritten Theil, der dritte den sechsten Theil des ganzen dreiseitigen Feldes verlangt, und jeder seinen Antheil auf je einer Seite des Dreiecks erhalten will,* so nimmt man etwa im Dreiecke *abc* (Fig. 52)

trianguli medietas, suam portionem habere voluerit, tertiam partem, quae est *be*, seorsum accipe. Quo facto lineam a puncto *e* ad puuctum *c*, quod est trianguli summitas, protrahens | eam in duo 29 aequalia supra punctum *d* partiaris, a quo duas rectas lineas, alteram videlicet ad punctum *a*, alteram vero ad punctum *b* dirigens triangulum *abc* in tres inaequales partes secabis, quarum una ipsius dimidium, quod est triangulus *adb*, alia vero eiusdem tertiam, quae est trigonus *adc*, reliqua totius sextam, quae est triangulus *bdc*, continebit, ut in hac figura subscribitur.

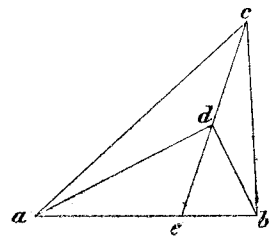


Fig. 52.

Huius autem divisionis demonstrationem non ignorabis, si supradictas demonstrationes memoriae tenaci commendaveris.

9. Quod si triangulum secundum harum divisionum numerum, aliarum tamen quantitatum partiri volueris, ad huiusmodi similitudinem operabis. Si autem in 4 aut in 5 vel in plures partes eum dividere desideraveris, leviter hoc facere poteris. Nobis quidem divisio trianguli secundum suorum laterum numerum satis sufficere debuit. Hoc igitur in loco triangulorum divisiones cum dei auxilio terminemus.

De divisionibus quadrilaterorum.

10. A primis quidem antecessoribus quadrilateras superficies in tria genera dividi compertum est. Quaedam enim earum sunt, quarum utraque diametra sese invicem per aequalia partiantur, quaedam vero, quarum alterum diametrum, cum per aequalia partiatur alterum, ipsum quidem ab eodem per inaequalia dividitur; quaedam etiam aliae sunt, quarum diametra se invicem per inaequalia secant. Hae autem qualiter in duo ac tria nec non et quatuor aequa secundum suorum laterum numerum, sicut et in triangulis ostendimus, ipsae dividantur, in istorum trium generum unoquoque diligenter ostendemus, nec in plures partes earum divisiones indicabimus. Peritissimus vero geometra, qualiter in plura dividantur, leviter investigare poterit.

De divisione quadrilateri in duo aequalia.

11. *Si campus, qui duobus dominis dividendus proponitur, quadratus fuerit* (Fig. 53), cum utraque diametra sese invicem in duo aequa secaverint, eum in duas aequas partes cum diagonali linea a quolibet eius angulo

7 quarum] quare. — 26 Hos. — 32 quadrilateris. — 34 cuius utraque.

von der Seite ab, an welcher derjenige, dem die Hälfte des Dreiecks gehört, seinen Antheil haben will, den dritten Theil, er sei be, besonders, dann zieht man von dem Punkte e nach dem Punkte c, das ist nach der Spitze des Dreiecks, eine Gerade, die man im Punkte d halbiert. Wenn man dann von ihm aus zwei gerade Linien, eine nach dem Punkte a, die andere aber nach dem Punkte b zieht, so hat man das Dreieck in drei ungleiche Stücke getheilt, von denen das eine die Hälfte desselben, nämlich das Dreieck adb, das andere den dritten Theil, das ist das Dreieck adc, das übrige aber von dem Ganzen den sechsten Theil enthält, nämlich das Dreieck bdc, wie in der nebenstehenden Figur gezeichnet ist.

Der Beweis für diese Theilung wird dem nicht unbekannt sein, der die voraufgegangenen Beweise treuem Gedächtnis anvertraut hat.

9. Wollte man das Dreieck in die nämliche Anzahl Stücke, aber nach anderem Grössenverhältnisse theilen, so müsste man in ähnlicher Weise vorgehen. Will man es aber in vier oder fünf oder in noch mehr Stücke zertheilen, so kann man das mit Leichtigkeit thun. Für uns aber musste die Theilung des Dreiecks nach der Zahl seiner Seiten vollständig ausreichen. Hier wollen wir also die Theilung des Dreiecks mit Gottes Hilfe beendigt haben.

Über die Theilung der Vierecke.

10. Von unsern ersten Vorgängern wurden die vierseitigen Flächen in drei Arten unterschieden. Es giebt nämlich solche, deren beide Diagonalen sich gegenseitig halbieren, ferner solche, bei denen die eine Diagonale die andere halbiert, sie selbst aber von ihr in zwei ungleiche Stücke getheilt wird, endlich auch solche, deren Diagonalen einander in ungleiche Stücke theilen. Wie diese in zwei, in drei und auch in vier gleiche Theile nach der Anzahl ihrer Seiten zerschnitten werden können, wollen wir wie bei den Dreiecken, und zwar für jede der drei Arten besonders, vollständig zeigen, die Theilung in mehr Stücke aber nicht. Ein kluger Geometer wird aber leicht auffinden, wie sie in mehr Stücke getheilt werden können.

Die Theilung des Vierecks in zwei Stücke.

11. *Ist das Feld, das unter zwei Herren zu vertheilen ist, ein Quadrat* (Fig. 53), so kann man es, da beide Diagonalen sich gegenseitig halbieren, durch jede der beiden von einer Ecke nach der gegenüberliegenden gezogene Diagonalen theilen. Ebenso wird es auch von einem

ad angulum protracta partiri poteris. Similiter etiam a quolibet puncto super eius quolibet latere dato in duo aequalia secabitur.[1])

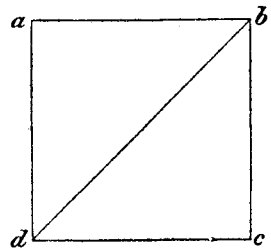


Fig. 53.

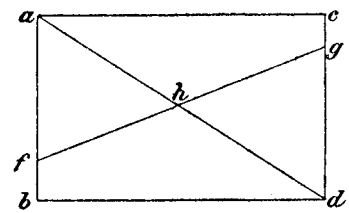


Fig. 54.

12. *Quod si parte altera longior vel rhombus seu rhomboides in divisione proponitur,* eorum itidem diametra sese invicem per aequalia partiuntur. Ab eorum igitur angulis in duo aequa ⟨eos⟩ secari poteris. Si autem a quolibet puncto supra quodlibet eorum latus insignito huiusmodi quadrilaterum dividere volueris, ut si a puncto *f* supra latus *ab* (Fig. 54) longe ab eius dimidio secundum duarum ulnarum quantitatem dato, superficiem *abcd* parallelogrammum in duo | aequa secare desideraveris, supra 29′ latus *cd* punctum *g* longe ab eius dimidio secundum quantitatem duarum ulnarum signabis, quod sic facies. Ab angulo scilicet *d*, qui angulo *a* ex opposito ponitur, supra *dc* latus secundum lineae *af* quantitatem metire, et quod fuerit, puncto *g* impresso signabis. Post haec a puncto *g* ad punctum *f* lineam *gf* protrahens, quadrilaterum *abcd* in duas aequas superficies *bfgd*, *afcg* almuncharif secabis.

Huius nempe divisionis demonstratio est, quod, si diametrum *ad* protraxeris, lineam *gf* in duo aequa supra punctum *h* secabit, eritque triangulus *ghd* triangulo *afh* aequalis. Quadrilaterum itaque *afge* aequale erit quadrilatero *fbdg*. Simili quoque demonstratione hoc idem probaretur, si diametrum *bc* protrahitur.[2])

13. *Item si quadrilaterum illud non fuerit parallelogrammum, sed alterum duorum diametrorum in duo aequa diviserit alterum, ipsum autem ab eodem per inaequalia secabitur.* Ut exempli causa quadrilaterum *abcd* (Fig. 55), cuius diametrum *bd* alterum diametrum *ac* supra punctum *e* in duo dividit aequalia, ipsumque super idem punctum *e* per inaequalia secatur, ab angulo *b* ad angulum *d* vel e converso dividens in duos aequos triangulos *abd*, *bcd* a diametro *bd* secabitur.

14. Quod si idem quadrilaterum ab angulo *a* vel *c* partiri volueris, diametrum ab eorum alterutro protractum illud per inaequalia partietur.

---

4 itidem] inde *A*. — 5 eos *fehlt*. — 7 quadratum. — 11 quod si. — qui] quod.

beliebigen Punkte auf einer beliebig gegebenen Seite in zwei gleiche Stücke zertheilt.[1])

12. *Wird zur Theilung ein Rechteck, ein Rhombus oder ein Rhomboid vorgelegt,* so schneiden ihre Diagonalen in ähnlicher Weise einander in gleiche Theile, man kann sie also von den Ecken aus in zwei gleiche Stücke theilen. Soll aber ein solches Viereck von einem beliebigen auf irgend einer Seite desselben festgelegtem Punkte getheilt werden, wie wenn etwa vom Punkte f auf der Seite ab (Fig. 54) aus, der von ihrer Mitte um 2 Ellen Länge abstehend gegeben ist, das Parallelogramm $abcd$ in zwei gleiche Stücke getheilt werden soll, so bestimmt man auf der Seite cd den Punkt g, der ebenfalls von ihrer Mitte um die Grösse zweier Ellen absteht. Das macht man aber so: Von der Ecke d nämlich, welche der Ecke a gegenüberliegt, misst man auf der Geraden dc die Länge der Linie af ab, und bezeichnet den Endpunkt mit g. Dann zieht man vom Punkte g nach dem Punkte f die Gerade gf und theilt dadurch das Viereck $abcd$ in die zwei gleichen Trapeze $bfgd$, $afcg$.

Der Beweis dieser Theilung liegt darin, dass, wenn die Diagonale ad gezogen wird, sie die Gerade gf im Punkte h halbiert, und das Dreieck ghd dem Dreiecke afh kongruent wird. Also ist das Viereck $afgc$ dem Viereck $fbdg$ gleich. Dasselbe könnte in gleicher Weise bewiesen werden, wenn man die Diagonale bc ziehen würde.[2])

13. *Wäre ferner jenes Viereck kein Parallelogramm, sondern theilte die eine Diagonale die andere in gleiche Theile, sie selbst aber würde von der letzteren in ungleiche Stücke zerschnitten,* wie z. B. das Viereck $abcd$ (Fig. 55), dessen Diagonale bd die andere Diagonale ac im Punkte e halbiert, selbst aber in dem nämlichen Punkte e in ungleiche Stücke getheilt wird, so zieht man von der Ecke b nach dem Endpunkte d oder umgekehrt die Diagonale bd, dann wird es dadurch in die beiden gleichen Dreiecke abc, bcd zerschnitten.

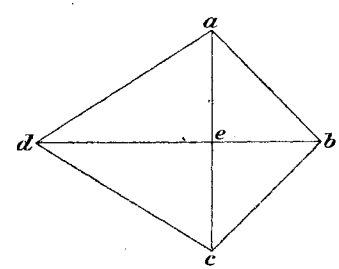


Fig. 55.

14. Soll dasselbe Viereck vom Eckpunkte a oder c aus getheilt werden, so würde es die von einem derselben gezogene Diagonale in ungleiche Stücke theilen. Man muss daher die Diagonale bd im Punkte f halbieren.

1) Leonardo 122, 5 v. u. 2) Leonardo 123, 14.

Quapropter diametrum *bd* supra punctum *f* in duas aequales partes abscidas oportet. Quo facto proportionem lineae *ef* ad lineam *ed* diligenter investigans secundum investigatae proportionis quantitatem, si a puncto *a* divisionis initium feceris, ex linea *cd* sumes, et quod fuerit, puncto *g* signabis, a quo ad angulum *a* lineam *ga* dirigens quadrilaterum in duo secabis aequalia (Fig. 56).

Verbi gratia utrumque duorum laterum *ab*, *bc* 10 ulnas et tres insuper quintas, utrumqe vero duorum reliquorum laterum *ad*, *dc* 15 ulnas contineat. Diametrum itaque *bd*, quod ab *ac* diametro per inaequales partes *be*, *de* dividitur, 17 ulnas et tres quintas continebit, eritque linea *ed* 12 ulnarum. Cumque hoc diametrum in duo aequa supra punctum *f* diviseris, ⟨et⟩ linea *fd* 9 ulnas minus una quinta recipiet, linea igitur *ef* 3 ulnas et unam quintam amplectitur. Quod si secundum quantitatem proportionis lineae *ef* ad *ed* ex linea *cd* suppresseris, lineam *cg* 4 ulnas habere non dubitabis. Cumque a puncto *a* ad punctum *g* rectam lineam produxeris, quadrilaterum *abcd* | in duo partiaris aequalia, quae sunt trigonus 30
agd et superficies *abcg* almuncharif, ut haec figura repraesentat.

Ad huius nempe divisionis demonstrationem si duas lineas *af*, *cf* protraxeris, duos triangulos *cfb*, *afb* in unum coniunctos dimidium quadrilateri *abcd* continere cognosces. Hi autem duo trianguli superficie *abcg* almuncharif sunt aequales. ⟨Triangulum etenim *acf* triangulo *acg* aequalem esse non denegas, quia supra eandem *ac* basim et inter alternas *ca*, *gf* lineas contineatur. Triangulo itaque *abc* adiuncto⟩ superficies igitur *cfab* almuncharif superficiei *cgab* almuncharif aequatur. At superficies *cfab* dimidium quadrilateri *abcd* continet, superficies itaque *cgab* almuncharif dimidium eiusdem quadrilateri *abcd*, quod in duo aequalia dividere quaerebamus, amplectitur.

15. *Ad hunc itaque modum omnia quadrilatera, quorum neutrum duorum diametrorum alterum per aequalia partitur, in duo aequa secabis, cum a quolibet eorum angulorum divisiones facere volueris.*[1])

16. *Quod si divisionem aliter facere cupis,* quemadmodum ⟨si⟩ in subscripta figura a puncto *e* (Fig. 57) supra latus *ab* impresso divisionis initium facere proposueris, prius ab angulo *b* lineae *ab*, sicut in supra-

---

12 et *fehlt in A.* — lineam. — 21—23 Triangulum . . . adiuncto *habe ich sinngemäss hinzugefügt. Der Schreiber von B hat nicht gemerkt, dass im Texte etwas fehle, und hat deshalb, da scheinbar zweimal genau dasselbe gesagt ist, am Rande hinzugefügt:* Totum illud superfluum est. — 25 quadrilateris. — 29 segabis.

Ist das geschehen, so sucht man genau das Verhältnis der Geraden ef zur Geraden ed, und schneidet nach der Grösse des gefundenen Verhältnisses, wenn vom Punkte a aus getheilt werden soll, von der Geraden cd ein Stück ab, dessen Endpunkt man mit g bezeichnet. Zieht man von ihm nach dem Endpunkte a die Gerade ga, so theilt man dadurch das Viereck in zwei gleiche Stücke (Fig. 56).

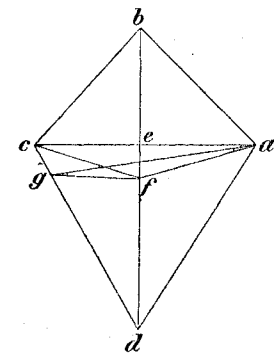


Fig. 56.

Es enthalte z. B. jede der beiden Seiten ab, bc $10\frac{3}{5}$ Ellen, jede der beiden andern Seiten ad, dc aber 15 Ellen. Die Diagonale bd, die von der Diagonale ae in ungleiche Stücke be, de geschnitten wird, soll $17\frac{3}{5}$ Ellen enthalten, und es wird die Strecke ed 12 Ellen sein. Da die Diagonale im Punkte f halbiert ist, so wird die Strecke fd 9 Ellen weniger $\frac{1}{5}$ enthalten. Die Strecke ef umfasst daher $3\frac{1}{5}$ Ellen. Schneidet man nun gemäss dem Werthe des Verhältnisses der Linie ef zu ed von der Geraden ed ab, so wird sicherlich die Strecke cg 4 Ellen enthalten und wenn man jetzt vom Punkte a nach dem Punkte g eine gerade Linie zieht, so wird dadurch das Viereck $abcd$ in zwei gleiche Stücke getheilt, nämlich in das Dreieck agd und das Trapezoid $abcg$, wie nebenstehende Figur darstellt.

Zieht man zum Beweise der Theilung die beiden Geraden af, cf, so sieht man, dass die beiden Dreiecke cfb, afb zusammengenommen die Hälfte des Vierecks $abcd$ ausmachen. Diese beiden Dreiecke sind aber dem Trapezoid $abcg$ gleich. Dass das Dreieck acf nämlich dem Dreiecke acg gleich ist, sieht man ein, weil sie auf derselben Grundlinie ac und zwischen den Parallelen ca, gf enthalten sind. Fügt man das Dreieck abc hinzu, so ist das Trapezoid $cfab$ dem Trapezoid $cgab$ gleich. Das Trapezoid $cfab$ enthält aber die Hälfte des Vierecks $abcd$, also umfasst das Trapezoid $egab$ ebenfalls die Hälfte des Vierecks $abcd$, das wir halbieren wollten.

15. *Auf dieselbe Weise kann man auch alle Vierecke, vvn denen keine Diagonale die andere in gleiche Stücke theilt, in gleiche Theile zerschneiden, wenn man von irgend einem Eckpunkte aus die Theilung ausführen will.*[1])

16. *Wünscht man die Theilung anders zu bewirken,* wie wenn wir in nachstehender Figur den Anfangspunkt der Theilung in den Punkt e setzen (Fig. 57), der auf der Seite ab angenommen ist, so muss man zu-

1) Leonardo 138, 10.

scripta figura monstravimus, totam superficiem in duo aequa partiaris, eruntque duae portiones triangulus *bcf* et superficies *abfd* almuncharif. Linea igitur *bf* ab angulo *b* protracta totam hanc superficiem primo in duo dividet aequa. Qua sic divisa, a puncto *f* ad punctum *e* linea *fe* producta si lineae *cb* subalterna fuerit, a puncto *e* ad punctum *c* lineam *ce* dirigens, totam superficiem in duo aequa secabis. Erit itaque superficies *aecd* almuncharif triangulo *ebc* aequalis, ut haec figura prima declarat.

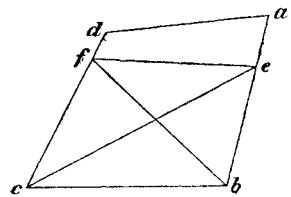


Figura prima

Fig. 57.

Istius quippe divisionis demonstratio est, quod, quia linea *ef* lineae *bc* subalterna protrahitur, triangulus *fcb*, qui totius superficiei dimidium amplectitur, triangulo *ecb* erit aequalis. Inter duas enim aequidistantes et super eandem basim collocantur. Triangulus igitur *ecb* totius superficiei dimidium continebit.[1])

17. *Verum si linea ef lineae bc subalterna non fuerit,* a puncto *b*, quod in superficiei angulo designatur, linea *bg* lineae *bf* infra vel extra superficiem, prout sors dederit, aequidistanter protrahas. *Si autem infra superficiem ceciderit, ut in hac secunda figura* (Fig. 58) *cernitur,* a puncto *e* ad punctum *g* lineam *eg* producens, tota superficies in duo secabitur aequalia, quae sunt duae portiones *aedg*, *ebcg* almuncharif. Manifestum est etenim, ut supra diximus, | quod 30′ trigonus *fbc* totius superficiei dimidium continet, et quod triangulus *bgf* triangulo *egb* existit aequalis, eo quod intra duas aequidistantes lineas continentur. Quare, si utrique superaddatur triangulus *bgc*, erit triangulus *fbc* aequalis superficiei *ebcg* almuncharif. Superficies igitur *abcg* totius superficiei dimidium continebit. Alteram vero medietatem superficies *aedg* almuncharif, ut supradiximus, amplectitur.[2])

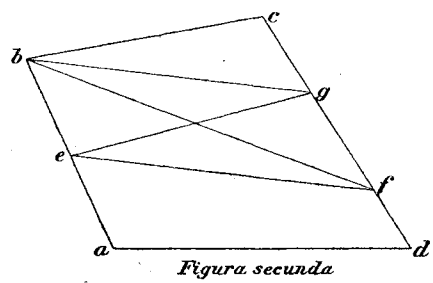


Figura secunda

Fig. 58.

18. ⟨*Si autem*⟩ *extra superficiem, ut in hac tertia figura, ceciderit linea* ⟨*bg* (Fig. 59), lineam⟩ *dc* usque ad punctum *g* usque ad supra dictam lineam *bg* producatur. Post haec duae lineae *eg*, *ec* a puncto *e* ad duo puncta *g*, *c* dirigentur. Dehinc a puncto *g* linea *gh* aequidistans lineae *ec* extrahatur.

---

1 aequa partieris aequalia *A*. — 34 Si autem *fehlt*. — 34—35 *bg* lineam *fehlt*. — 35 at *B*. — suprn dicta linea.

erst vom Eckpunkte *b* der Geraden *ab* aus in derjenigen Art, die wir in der vorherigen Nummer gezeigt haben, die ganze Fläche in zwei gleiche Stücke zertheilen; es mögen die beiden Theile das Dreieck *bef* und das Trapezoid *abfd* sein. Die von dem Punkte *b* aus gezogene Gerade *bf* wird also diese ganze Fläche zunächst in zwei Hälften theilen. Ist nach dieser Theilung die vom Punkte *f* nach dem Punkte *e* gezogene Gerade *fe* der Geraden *cb* parallel, so ziehe man vom Punkte *e* nach dem Punkte *c* die Gerade *ce*, dann halbiert man dadurch die ganze Fläche. Es ist also das Trapezoid *aecd* dem Dreiecke *ebc* gleich, wie die erste Figur zeigt.

Der Beweis der Theilung folgt daraus, dass das Dreieck *fcb*, welches die Hälfte der ganzen Fläche enthält, weil die Gerade *ef* der Geraden *bc* parallel verläuft, dem Dreiecke *ecb* gleich wird. Sie liegen nämlich zwischen Parallelen und über derselben Grundlinie. Das Dreieck *ecb* umfasst daher die Hälfte der ganzen Fläche.[1])

17. *Ist aber die Gerade ef der Geraden bc nicht parallel,* so ziehe man vom Punkte *b*, dem einen Eckpunkte der Fläche, die Gerade *bg* parallel der Linie *ef* innerhalb oder ausserhalb der Fläche, wie der Zufall es will. *Fällt sie zunächst innerhalb der Fläche, wie in der zweiten Figur* (Fig. 58) *zu sehen ist,* so ziehe man vom Punkte *e* nach dem Punkte *g* die Gerade *eg*, wodurch die ganze Fläche in zwei Hälften getheilt wird, nämlich die beiden Trapezoide *aedg*, *ebcg*. Denn es ist klar, dass, wie wir oben sagten, das Dreieck *fbc* die Hälfte der ganzen Fläche enthält, und dass das Dreieck *bfg* gleich dem Dreiecke *agb* sein wird, da sie zwischen zwei Parallelen enthalten sind. Fügt man also zu jedem das Dreieck *bgc* hinzu, so wird das Dreieck *fbc* gleich dem Trapezoid *ebcg* sein, und das Trapezoid *ebcg* enthält daher ebenfalls die Hälfte der Fläche. Die andere Hälfte umfasst, wie wir oben sagten, das Trapezoid *aedg*.[2]).

18. *Fällt aber die Parallele bg ausserhalb der Fläche, wie in der dritten Figur* (Fig. 59), so verlängere man die Gerade *dc* bis zum Punkte *g* in der eben genannten Geraden *bg*. Dann ziehe man die beiden Geraden *eg*, *ec* vom Punkte *e* nach den beiden Punkten *g* und *c*, ferner werde vom Punkte *g* aus die Gerade *gh* parallel der Geraden *ec* gezogen. Sind diese Geraden gezeichnet, und man zieht vom Punkte *e* nach dem

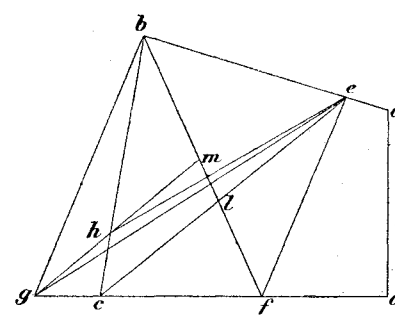


Figura tertia

Fig. 59.

1) Leonardo 138, 18. 2) Leonardo 138, 29

His lineis ita productis, si a puncto *e* ad punctum *h* lineam produxeris, totam superficiem in duas aequales partes, quae sunt trigonus *ehb* et pentagonum *aehcd* secabis.

Cuius demonstratio est, quod, quia linea *ef* lineae *bg* subalterna ponitur, erit trigonus *bfg* aequalis triangulo *beg*. Trigonus etiam *geh* trigono *gch* probatur aequalis: inter duas enim aequidistantes lineas *ec*, *gh* collocantur. Quare, si de triangulo *bfg* triangulum *cgh*, et de triangulo *bgc* triangulum *cgh* depresseris remanebunt duo trianguli *bhg*, *bcf* duobus triangulis *bhg*, *beh* aequales. Dempto itaque triangulo *bhg* communi, remanebit trigonus *bcf* aequus triangulo *beh*. Triangulus autem *bcf* totius superficiei dimidium amplectitur, triangulum igitur *beh* eiusdem superficiei dimidium continere nullus ambigit.[1])

Qualiter autem in hac tertia figura praedictam lineam *gh* aequidistantem lineae *ec* protrahas, ostendemus. Igitur si proportionem lineae *gc* ad lineam *cf* cognoveris, et secundum illam proportionem ex linea *fl* a puncto *l* versus *b* sumpseris et puncto *m* impresso signaveris, post hac a puncto *g* ad notam *m* lineam *ghm* protraxeris, eam lineae *ec* subalternam fore non dubitabis. Nam quoniam in triangulo *fmg* linea *cl* protrahitur, erit proportio lineae *cf* ad lineam *cg* sicut proportio lineae *fl* ad lineam *lm*, linea igitur *ghm* lineae *ce* erit, ut supra diximus, subalterna.

19. *Si quadrilateri cuiuslibet omnia latera subalterna fuerint, cuius embadum in tres aequales sectiones supra quolibet eius latere secare volueris,* ut si quadrilaterum *abcd* (Fig. 60), cuius omnia latera sibimet invicem subalterna sunt, supra latus *ab* dividere quaesieris, idem *ab* latus in tres aequales partes | supra duo 31 puncta ⟨*f*, *e*, alterum quoque latus subalternum *cd* in tres aequales partes supra puncta⟩ *g*, *h* simili modo secabis. Quo facto, si duas lineas *eg*, *fh* protraxeris, quadrilaterum *abcd* in tres aequales portiones abscindes, quae sunt *ag*, *eh*, *fd*. Super aequas enim bases et inter subalternas lineas continentur, ut hac figura monstratur.[2])

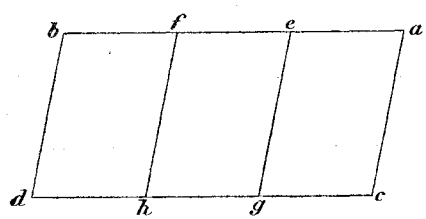


Fig. 60.

20. *Item si idem quadrilaterum abcd ab angulo incipiens in tres portiones ⟨aequales⟩ partiri volueris,* rectam lineam a puncto *a* ad punctum *h* super duas tertias lineae *cd* impressum protrahens trigonus *ach* tertiam

---

10 aequo. — 12 ambigitur *A*. — 26 idem] id est. — laterum. — 28—30 *f*, *e*, alterum . . . puncta *habe ich hinzugefügt*. — 36 aequales *fehlt*.

Punkte h die Gerade eh, so theilt diese die ganze Fläche in zwei gleiche Stücke, nämlich das Dreieck ehb und das Fünfeck $aehcd$.

Der Beweis ist folgender: Da die Gerade ef parallel der Geraden bg gezogen ist, so ist das Dreieck bfg dem Dreiecke bge gleich. Ebenso wird auch das Dreieck geh dem Dreicke gch gleich erwiesen: sie sind nämlich zwischen den Parallelen ec, gh gelegen. Zieht man also vom Dreiecke bfg das Dreieck cgh, und vom Dreiecke bgc das Dreieck cgh ab, so bleiben die beiden Dreiecke bhg, bcf zusammen gleich den beiden Dreiecken bhg, beh übrig. Nimmt man daher das gemeinsame Dreieck bhg weg, so bleibt das Dreieck bcf gleich dem Dreiecke beh übrig. Das Dreieck bcf ist aber die Hälfte der ganzen Fläche, also enthält zweifelslos auch das Dreieck beh die Hälfte dieser Fläche.[1])

Wie man aber in dieser dritten Figur die obengenannte Gerade gh parallel der Geraden ce ziehen kann, wollen wir zeigen. Wenn man nämlich das Verhältnis der Geraden gc zu der Geraden cf kennt und nach demselben Verhältnis von der Geraden fl vom Punkte l aus gegen b ein Stück abschneidet und den Endpunkt mit m bezeichnet, dann aber vom Punkte g nach dem Punkte m die Gerade ghm zieht, so muss diese der Geraden ec parallel sein. Denn da im Dreiecke fmg die Gerade cl gezogen ist, wird das Verhältnis der Geraden cf zu der Geraden cg gleich dem Verhältnis der Geraden fl zu der Geraden lm sein: es ist also die Linie ghm der Geraden ce parallel, wie wir oben gesagt haben.

19. *Wenn die Seiten eines beliebigen Vierecks parallel sind, und man den Inhalt in drei gleiche Stücke von einer beliebigen Seite aus theilen will,* wie wenn man etwa das Viereck $abcd$ (Fig. 60), dessen Seiten einander parallel sind, von der Seite ab aus zu theilen wünscht, so theilt man die Seite ab in drei gleiche Abschnitte in den beiden Punkten e, f, und ebenso die ihr parallele Seite cd in drei gleiche Theile in den Punkten g, h. Wenn man hierauf die beiden geraden Linien eg, fh zieht, ist das Viereck $abcd$ in drei gleiche Stücke zertheilt, nämlich ag, eh, fd. Sie sind nämlich auf gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen enthalten, wie die nebenstehende Figur zeigt.[2])

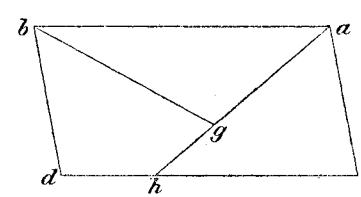


Fig. 61.

20. *Will man ferner dasselbe Viereck vom Eckpunkte a aus beginnend in drei gleiche Theile theilen,* so zieht man eine gerade Linie vom Punkte a nach dem Punkte h, der $\frac{2}{3}$ der Linie cd abschneidet, dann enthält das Dreieck ach

1) Leonardo 138, 4 v. u. 2) Leonardo 124, 13.

totius quadrilateri partem continebit. Dehinc reliquam superficiem *abdh* almuncharif ab angulo *b*, ut superius ostendimus, in duo aequa cum linea *bg* diligenter abscindens quadrilaterum *abcd* in tres aequales portiones, quae sunt duo trianguli *ach*, *agb* et superficies insuper *bghd* almuncharif, secabitur, ut haec figura (Fig. 61) repraesentat.[1])

Huius autem divisionis demonstrationem, quia leviter sciri potest, reticemus.

21. *Quod si quadrilaterum parallelogrammum non fuerit,* ut hoc subscriptum quadrilaterum *abcd* (Fig. 62), cuius alterum duorum diametrorum *ac* alterum *bd* diametrum supra punctum *e* per inaequalia secat, si linea *de* dimidium lineae *eb* in sui quantitate receperit, ut hac in figura cernitur, triangulus *dea* tertiam totius quadrilateri partem continebit, trigonus vero *acb* duas tertias reliquas sibi perfecte vindicabit, quem si in duo aequa utlibet, quemadmodum supra docuimus, diviseris, quadrilaterum *abcd* in tres aequales partes dividetur.[2])

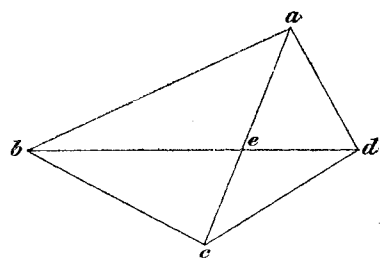


Fig. 62.

22. *At si lineam de totius lineae db subtriplam non invenies, sed eam plus minusve ipsius tertia parte continere cognoveris,* totam *bd* lineam in tria dividens aequa (Fig. 63), puncto *f* impresso vocabis, eritque *bf* pars eius tertia. Eiusdem *bf* proportionem ad lineam *be* diligenter inquirens, et secundum eamdem proportionem ex linea *bc* sumens puncto *g* signabis, eritque proportio lineae *bg* ad lineam *bc* sicut proportio *bf* ad *be*. Dehinc si divisionis *ag* lineam ab *a* ad *g* produxeris, tertiam totius quadrilateri partem segregabis, quae est triangulus *abg*. Superficies autem *agcd* almuncharif reliquas duas tertias continebit. Quam si in duo aequa diviseris, erit totum quadrilaterum *abcd* in tria aequa divisum, ut haec figura repraesentat.

Ad huius nempe divisionis demonstrationem si tres lineas *fg*, *fe*, *fc* protraxeris, triangulum *afb* totius | trianguli *bda* tertiam partem continere 31′
cognosces, triangulum ⟨insuper⟩ *bcf* triangulo *bcd* subtriplum fore non dubitabis. Duo igitur trianguli *afb*, *bcf* in unum collecti tertiam totius quadrilateri *abcd* partem continebunt. Hi autem duo trianguli triangulo *abg* sunt aequales, eo quod triangulus *fgc* unius aequus est triangulo *agf*

6 potes. — 21—22 in tria] tertiam. — 23 Eiusdem *bf*] Idem *bf* erit. — 25 *bc* ad *be*. — 29 in tria in tria *A*. — 33 insuper *in A über der Zeile ausradiert.*

1) Leonardo 136, 8. 2) Leonardo 139, 6 v. u.

den dritten Theil des ganzen Vierecks. Darauf theilt man das überbleibende Trapez *abdh* vom Eckpunkte *b* aus auf die Weise, die wir oben gezeigt haben, in zwei gleiche Stücke durch die Gerade *bg*, und es wird dadurch das Viereck *abcd* in drei gleiche Stücke getheilt werden, nämlich in die beiden Dreiecke *ach*, *agb* und ausserdem in das Trapezoid *bgdh*, wie die betreffende Figur (Fig. 61) zeigt.[1])

Den Beweis dieser Theilung verschweigen wir, da er leicht zu finden ist.

21. *Ist das Viereck kein Parallelogramm,* wie das nebengezeichnete Viereck *abcd* (Fig. 62), von welchem die eine Diagonale *ac* die andere Diagonale *bd* im Punkte *e* in ungleiche Abschnitte theilt, und es enthält dann die Strecke *de* die Hälfte der Strecke *eb*, wie in der Figur zu sehen ist, so umfasst das Dreieck *dca* den dritten Theil des ganzen Vierecks, das Dreieck *acb* aber nimmt für sich die beiden andern Drittel in Anspruch. Theilt man nun dieses letztere beliebig in zwei gleiche Stücke, wie wir das oben gelehrt haben, so wird dadurch das Viereck *abcd* in drei gleiche Theile zerschnitten.[2])

22. *Findet man aber die Gerade de nicht als den dritten Theil der Geraden db, sondern sieht man, dass sie mehr oder weniger als den dritten Theil enthält,* so theilt man die ganze Gerade *bd* in drei gleiche Abschnitte (Fig. 63). Der Endpunkt des ersten sei *f* genannt, dann ist also *bf* ihr dritter Theil. Sucht man nun das genaue Verhältnis von *bf* zu der Linie *be* und schneidet nach demselben Verhältnis von der Geraden *bc* ein Stück durch den Punkt *g* ab, so ist also das Verhältnis der Linie *bg* zur Linie *bc* gleich dem Verhältnis von *bf* zu *be*. Zieht man darauf die Theilungslinie *ag* von *a* nach *g*, so schneidet man dadurch den dritten Theil des ganzen Vierecks ab, nämlich das Dreieck *abg*. Das Trapezoid *agcd* enthält also die andern beiden Drittel. Theilt man es daher in zwei gleiche Stücke, so ist das ganze Viereck *abcd* in drei gleiche Theile getheilt, wie die Figur darstellt.

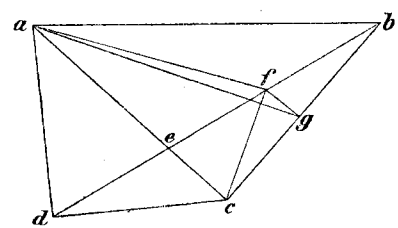


Fig. 63.

Zieht man nämlich zum Beweise dieser Theilung die drei geraden Linien *fg*, *fa*, *fc*, so sieht man, dass das Dreieck *afb* den dritten Theil des ganzen Dreiecks *hda* enthält, ausserdem dass das Dreieck *bcf* vom Dreiecke *bcd* der dritte Theil ist. Die beiden Dreiecke *afb*, *bcf* enthalten also zusammen den dritten Theil des Vierecks *abcd*. Diese beiden Dreiecke sind aber zusammen gleich dem Dreiecke *abg*, weil das Theildreieck *fgc* des einen gleich dem Theildreiecke *agf* des andern ist: sie liegen nämlich

alterius: sunt enim inter duas alternas lineas, scilicet quae sunt *fg*, *ac*, constituti. Triangulus igitur *abg*, qui duobus vel praedictis aequatur, totius quadrilateri *abcd* tertiam sibi partem nimirum recipiet. Superficiei itaque *agcd* almuncharif duae tertiae relinquuntur. Quam si in duo aequa utlibet secundum supra dictam doctrinam diviseris, totum praedictum quadrilaterum in tres aequales partes, ut supra diximus, incontanter abscindes.[1])

23. *Item si idem quadrilaterum in tres aequales partes a quolibet puncto cuiuslibet laterum impresso partiri volueris,* veluti si quadrilaterum *abcd* (Fig. 64) a puncto *h* eius lateri *cb* insignito in tria aequa secare desideras, ab ipsius angulo *a* cum linea *ac* vel *ag* tertiam eiusdem quadrilateri partem accipiens, reliquum, quod est triangulus *abc* vel superficies *agcd*, almuncharif, duas tertias continebit. Quare si hunc triangulum vel hanc superficiem in duo, ut supra docuimus, aequa ⟨ex puncto *h*⟩ diviseris, totum quadrilaterum *abcd* in tria aequa divisum reperies, ut in his subscriptis figuris ostenditur.[2])

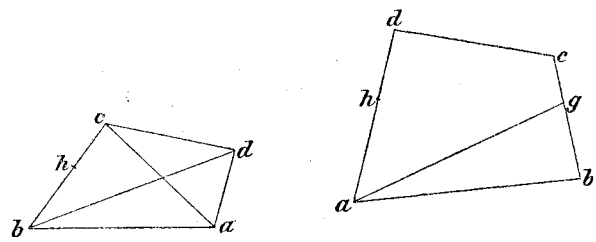


Fig. 64.

24. *Si quadrilaterum parallelogrammum fuerit,* ⟨*cuius embadum in quatuor aequales sectiones supra quolibet eius latere partiri volueris*⟩, nullus in huiusmodi partitione labor incumbit, eo quod ipsius utraque diametra sese invicem per aequalia secant. Duobus itaque diametris in eo protractis quadrilaterum in quatuor aequos triangulos abscindes. Ut si exempli causa in quadrilatero *abcd* parallelogrammo (Fig. 65) duo diametra *ad*, *bc* protraxeris, sese invicem supra punctum *e* et quadrilaterum insuper in quatuor aequos triangulos *abe*, *bde*, *cde*, *cae* secabunt, et haec est figura.

25. *Item si alterum duorum diametrorum, in duo aequa dividat alterum, ipsum autem ab eodem per inaequalia secatur,* ut in quadrilatero *abcd* (Fig. 66), cuius latus *ab* nequaquam lateri *ed*, sed lateri *bc* sibi contiguo, latus vero *cd* lateri *da* coaequatur, si diametrum *bd* protraxeris, totum quadrilaterum in duo dividet aequa. Alterum vero diametrum si protractum fuerit, illum non sic, sed per inaequalia secabit. In hoc itaque quadrilatero diametro *bd* tantum producto et supra punctum *e* in duo

3 superficies. — 7 cuilibet *A*. — 20 ex puncto *h* *fehlt*. — 22—23 cuius . . . volueris *in A auf dem Rande ausradiert.*

1) Leonardo 140, 5. 2) Leonardo 140, 11.

zwischen zwei parallelen Linien, nämlich *fg*, *ca*. Das Dreieck *abg*, das den beiden oben erwähnten Dreiecken gleich ist, enthält also den dritten Theil des Vierecks *abcd*. Für das Trapezoid *abcd* bleiben also zwei Drittel übrig. Theilt man dieses nach den oben gegebenen Anweisungen in zwei Hälften, so hat man damit das ganze vorgenannte Viereck in drei gleiche Theile zerschnitten, wie wir oben verlangten.[1])

23. *Wollte man ferner dasselbe Viereck in drei gleiche Stücke von einem beliebigen Punkte einer Seite aus theilen,* wenn man also z. B. das Viereck *abcd* (Fig. 64) vom Punkte *h* auf der Seite *cb* angenommen in drei gleiche Stücke zertheilen wollte, so würde man vom Eckpunkte *a* aus durch die Gerade *ac* oder *ag* den dritten Theil des Vierecks abschneiden. Dann enthält der Rest, nämlich das Dreieck *abc* oder das Trapezoid *agcd* zwei Drittel. Wenn man dann dieses Dreieck oder das Trapezoid vom Punkte *h* aus, wie wir oben gezeigt haben, hälftelt, so findet sich das ganze Viereck *abcd* in drei gleiche Theile zerschnitten, wie die beiden zugehörigen Figuren zeigen.[2])

24. *Ist das Viereck ein Parallelogramm, dessen Fläche man in vier gleiche Stücke über jeder Seite zu theilen beabsichtigt,* so macht diese Theilung keine Mühe, da die beiden Diagonalen einander halbieren. Zieht man also die beiden Diagonalen, so zerfällt das Viereck in vier gleiche Dreiecke. Wenn man z. B. in dem Parallelogramm *abcd* (Fig. 65) beide Diagonalen *ad*, *bc* zieht, so halbieren sie sich im Punkte *e* und zerschneiden ausserdem das Viereck in die vier gleichen Dreiecke *abe*, *bde*, *cde*, *cae*, und das ist die zugehörige Figur.

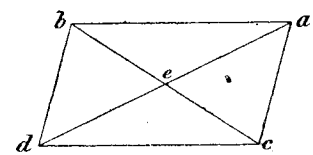


Fig. 65.

25. *Desgleichen, wenn eine Diagonale die andere halbiert, sie selbst aber von der letztern in ungleiche Abschnitte getheilt wird,* wie wenn man im Vierecke *abcd* (Fig. 66), dessen Seite *ab* nicht der Seite *cd*, sondern der ihr anliegenden *bc*, die Seite *cd* aber der Seite *da* gleich ist, die Diagonale *bd* zieht, so zerschneidet man das ganze Viereck in zwei gleiche Theile. Würde aber die andere Diagonale gezogen, so würde sie das Viereck nicht so, sondern in ungleiche Stücke theilen. Man zieht daher in solchem Vierecke nur die Diagonale *bd* und halbiert sie im Punkte *e*. Zieht man dann von dem Theilpunkte die Ge-

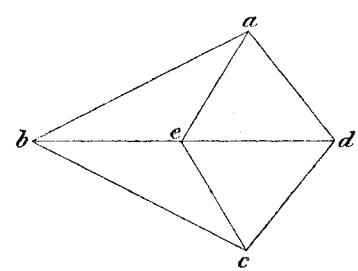


Fig. 66.

aequa diviso, si duas ab ipso puncto | lineas *ea*, *ec* ad duos angulos *a*, *c* pro- 32
traxeris, quadrilaterum in quatuor aequa secabis, ut haec figura repraesentat.

26. *Quod si neutrum duorum diametrorum alterum per aequalia secaverit, quemadmodum in omnibus figuris almuncharif contingit,* illud quadrilaterum, ut in supradictis ostenditur, cum triangulo et superficie almuncharif in duo divideris aequalia, quibus seorsum in duo aequa divisis quatuor aequales quadrilateri portiones invenies. Ut si exempli causa superficies *abcd* almuncharif (Fig. 67) in triangulum *agd* et superficiem *abcg* almuncharif aequaliter dividatur, triangulum *agd* in duos aequos triangulos *ade*, *deg*, et superficiem etiam *abcg* in triangulum *afb* et superficiem *bfgc* almuncharif aequales abscidens praedictam superficiem in quatuor aequa, quae sunt tres trianguli *aed*, *def*, *afb* et superficies *fbcg* almuncharif nimirum secabis, ut haec figura declarat.

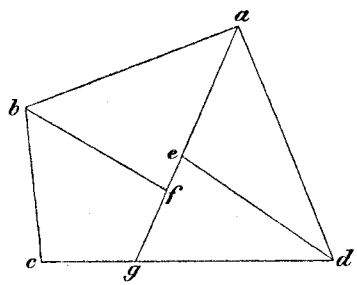


Fig. 67.

Hanc item figuram aliter partiri poteris, si praedictorum demonstrationum, quas in triangulorum et quadrilaterorum divisionibus ostendimus, non inmemor exstiteris. Et ita figurarum rectilinearum divisiones leviter agnosces. Ad earundem etiam figurarum similitudinem pentagonas et exagonas aliasque plurimorum angulorum figuras secabis, si eas in triangulos vel figuras quadrilateras resolveris.

27. *Item si campus, cuius unum latus circulare fuerit, reliqua vero latera rectarum linearum exstiterint, in divisione ponatur,* ut campus $\widehat{abc}$ (Fig. 68), cuius duo latera *ab*, *bc* duabus rectis lineis repraesentantur, reliquum vero latus $\widehat{ac}$ circularis linea designat, vocaturque cata adeiret, id est sector circuli, si hunc, inquam, campum in duo aequa partiri volueris, rectam lineam *ac* protrahens eam supra punctum *e* in duo partiaris aequalia, a quo si super lineam *ac* perpendicularem *ef*, et ex altera ipsius parte ad punctum *f* in ipso circulari latere $\widehat{ac}$ impressum, ex altera vero parte lineam *be* ad punctum *b*, ut contingerit duxeris, praedictum circuli sectorem cum linea *bef* in duo secabis aequalia, sive in directum ipsa linea *bef*, ut prior figura demonstrat, sive non in directum, sed aliter producatur, ut figura secunda (Fig. 69) repraesentat.[1])

4 *Zu* quemadmodum ... contingit, *fügt B die Randglosse hinzu:* Hic falsum dicit. — 8 diviseris. — 12—17 *In A werden die Worte:* triangulum *agd* ... nimirum secabis *nochmals wiederholt, nur steht statt* secabis: dividitur. — 27 aderret *B*.

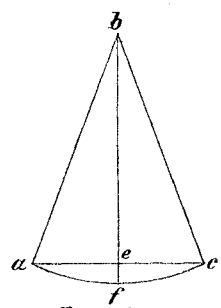
1) Leonardo 148, 13.

raden *ea*, *ec* nach den beiden Eckpunkten *a*, *c*, so theilt man dadurch das Viereck in vier gleiche Stücke, wie die Figur zeigt.

26. *Wenn aber keine der beiden Diagonalen die andere halbiert, wie in allen Trapezoiden der Fall ist,* so theile man das Viereck, wie oben gelehrt ist, durch ein Dreieck und ein Trapezoid in zwei gleiche Stücke. Durch Halbierung jedes einzelnen von ihnen findet man dann vier gleiche Theile des Vierecks. Ist z. B. das Trapezoid *abcd* (Fig. 67) in das Dreieck *agd* und das Trapezoid *abcg* gleich getheilt, so zerschneidet man das Dreieck *agd* in die beiden gleichen Dreiecke *ade*, *deg*, und ebenso das Trapezoid *abcg* in die einander gleichen Stücke, das Dreieck *afb* und das Trapezoid *bfgc*, und hat dadurch das vorgenannte Trapezoid in vier gleiche Stücke getheilt, nämlich die drei Dreiecke *aed*, *def*, *afb* und das Trapezoid *fbeg*, wie die beigegebene Figur zeigt.

Dieselbe Figur könnte man auch auf andere Weise theilen, wenn man sich nur an die Beweise erinnert, die wir bei Theilung der Dreiecke und Vierecke gezeigt haben, und so wird man auch die Theilung der ⟨andern⟩ geradlinigen Figuren leicht auffinden. In ähnlicher Weise nämlich wie diese Figuren, wird man auch die Fünfecke, die Sechsecke und die andern vieleckigen Figuren theilen können, wenn man sie in Dreiecke oder Vierecke auflöst.

27. *Wird ferner ein Feld zur Theilung vorgelegt, dessen eine Seite ein Kreisbogen ist, die beiden andern Seiten aber gerade Linien darstellen,* wie z. B. das Feld $\widehat{abc}$ (Fig. 68), dessen beide Seiten *ab*, *bc* zwei gerade Linien darstellen, die übrige Seite aber ein Kreisbogen bildet, man nennt es aber *„Cata adeiret“*, das heisst Kreissektor, wenn man dieses Feld, sage ich, in zwei gleiche Theile zerschneiden will, so zieht man die gerade Linie *ac* und halbiert sie im Punkte *e*. Errichtet man nun auf der Geraden *ac* in diesem Punkte das Loth *ef*, dessen zweiter Endpunkt *f* auf dem Kreisbogen $\widehat{ac}$ liegt, und zieht nach der andern Seite, wie es gerade trifft, die Gerade *eb* nach dem Punkte *b*, so hat man den Kreissektor durch die Linie *bef* halbiert, mag nun die Linie *bef* eine Gerade sein, wie die erste Figur zeigt, oder keine Gerade, sondern anders gezogen sein, wie die zweite Figur (Fig. 69) darstellt.[1])



Prima figura

Fig. 68.

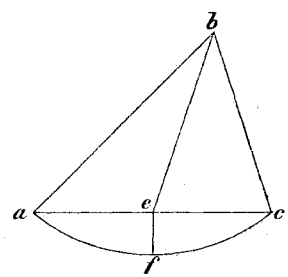


Figura secunda

Fig. 69.

28. *Hanc autem eandem figuram aliter in duo secare poteris aequa.* Veluti si a puncto b (Fig. 70) usque ad punctum f lineam bf protraxeris, ⟨quae⟩ per lineam ac transiens eam supra punctum h utcumque secabit. Post haec proportionem lineae hc ad lineam ea diligenter inquirens et secundum eandem proportionem ex linea ba a puncto b sumens nota g impressa signabis. Erit' igitur proportio bg ad ga ⟨sicut proportio hc ad ha⟩. His omnibus taliter insignitis, si a puncto f usque ad punctum g lineam fg rectam produxeris, circuli sectorem in duo aequa secabis, quae sunt sector $\widehat{fga}$ et superficies $\widehat{bgfc}$ almuncharif, ut in hac tertia figura depingitur.

Divisionis autem haec demonstratio est, quod, quia duo trianguli fge, bge inter duas aequidistantes bf, eg lineas constituti alter alteri sunt aequales, sector $\widehat{agf}$ triangulo abe et sectori $\widehat{afe}$ in unum collectis aequabitur. Amborum etenim summam primi sectoris $\widehat{abc}$ dimidium continere supra monstravimus: sector igitur $\widehat{agf}$ totius sectoris $\widehat{abc}$ dimidium continebit.[1])

27. *In circulorum nempe divisionibus, cum a centro dividuntur, nulla difficultas, quae sit explananda, reperitur.* Si ergo circulum $\widehat{abc}$ (Fig. 71) supra centrum d circumductum in tria partiri desideras, eius circumferentiam in tres aequales partes $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ partiaris. Igitur si ab eius centro d ad tria puncta a, b, c tres lineas da, db, dc protraxeris, eum in tres sectores $\widehat{dba}$, $\widehat{dca}$, $\widehat{dbc}$ secabis, ut figura subscripta demonstrat.[2])

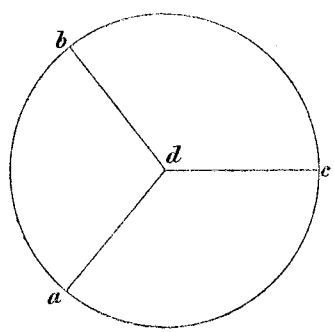


Fig. 71.

Item si circumferentem lineam in 4 aut 5 seu plures aequales diviseris partes, et ad hunc modum operare volueris, in totidem aequales partes, quot divisiones exstiterunt, circulum secabis.

Hoc igitur in loco divisionum capitulo finem imponentes, corporum dimensiones deo adiuvante prosequemur.

---

3 quae *fehlt.* — utrumque *B.* — 5 ex linea *ba* a puncto] linearum *baf* a puncto *B.* — 6—7 sicut . . . *ha fehlt.* — 24 sectores] asciscores *A.* — 27 aequalis. — 32 deo] χρο.

28. *Diese selbe Figur kann man auch anders halbieren.* Zieht man nämlich vom Punkte b (Fig. 70) nach dem Punkte f die Gerade bf, die, weil sie die Gerade ac durchqueren muss, diese im Punkte h irgendwo schneiden wird, sucht darauf genau das Verhältnis der Geraden he zu der Geraden ea, und schneidet von der Geraden ba vom Punkte b aus nach demselben Verhältnisse eine Strecke ab, deren Endpunkt durch g bezeichnet werde, dann ist also das Verhältnis von bg zu ga gleich dem Verhältnis von he zu ha. Nachdem dies alles so bezeichnet ist, zieht man vom Punkte f nach dem Punkte g die Gerade fg und theilt dadurch den Kreissektor in zwei gleiche Stücke, nämlich den Sektor $\widehat{fga}$ und das Trapezoid $\widehat{bgfc}$, wie in der dritten Figur gezeichnet ist.

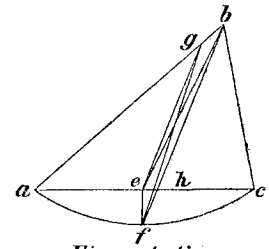


Figura tertia
Fig. 70.

Der Beweis der Theilung ist folgender. Weil die beiden Dreiecke fge, bge, da sie zwischen den beiden Parallelen bf, eg liegen, einander gleich sind, so ist der Sektor $\widehat{agf}$ der Summe des Dreiecks abe und des Sektors $\widehat{afe}$ gleich. Diese Summe der beiden enthält aber, wie oben bewiesen ist, die Hälfte des Sektors $\widehat{abc}$, also ist auch der Sektor $\widehat{agf}$ gleich der Hälfte des Sektors $\widehat{abc}$.[1])

29. *Bei Theilung des ganzen Kreises, wenn die Theilung vom Mittelpunkte aus geschehen soll, findet man keine Schwierigkeit, die zu erläutern wäre.* Will man z. B. den Kreis $\widehat{abc}$ (Fig. 71), der um den Mittelpunkt d beschrieben ist, in drei gleiche Theile zerschneiden, so theilt man seinen Umfang in drei gleiche Bogen $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$. Zieht man nun vom Mittelpunkte d nach den drei Punkten a, b, c die drei Geraden da, db, dc, so theilt man ihn dadurch in die drei Sektoren $\widehat{dba}$, $\widehat{dca}$, $\widehat{dbc}$, wie die beigegebene Figur zeigt.[2])

Wenn man ähnlich den Umfang in vier oder fünf oder noch mehr gleiche Abschnitte theilt, und auf die angegebene Weise vorgeht, so zertheilt man dadurch den Kreis in ebensoviele gleiche Stücke, als Abschnitte des Umfangs vorhanden sind.

Indem wir an dieser Stelle dem Kapitel über die Theilungen ein Ende setzen, gehen wir mit Gottes Hilfe zur Ausmessung der Körper über.

---

1) Leonardo 148, 21. 2) Leonardo 145, 29.

Capitulum quartum in dimensionibus corporum secundum longitudinem, latitudinem et altitudinem.

⟨Nota, quod punctus nullam, linea unam, superficies duas, corpus tres longitudines, id est dimensiones, habere dicitur.⟩

1. Qualiter in tria genera corporum dimensiones dividuntur, hoc in capitulo diligenter explanabimus.

Primi itaque generis esse dicuntur omnia corpora, quorum termini super proprias bases secundum rectum angulum elevantur, et quorum inferiores superioresque superficies sunt ad invicem aequidistantes, quare etiam necessitate cogente sunt aequales. Haec autem in tres species subdividuntur. Sunt enim quaedam, quorum bases atque summitates quatuorque latera superficiebus quadrilateris designantur; quaedam autem sunt, quorum bases summitatesque triangulares vel pentagonae vel aliae multiangulae superficies ostendunt. Horum quidem omnes lineae rectae, latera vero sunt superficies quadrilaterae. | Sunt etiam et aliae, quorum bases 33
atque summitates circulares superficies continent, totumque corpus teretem ad columnae similitudinem formam recipit. Omnium autem sub hoc genere contentorum altitudines per exteriores earundem superficies addiscuntur.[1])

2. *Secundi vero generis* sunt omnia corpora, quorum exteriores superficies supra proprias bases non secundum rectum, sed secundum acutum angulum eriguntur, et quorum insuper altitudines, quandoque ad idem punctum sese coartando conveniunt, quandoque, licet coartantur, non tamen ad idem punctum terminantur. Formae vero corporum ad idem punctum pervenientium secundum propriae basis formam alterantur, vocanturque *piramides erectae.* Cuiuscunque vero earundem basis quadrilatera fuerit, quadrangula, cuius autem triangularis, triangula, si circularis basis exstiterit, circularis piramis nuncupabitur. Illorum vero corporum, quae, licet coartantur, non tamen ad idem punctum terminantur, superiores superficies a suis basibus non nisi in quantitatibus discordant, minoris enim quantitatis existunt. Huiusmodi quippe formam observantes *curtae piramides* appellantur. Cunctorum autem corporum sub hoc secundo genere contentorum altitudines per suas exteriores superficies nequaquam addiscuntur. Eorum etenim altitudines sunt lineae, quae ab ipsorum summitatibus usque ad proprias bases secundum rectum angulum elevantur.[2])

3. Illa vero corpora sub *tertio genere* continentur, quae rotundam ex omni parte formam repraesentant, ut sphaerica corpora et similia sperarum, quae portiones eiusdem generis esse dicuntur.

3—4 Nota . . . dicitur *in A auf dem Rande ausradiert.* — 37 quos.

Viertes Kapitel. Die Ausmessung der Körper nach Länge, Breite und Höhe.

Man beachte, dass man sagt, der Punkt habe keine, die Linie eine, die Fläche zwei, der Körper drei Längen, das heisst Ausdehnungen.

1. Auf welche Weise bei der Ausmessung die Körper in drei Arten getheilt werden, wollen wir in diesem Kapitel genau auseinandersetzen.

Zur *ersten Art* werden alle Körper gerechnet, deren Grenzflächen auf ihren Grundflächen unter rechten Winkeln errichtet, und deren untere und obere Flächen einander parallel sind, die daher auch nothwendigerweise gleich sein müssen. Sie zerfallen aber in drei Unterarten. Einige sind nämlich darunter, deren Grund- und Deckflächen und die vier Seitenflächen von Vierecken gebildet werden; andere wieder, deren Grund- und Deckflächen dreieckig oder fünfeckig oder andere vieleckige Figuren zeigen; ihre Kanten sind sämtlich gerade Linien, die Seitenflächen aber viereckige Flächen. Es giebt auch noch andere, deren Grund- und Deckflächen Kreise bilden, und der ganze Körper eine gedrehte Form nach Art einer Säule erhält. Die Höhen aller Körper aber, die unter diese Art fallen, werden an ihren Aussenflächen gefunden.[1])

2. Zur *zweiten Art* gehören alle Körper, deren Aussenflächen nicht auf den Grundflächen unter rechtem, sondern unter spitzem Winkel aufstehen, und deren Kanten ausserdem bald sich verengend in demselben Punkte zusammentreffen, bald, obwohl sie sich verengern, doch nicht in demselben Punkte endigen. Die Gestalt der Körper, welche in demselben Punkte zusammenkommen, ist nach der jedesmaligen Gestalt der Grundfläche verschieden: sie heissen *gerade Pyramiden.* Diejenige, deren Grundfläche vierseitig ist, wird vierseitige, wenn sie dreiseitig ist, dreiseitige, wenn die Grundfläche kreisförmig ist, Kreispyramide genannt. Bei den Körpern aber, welche, obwohl sie sich ergänzen, doch nicht in einem Punkte endigen, unterscheiden sich die oberen Flächen von den Grundflächen nur in der Grösse, sie sind eben kleiner. Die diese Form beobachten, heissen *abgestumpfte Pyramiden.* Die Höhen sämtlicher Körper, welche unter diese zweite Art fallen, kann man vermittelst der Aussenflächen niemals finden. Ihre Höhen sind nämlich Gerade, die von ihren Spitzen auf die jedesmalige Grundfläche unter rechtem Winkel gefällt sind.[2])

3. Zur *dritten Art* werden aber diejenigen Körper gerechnet, die eine allseitig runde Gestalt besitzen, wie die kugelförmigen Körper und die kugelähnlichen, und die, welche Abschnitte dieser Art genannt werden.

1) Hierunter sind also alle geraden Prismen und Cylinder verstanden.

2) Das sind also Pyramiden und Kegel, sowie abgestumpfte Kegel und Pyramiden.

4. Primo itaque genere incipientes eiusdem figurarum diversitates ostendamus. Multas enim et diversas figuras amplectitur, quarum quidem prima est, cuius omnes longitudines, id est dimensiones, sunt quadrilaterae rectiangulae. Haec etiam in quamplures formas subdividitur. Quarum est, cuius omnes dimensiones sunt ad invicem aequales, ut in corpore, cuius singulae dimensiones 10 ulnas continent, vocaturque *mucahab*, id est *calcaneum*. Haec autem embadi notia est, ut 10 in 10 multiplicatis 100 invenias, quod est duorum dimensionum, longitudinis scilicet et latitudinis, embadum. Post haec si 100 in 10, quae sunt altitudo, multiplicaveris, 1000 ulnas invenies, quod est area istius mucahab. Haec autem ulnae solidae sunt, quarum trium dimensionum, scilicet longitudinis, latitudinis et altitudinis, superficies sunt ulnae super ulnas quadratae. Omnes quidem ulnae, de quibus in corpore mentionem facimus, sunt ulnae super | ulnas 33′ in ulnae unius altitudine.[1])

5. Quod si non omnes huius figurae dimensiones, sed quaelibet duae sibimet aequales exstiterint, tertia vero maior vel minor remanserit, ut in corpore, cuius longitudo quatuor, latitudo similiter quatuor, altitudo vero 10 ulnas habuerit, quod *staris longum* nuncupatur, si longitudinem in latitudinem duxeris, 16 procreabuntur, quae si in altitudinem multiplicaveris, 160 nimirum invenies, quod est staris longi embadum.[2])

6. Item si istius figurae dimensiones inaequales apparuerint, ut in corpore, cuius longitudo 6, latitudo 7, altitudo autem 8 continet, si longitudinem in latitudinem multiplicaveris, et quod fuerit inde collectum, in altitudinem duxeris, 336 reperies, quod est huius corporis area.[3])

7. *Harum quidem figurarum diametrum* est linea ab uno angulo basis usque ad alium angulum sibi oppositum protracta, et ipsa est, quam in his figuris trianguli orthogonii ypotenusam dicimus, cuius alterum latus recto adiacens angulo corporis est altitudo, alterum autem latus est diametrum basis eiusdem corporis, ypotenusa vero diametrum totius corporis existit. Quare diametrum in praenominata figura, quae mucahab nuncupatur, radix 300 esse dicitur, eo quod diametrum basis est radix 200, altitudinisque multiplicatio 100 efficit ulnas. Hae autem duae multiplicationes, altitudinis videlicet et diametri basis, in unum coadunatae, sunt diametri corporis multiplicatio, ideoque radicem 300 illud esse diximus. Ad istius namque similitudinem omnium corporum diametrum investigare poteris.[4])

---

3 omnes id est longitudines dimensiones. — 18 stans longum *B*. — 20 stans longi *B*. — 30 Quare] Quod si.

---

1) Würfel: $V = a \cdot a \cdot a$. 2) Quadratischer Rechtecker $V = a \cdot a \cdot h$.
3) Rechtecker: $V = a \cdot b \cdot h$.

4. Indem wir mit der ersten Art beginnen, werden wir zunächst die Verschiedenheit der Gestalten zeigen. Sie enthält nämlich vielerlei verschiedene Formen. Die erste ist diejenige, deren sämtliche Längen, das ist Ausdehnungen, rechtwinklige Vierecke sind. Sie zerfallen wieder in sehr vielfache Gestalten. Zu ihnen gehört die, deren sämtliche Längen einander gleich sind, wie der Körper, dessen einzelne Ausdehnungen je 10 Ellen enthalten: er heisst *Mucahab,* das ist *Würfel.* Für ihn ist die Regel zur Bestimmung des Volumens, dass man 10 mit 10 vervielfachend 100 findet, und das ist der Flächeninhalt zweier Ausdehnungen, nämlich der Länge und der Breite. Multipliciert man dann 100 mit 10, nämlich der Höhe, so findet man 1000, das ist der Körperinhalt jenes Mucahab. Diese Ellen sind aber Körperellen, bei denen die Flächen der drei Ausdehnungen, nämlich der Länge, Breite und Höhe, Quadratellen sind. Alle Ellen nämlich, deren wir uns bei den Körpern bedienen werden, sind Elle mal Elle mal einer Elle Höhe.[1])

5. Wenn nicht sämtliche Ausdehnungen dieser Form, sondern nur zwei unter sich gleich sind, die dritte aber grösser oder kleiner übrig bleibt, wie für den Körper, dessen Länge 4, die Breite ebenfalls 4, die Höhe aber 10 Ellen besitzt, und der *Staris longum* genannt wird, und man die Länge mit der Breite multipliciert, so kommen 16, und diese mit der Höhe multipliciert ergeben 160, das ist der Körperinhalt des *Staris longum.*[2])

6. Finden wir die drei Ausdehnungen dieser Figur ungleich, wie bei dem Körper, dessen Länge 6, die Breite 7, die Höhe aber 8 Ellen enthält, und man multipliciert die Länge mit der Höhe und das Produkt mit der Breite, so findet man 336, und das ist das Volumen dieses Körpers.[3])

7. *Für diese Figuren ist die ⟨Körper-⟩ Diagonale* eine Gerade, die von einem Eckpunkte der Grundfläche nach dem ihr gegenüberliegenden Eckpunkte ⟨der Deckfläche⟩ gezogen ist, es ist das diejenige Gerade, welche wir in diesen Figuren die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks nennen, dessen eine dem rechten Winkel anliegende Seite die Höhe des Körpers, die andere aber die Diagonale der Grundfläche dieses Körpers ist; die Hypotenuse ist dann die Körperdiagonale.

In der obigen Mucahab genannten Figur ist also die Körperdiagonale gleich $\sqrt{300}$, weil die Diagonale der Grundfläche $\sqrt{200}$ ist, und das Quadrat der Höhe 100 Quadratellen beträgt. Beide Quadrate, das der Höhe und das der Flächendiagonale zusammenaddiert geben das Quadrat der Körperdiagonale, und deshalb sagten wir, sie betrage $\sqrt{300}$. Auf ähnliche Weise kann man die Körperdiagonale aller solcher Körper finden.[4])

---

4) Körperdiagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$; Flächendiagonale $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

8. Harum quoque figurarum, de quibus nunc mentionem fecimus, bases et summitates sunt quadrilaterae rectiangulae. *Quod si figurae quadrilaterae, sed non rectiangulae fuerint,* ut rhumbus et rhumboides, figuraeque diversorum laterum, earum superficierum aream inquirens eam in altitudinis
5 summam multiplica, et quod fuerit, erit corporis embadum.[1])

9. Item alterius figurae corpus sub hoc eodem genere continetur, ut corpus illud, cuius basis et summitas figura triangularis exstiterit et super tres quadrilateras superficies elevatum fuerit, quod *figura mansor,* id est *serrata,* nuncupatur, eo quod praecedentis, id est mucahab figurae, dimi-
10 dium suscipit. Haec autem figura plures inde species secundum triangulorum diversitates subdividitur, earum tamen arearum notitia est eadem. Quarum scilicet arearum omnium similitudo est, ut figura mansor, cuius basis et summitas fuerit triangulus orthogonius, cuius unum latus 3, alterum 4, tertium vero 5 ulnas in se continet, altitudoque figurae 10 ulnas
15 habuerit, triangulorum embadum, quod est 6, addiscens, illud in 10, quae sunt altitudo, multiplica, et | quod inde procreaverit, erit huius man- 34
sor area.[2])

10. Similiter si basis et summitas corporis superficies pentagonae vel exagonae fuerint, ⟨quod⟩ *pentagonum staris,* vel *exagonum staris* nuncupa-
20 bitur, pentagoni igitur vel exagoni embadum addiscas, et quod fuerit, si in altitudinem duxeris, corporis aream invenies.

11. Si autem alterius figurae corpus sub hoc eodem genere contemtum fuerit, ita quod eius basis et summitas sint circulares superficies, totumque corpus circumrotationibus augmentetur, figurae huius aream, quemadmodum
25 et aliarum figurarum areas sub praedicto modo cognosces, prius tamen ⟨circuli⟩ basis vel summitatis embado reperto. Nam si basis vel summitatis embadum in altitudinem duxeris, istius figurae, quae *rotunda columna* nuncupatur, aream invenies.[3])

12. *Manifestum est igitur, quod modus inveniendi areas omnium figu-*
30 *rarum ⟨huius⟩ generis una est et eadem. Si enim basis vel summitatis cuiuslibet istarum figurarum embadum inveneris, et illud in altitudinis summam multiplicaveris, totius corporis aream reperies.* Nullam quippe, quantum ad hoc, in genere isto diversitatem invenies.[4])

---

5 summa. — 8 quadrilaterae *A.* — elevata *A.* — 19 quod *fehlt.* — stans *zweimal B.* — 25 figura. — 26 circuli *in A über der Zeile ausradiert.* — 30 huius *in A über der Zeile ausradiert.*

---

1) Allgemein $V = G \cdot h$.

2) Das dreiseitige Prisma hat also den speciellen Namen *serrata,* direkte Übersetzung von Prisma.

8. Die Grund- und Deckflächen derjenigen Figuren, welche wir bis jetzt erwähnten, sind Rechtecke. *Wenn nun diese Flächen zwar vierseitig, aber nicht rechtwinklig wären,* wie die Rhomben, die Rhomboide und die Figuren mit ungleichen Seiten, so suche man die Inhalte dieser Flächen und multipliciere sie mit der Höhe, das Ergebnis ist dann das Volumen des Körpers.[1])

9. Unter den Körpern dieser Art ist auch einer von anderer Gestalt enthalten, nämlich der Körper, dessen Grund- und Deckfläche eine dreieckige Gestalt hat, und der drei vierseitige Seitenflächen besitzt. Er wird *Mansor* genannt, das ist *der Gesägte* (Prisma), weil er die Hälfte des vorhergehenden Körpers ist, den wir Mucahab nannten. Diese Körperart wird in viele Unterarten nach der Verschiedenheit der Dreiecke getheilt, die Auffindung des Körperinhaltes aber ist ein und dieselbe. Als Beispiel für die Bestimmung des Volumens sei ein Mansor gegeben, dessen Grund- und Deckfläche je ein rechtwinkliges Dreieck ist, von dem eine Seite 3, die andere 4, die dritte 5 Ellen enthält, die Höhe des Körpers habe 10 Ellen. Man suche den Inhalt der Dreiecke, er ist 6, und multipliciere dies mit der Höhe 10, dann ist das Ergebnis das Volumen dieses Primas.[2])

10. Wenn die Grund- und Deckfläche des Körpers eine fünf- oder sechseckige Fläche wäre, man nennt ihn dann *fünfeckigen Staris* oder *sechseckigen Staris,* so sucht man entsprechend den Inhalt des Fünfecks oder des Sechsecks, und indem man das Ergebnis mit der Höhe multipliciert, erhält man das Volumen des Körpers.

11. Wenn aber der Körper von anderer Gestalt, der unter dieser Art enthalten ist, vorliegt, dessen Grund- und Deckfläche nämlich Kreise sind, und der ganze Körper durch Umdrehung entstanden ist, so findet man seinen Körperinhalt in vorgemeldeter Weise, nachdem man natürlich vorher den Flächeninhalt des Grund- oder des Deckkreises gefunden hat. Vervielfacht man nämlich den Flächeninhalt der Grund- oder der Deckfläche mit der Höhe, so findet man das Volumen dieses Körpers, der *Rundsäule* genannt wird.[3])

12. *Es ist also klar, dass die Methode, den Körperinhalt aller zu dieser Art gehörigen Körper zu bestimmen, eine und dieselbe ist. Hat man nämlich den Flächeninhalt der Grund- oder der Deckfläche irgend eines solchen Körpers gefunden, und multipliciert ihn mit der Länge der Höhe, so findet man das Volumen des Körpers.* Soweit es also diesen betrifft, findet sich bei dieser Art kein Unterschied.[4])

---

3) Cylinder: $V = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi h = G \cdot h$.

4) Der Inhalt für alle dergleichen Körper ist also allgemein $V = G \cdot h$.

13. Secundum vero genus ⟨in⟩ duas dividitur species, quarum altera est, a cuius basi corpus acui vel contrahi incipiens usque ad unum punctum ascendendo distenditur. Haec quidem species est plurium et diversarum, figurarum. Aut enim erit basis quadrilatera vel pentagona, vel exagona, seu aliarum quarumlibet superficierum, multotiens etiam erit et circularis.

Istarum nempe arearum notitia est una et eadem. Nam si basis embadum non ignoraveris, et illud in tertiam altitudinis partem multiplicaveris, totius piramidis aream addisces.

Ad cuius similitudinem proponatur piramis, cuius basis quadrilatera in sui longitudine 4, in latitudine vero similiter 4 ulnas contineat, eiusque summitas ab uno puncto terminata 10 etiam ulnas in sua contineat altitudine. Notum igitur est, quod basis area 16 ulnas continet. Quas si in tertiam partem altitudinis, quae sunt tres et triens, multiplicaveris, 53 et trientem nimirum invenies, quod est huius piramidis area. Si enim 16, quae sunt basis embadum, in totam altitudinis lineam, quae sunt 10, duxeris, 160 procreabuntur, cuius summae pars tertia 53 et trientem efficit, quae sunt, ut diximus, istius piramidis embadum.

Huius quidem rei demonstratio in geometria declaratur. Illa enim manifestis demonstrationibus ostendit, quod in omni corpore, nisi sphaericum sit, tertia pars areae suae piramidis embadum complet.[1])

14. Ex hoc etiam comprehenditur, quod, *si harum piramidum basis trigona vel circularis fuerit,* eiusdem basis aream addiscens, eam in tertiam partem altitudinis multiplica, et quod fuerit, erit piramidis area. Et quia piramidum altitudines per exteriores superficies investigari nequeunt, quia earum altitudines sunt lineae, quae a summo capitum | usque ad bases 34′ secundum rectum angulum protrahuntur, qualiter has lineas addiscamus, elaborabimus.

15. Piramides igitur in quatuor partes dividuntur, quarum *prima* est, cuius basis latera sunt aequalia, vel basis est circularis, omnesque lineae, quae ab angulari basis vel arcuficiente linea basis ad extremum piramidis punctum diriguntur, sunt ad invicem aequales. *Secunda* vero est, cuius omnes lineae, quae a basi ad summum piramidis abstrahuntur, sibimet invicem aequantur, basis autem latera sunt inaequalia. *Tertia* quidem est, cuius basis omnia latera sunt aequalia, lineae vero, quae ab angulis usque

---

1 in *fehlt.* — 2 ad cuius basim corpus vel acui contrahi. — 5 sive *B.* — 12 pasis *A.* — 22 trigona . . . basis *in B doppelt.* — 24—25 quia earum] et ex. — 32 piramis.

---

1) Es ist also der Inhalt jeder Vollpyramide und jedes Vollkegels $V = \frac{1}{3} G \cdot h$. Für den Beweis bezieht er sich auf die Geometrie (Euklid's).

13. Die zweite Art wird in zwei Unterarten geschieden. Die erste ist diejenige, von deren Grundfläche an der Körper sich zu verjüngen anfängt, bis er zu einen Punkt aufsteigend in ihm zusammenläuft. Diese Unterart enthält viele verschiedene Formen. Entweder ist nämlich die Grundfläche viereckig, oder fünfeckig, oder sechseckig, oder irgend eine andersgestaltete Fläche; oftmals ist sie auch kreisförmig.

Die Bestimmung der körperlichen Inhalte ist bei diesen Körpern wieder eine und dieselbe. Denn wenn man den Inhalt der Grundfläche kennt, und ihn mit dem dritten Theile der Höhe multipliciert, so erhält man dadurch den Körperinhalt der ganzen Pyramide.

Es sei z. B. eine Pyramide vorgelegt, deren Grundfläche ein Quadrat ist, das in der Länge und ebenso in der Breite je 4 Ellen enthalte. Die Spitze, die von einem Punkte gebildet wird, habe eine Höhe von 10 Ellen. Nun ist bekannt, dass der Flächeninhalt der Grundfläche 16 Quadratellen enthält. Multipliciert man ihn mit dem dritten Theile der Höhe, das ist $3\frac{1}{3}$, so findet man $53\frac{1}{3}$, und das ist der körperliche Inhalt dieser Pyramide. Wenn man nämlich 16, den Inhalt der Grundfläche, mit der ganzen Höhe, das ist mit 10, vervielfacht, so entsteht 160, und dieser Summe dritter Theil giebt $53\frac{1}{3}$, die, wie schon gesagt, das Volumen der Pyramide ausmachen.

Der Beweis dieser Rechnung wird in der Geometrie (Euklid's) gegeben. Dort wird nämlich klar bewiesen, dass für jeden Körper, ausgenommen für die Kugel, der dritte Theil seines Körperinhaltes das Volumen seiner Pyramide ergiebt.[1])

14. Hieraus folgt weiter, dass man, *falls die Grundfläche solcher Pyramiden dreieckig oder kreisförmig ist,* nach Bestimmung des Inhaltes der Grundfläche, ihn mit dem dritten Theile der Höhe multiplicieren muss und das Ergebnis dann der Körperinhalt der Pyramide sein wird. Da aber die Höhe der Pyramiden durch die Aussenflächen nicht gefunden werden kann, weil die Höhe eine Gerade ist, welche von der Spitze auf die Grundfläche unter rechtem Winkel gezogen wird, so müssen wir zeigen, auf welche Weise wir diese Gerade bestimmen können.

15. Die Pyramiden werden in vier Arten getheilt. Bei *der ersten* sind die Seiten der Grundfläche gleich, oder sie ist ein Kreis, und alle Geraden, welche von den Eckpunkten oder der bogenförmigen Linie der Grundfläche nach dem äussersten Punkte der Pyramide gezogen werden, sind einander gleich. Bei *der zweiten* sind alle Geraden, welche von (den Eckpunkten) der Grundfläche nach der Spitze der Pyramide gezogen werden, einander gleich, aber die Seiten der Grundfläche sind ungleich. Bei *der dritten* sind zwar die Seiten der Grundfläche sämtlich einander gleich, aber die Geraden,

ad extremum punctum capitis distenduntur sunt inaequales. *Quarta* denique pars est, cuius nec basis latera, nec lineae, quae ab angulis ad summum capitis diriguntur, sunt ad invicem aequales. Tertia vero pars et quarta improprie piramides vocantur, eo quod supremum punctum ab angulis basis non aequaliter ex omni parte distet, ideoque ipsarum altitudinum notitiam praetermittimus.[1])

16. *Si basis igitur primae partis circularis exstiterit,* multiplicationem medietatis diametri circuli ex multiplicatione illius lineae, quae a circumferenti linea basis usque ad extremum punctum piramidis dirigitur, deme, residuique radicem inquirens piramidis altitudinem invenies.[2])

17. *Si autem piramidis basis triangularis aequilatera fuerit,* dimidium trium laterum in unum collectum addisce, et per illud trianguli embadum, quod est basis illius, partire, illiusque, quod exierit, multiplicationem ex multiplicatione illius lineae, quae a dimidio cuiuslibet lateris trianguli ad supremum piramidis punctum protrahitur, minue, residuique radicem addiscens, quod fuerit, erit piramidis altitudo.

18. *Quod si basis piramidis fuerit quadratus, vel pentagonum aequilaterum et aequiangulum, seu aliarum figurarum, quae multilaterae nuncupantur, et quarum omnia latera et omnes anguli sunt ad invicem aequales,* per dimidium omnium laterum in unum collectorum basis embadum partire, quodque exierit, in se ipsum multiplica, et quod fuerit, ex multiplicatione illius lineae in se ipsam, quae a dimidio cuiuslibet lateris eiusdem figurae usque ad extremum punctum piramidis protrahitur, deme, residuique radicem accipe, quia ipsa erit altitudo piramidis.[3])

19. *Item si basis piramidis quadrilatera vel pentagona seu quaelibet multilatera figura, aequilatera quidem, sed non aequiangula fuerit,* ad altitudinis notitiam per hanc regulam pervenire nullatenus poteris. Verum si illius instrumenti, per quod ex declivio montis inferior superficies eiusdem montis inquiritur, non immemor fueris, ad harum piramidum altitudinem leviter et sine difficultate pervenies.

20. *In piramidibus autem secundae partis, quarum omnes lineae, quae*

---

13 partire illius. — 23 piramis. — 28 eius idem.

---

1) Diese vier Arten sind also:
1. Reguläre Pyramide und gerader Kegel;
2. Nichtreguläre Pyramiden, deren Grundfläche aber in einen Kreis beschrieben ist;
3. Reguläre schiefe Pyramiden und schiefer Kegel;
4. Irreguläre schiefe Pyramiden.

2) Höhe des Kegels: $h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$.

welche von den Eckpunkten der Grundfläche nach der Spitze gezogen werden, sind ungleich. Zur *vierten Art* endlich gehören diejenigen, für welche weder die Seiten der Grundfläche, noch die Geraden unter sich gleich sind, welche von den Eckpunkten nach der Spitze gezogen werden. Die dritte und vierte Art werden aber nur uneigentlich Pyramiden genannt, weil ihre Spitze von den Eckpunkten der Grundfläche nicht überall gleich weit absteht; wir unterlassen daher die Bestimmung ihrer Höhen.[1])

16. *Ist die Grundfläche der ersten Art ein Kreis,* so subtrahiert man das Quadrat des Halbmessers von dem Quadrate der Geraden, welche von einem Punkte des Umfangs nach der Spitze der Pyramide gezogen ist. Sucht man dann die Wurzel des Restes, so erhält man die Höhe der Pyramide.[2])

17. *Ist aber die Grundfläche der Pyramide ein gleichseitiges Dreieck,* so bestimme man die Hälfte der Summe der drei Seiten, und theile hierdurch den Inhalt des Dreiecks, das die Grundfläche der Pyramide bildet. Dann ziehe man das Quadrat des Ergebnisses von dem Quadrate der Linie ab, welche von der Mitte irgend einer Seite nach der Spitze der Pyramide gezogen werden kann, dann ist die Wurzel des Restes die Höhe der Pyramide.

18. *Ist die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat oder ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck oder eine der übrigen Figuren, welche gleichwinklige und gleichseitige Vielecke genannt werden,* so theile man wieder durch die Hälfte der Seitensumme den Inhalt der Grundfläche und multipliciere den Quotienten mit sich selbst, subtrahiere dann dieses Quadrat von dem Quadrate derjenigen Geraden, welche man von der Mitte einer beliebigen Seite nach der Spitze der Pyramide ziehen kann, und bestimme von dem Reste die Wurzel: sie ist nämlich die Höhe der Pyramide.[3])

19. *Wenn ferner die Grundfläche der Pyramide ein Viereck oder ein Fünfeck oder ein beliebiges zwar gleichseitiges aber nicht gleichwinkliges Vieleck ist,* so kann man durch obige Methode niemals zur Kenntnis der Höhe gelangen. Wenn man sich aber jenes Instrumentes erinnert, vermittelst dessen wir aus dem Abhange eines Berges die Horizontalfläche des Berges gesucht haben, so kann man zur Kenntnis der Höhe solcher Pyramiden leicht und ohne Schwierigkeit gelangen.

20. *Bei den Pyramiden der zweiten Art aber, bei denen alle Geraden,*

---

3) Das Quadrat der Höhe einer regulären Pyramide findet er also, indem er von dem Quadrate derjenigen Seitenlinie, welche vom Halbierungspunkte je einer Seite der Grundfläche gezogen ist, das Quadrat des Radius des eingeschriebenen Kreises abzieht. Dass der Radius gemeint ist, folgt aus Kap. II pars 5 Nr. 1.

ab earundem basibus ad supremum punctum piramidum protrahuntur, sibi | *invicem sunt aequales, basis vero latera sunt inaequalia,* illo eodem instrumento, per quod ex declivio montis inferior eiusdem superficies inquiritur, egemus. *Harum nempe piramidum bases si quadrilaterae rectiangulae fuerint, et earum altitudines nosse volueris,* ex multiplicatione illius lineae quae ab angulo basis ad summum piramidis protrahitur, multiplicationem medietatis diametri basis deme, et radicem residui accipe, quodque exierit ⟨erit⟩ illius altitudo piramidis.[1])

21. Eiusdem autem secundi generis *secunda species* est, cuius piramides cum sunt curtae, usque ad summitatis punctum non perveniunt.

Huius autem speciei modus in metiendo a modo primam istius eiusdem generis metiendi speciem nullatenus differt. Ad cuius similitudinem figura caput abscissa subintelligatur (Fig. 72), cuius quadrata basis 6 in unoquoque latere, caput vero similiter quadratum 4 in singulis lateribus, eius etiam altitudo 10 ulnas contineat. Hunc itaque figuram perficies et usque ad unum summitatis punctum reduces, si, quemadmodum in secundo istius libri capitulo deperfectione figurarum caput abscissarum, quousque ad unum punctum redigantur, ostendimus, operabis. Et ut hoc levius ostendatur, sit exempli causa figura caput abscissa *abcd*, cuius caput linea *cd* 4, eiusdemque basis linea *ab* 6, altitudo vero cathetus *ef* 10 existat ulnarum. Si ergo caput *ed* in totam altitudinem *ef* duxeris, 40 provenient, quae si in duo, quod est id, in quo basis *ab* caput *dc* superat, diviseris, 20 nascentur, et haec ⟨est⟩ lineae *et* ad perfectionem piramidis ad unum supremum punctum reducendae longitudo deficiens. Triangulus igitur *abt* piramidem magnam, triangulus vero *cdt* piramidem parvam constituet. Basis autem maioris piramidis *abt* est senarii in senarium multiplicatio, altitudo vero 30, embadum quoque 360 continet ulnas. Basis etiam minoris piramidis *cdt* est multiplicatio quaternarii in quaternarium, altitudo autem 20, embadum vero 106 et duas insuper tertias amplectitur. Quare si embadum minoris ex embado maioris piramidis abstuleris, 253 et

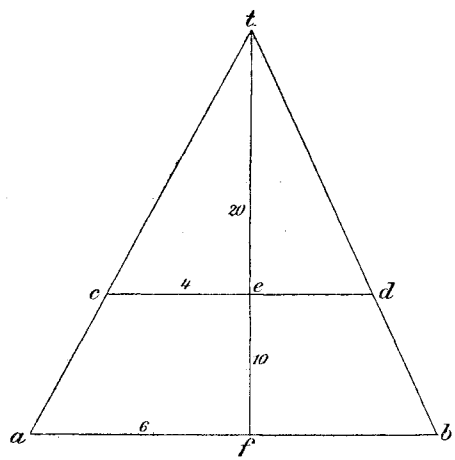


Fig. 72.

8 erit *in A über der Zeile ausradiert.* — 28 excitat *A.* — 31 est *fehlt.* — 34 minoris *A.*

welche von den Eckpunkten der Grundfläche nach der Spitze der Pyramide gezogen sind, einander gleich, die Seiten der Grundfläche aber ungleich sind, verfährt man ebenfalls mit demselben Instrumente, vermittelst dessen aus dem Abhange eines Berges dessen Horizontalebene gefunden wurde. *Bei den Pyramiden aber, deren Grundflächen Rechtecke sind, und deren Höhe man bestimmen will,* subtrahiere man von dem Quadrate der Geraden, welche vom Eckpunkte nach der Spitze gezogen ist, das Quadrat der halben Diagonale der Grundfläche und nehme vom Reste die Wurzel: das Ergebnis wird die Höhe der Pyramide sein.[1])

21. Von der zweiten Körperart aber umfasst *die zweite Unterart* die Pyramiden, welche, weil sie abgestumpft sind, nicht bis zu einer Spitze gelangen.

Die Methode der Ausmessung einer solchen weicht jedoch von der Art der Ausmessung der ersten Unterart durchaus nicht ab. Hierzu werde eine Figur mit abgeschnittenem Kopfe angenommen (Fig. 72), deren quadratförmige Grundfläche 6 Ellen in jeder Seite, der ebenfalls quadratförmige Kopf aber in den einzelnen Seiten 4 Ellen, ihre Höhe 10 Ellen enthält. Diese Figur vervollständige man und vollende sie bis zur Spitze, indem man so vorgeht, wie wir im zweiten Kapitel dieses Buches bei der Vervollständigung der Trapeze, bis sie in einem Punkte zusammenkommen, gezeigt haben. Damit dies aber leichter eingesehen werden kann, sei die Figur mit abgeschnittenem Kopfe etwa $abcd$, deren Kopf, die Gerade cd, 4, die Grundlinie, die Gerade ab, 6, die Höhe aber, das Loth ef, 10 Ellen lang ist. Multipliciert man also den Kopf cd mit der ganzen Höhe ef, so kommt 40, und dividiert man das durch 2, das ist durch den Überschuss der Grundlinie ab über den Kopf cd, so entsteht 20, und das ist die Länge der Geraden et, welche zur Vollendung der Pyramide bis zur Spitze (der Höhe) hinzuzufügen ist. Das Dreieck abt bildet also eine grosse Pyramide, das Dreieck cdt aber eine kleine Pyramide. Die Grundfläche der grössern Pyramide ist das Produkt von 6 mal 6, ihre Höhe aber 30, der Körperinhalt enthält 360 Ellen. Die Grundfläche der kleinern Pyramide cdt ist in ähnlicher Weise das Produkt von 4 mal 4, ihre Höhe 20, das Volumen aber umfasst $106\frac{2}{3}$. Subtrahiert man nun das Volumen der kleinern Pyramide von dem der grössern, so bleibt $253\frac{1}{3}$

---

1) In allen andern Fällen muss man sich also des oben S. 122/123 angegebenen Instrumentes zur Auffindung der Höhe bedienen, worauf er oben schon hingedeutet hatte.

unius tertia remanebit, quod est embadum huius figurae caput abscissae quaesitum, ut in supra scripta figura ⟨repraesentatur⟩.

22. *Item si huius figurae caput abscissae basis et summitas circularis fuerit,* ut in piramide caput abscissa, cuius circularis basis diametrum 4, eiusdemque similiter circularis summitatis diametrum 2, altitudo vero 12 in se continet ulnas, ad istius igitur areae cognitionem si multiplicationem quaternarii in quaternarium, quod est 16, multiplicationem binarii in binarium, et sunt 4, nec non et multiplicationem binarii in quaternarium, quae sunt 8, diligenter inquisieris, | ⟨summam⟩ 28 reperies. Et quibus si septi- 35′
mam septimaeque partis dimidium depresseris 22 remanebunt. Quae si in tertiam altitudinis partem, et sunt 4, duxeris 88 nimirum invenies, quod huius est caput abscissae area.[1])

Hac itaque via omnium figurarum caput abscissarum areas invenies.

23. *Contingit etiam, quod et eadem figura, quae caput abcissa dicitur, quandoque duas sectas summitates, unam ex una, alteram ex altera parte suscipiat, in sua vero medietate maiorem et grassiorem contineat amplitudinem,* et tunc non unius erit corporis, sed duae figurae caput abscissae ad hoc efficiendum coniunguntur. Istarum itaque duarum figurarum areas, sicut supra diximus, separatim addiscas, ut postmodum totum simul addiscas.[2])

24. Sub vero *tertio genere* sphaerica corpora et sphaerarum fractiones continentur.

Igitur si sphaerae diametrum in se ipsum duxeris, et quod fuerit in tres et septimam multiplicaveris, embadum superficiei sphaerae cognosces. Quod si in sui diametri sextam partem duxeris, embadum totius sphaeralis corporis invenies.[3])

Quemadmodum si in sphaera, cuius diametrum est 7, diametrum in se ipsum multiplicaveris, 49 reperies. Quae si in tria et septimam duxeris, 154 apparebunt, quod est superficiei sphaerae dimensio. Quam si in sextam diametri partem, quod est unum et sexta, duxeris, 179 et duas tertias provenire non dubitabis, et hoc est totius sphaeralis corporis area.

25. *Hac etiam numeratione sphaericarum fractionum areas investigare poteris,* ut in fonte, cuius interior pars sit rotunda et os circulare, amplitudoque ipsius 7, profunditas vero 3 et unius medietatem contineat. Si

---

2 subscripta *B*. — repraesentatur *habe ich hinzugefügt*. — 4 piramide] columna. — abscissa] inscissa. — 9 summam *fehlt*. — 34 medietatis.

---

1) Unter Benutzung der oben bei Berechnung der *Figura caput abscissae* gegebenen Anleitung die Ergänzungshöhe des Trapezes zu finden, berechnet hier

und das ist der gesuchte Körperinhalt unserer abgestumpften Pyramide, wie in der oben gezeichneten Figur zu sehen ist.

22. *Ist ferner in der abgestumpften Pyramide die Grund- sowie die Deckfläche je ein Kreis,* wie in der abgestumpften Pyramide, für welche der Durchmesser der kreisförmigen Grundfläche 4, und gleichzeitig der Durchmesser der ebenfalls kreisförmigen Deckfläche 2, die Höhe aber 12 Ellen enthält, so sucht man, um zur Bestimmung ihres Volumens zu gelangen, das Quadrat von 4, das ist 16, ferner das Quadrat von 2, es ist 4, und auch das Produkt von 2 und 4, das ist 8, und findet als ihre Summe 28. Nimmt man hiervon $\frac{3}{14}$ weg, so bleiben 22. Multipliciert man dieses mit dem dritten Theile der Höhe, das ist mit 4, so findet man endlich 88, und das ist der Körperinhalt unserer abgestumpften Pyramide.[1])

Auf solche Weise findet man die Volumina aller abgestumpften Pyramiden.

23. *Es kommt auch vor, dass ein solcher Körper, der abgestumpfte Pyramide genannt wird, manchmal zwei abgeschnittene Deckflächen, eine auf der einen Seite, die andere auf der andern, in seiner Mitte aber eine grössere und stärkere Ausdehnung besitzt.* Dann gehört er nicht zu einem Körper, sondern es sind zwei abgestumpfte Pyramiden, um ihn zu bilden, verbunden. Hier wird man die Körperinhalte der beiden Körper einzeln aufsuchen, wie wir es oben gelehrt haben, damit man nachher das ganze Volumen finden kann.[2])

24. Zu der *dritten Körperart* gehören aber die Kugeln und die Kugelabschnitte.

Wenn man den Durchmesser der Kugel mit sich selbst vervielfacht und das Quadrat mit $3\frac{1}{7}$ multipliciert, so erhält man die Oberfläche der Kugel. Multipliciert man diese mit dem sechsten Theile ihres Durchmessers, so findet man den Körperinhalt der ganzen Kugel.

Quadriert man z. B. in einer Kugel, deren Durchmesser 7 ist, diesen Durchmesser, so erhält man 49. Multipliciert dies mit $3\frac{1}{7}$, so erscheinen 154, und das ist die Grösse der Oberfläche der Kugel. Multipliciert man das mit dem sechsten Theile des Durchmessers, das ist mit $1\frac{1}{6}$, so findet man zweifellos $179\frac{1}{3}$, und das ist das Volumen der ganzen Kugel.

25. *Vermittelst derselben Rechenmethode kann man auch den Körperinhalt der Kugelabschnitte bestimmen,* wie z. B. den eines Brunnens, dessen Innenraum gewölbt ist, und die Öffnung ein Kreis, dessen Weite 7 sei, die

---

Savasorda den Inhalt der abgestumpften Pyramide oder des Kegelstumpfes als Differenz zwischen dem Voll- und dem Ergänzungskörper.

2) Hier handelt es sich offenbar um abgestumpfte Doppelkegel.

3) Kugeloberfläche: $O = d^2\pi$; Volumen: $V = O \cdot \frac{1}{6} d = \frac{1}{6} d^3 \pi$.

ergo ipsius profunditatem in eiusdem oris amplitudinem, quod est sphaerae diametrum, multiplicaveris, et quod fuerit, in tria et septimam, sicut in sphaera docuimus, duxeris, 77 invenies, quod est superficiei fontis embadum. Quam scilicet superficiem si in sextam diametri partem duxeris, 90 minus
5 sexta reperies, quod est embadum fontis, qui sphaerae dimidium existit.[1])

26. *Si fontis item profunditas dimidio amplitudinis minor exstiterit, fontem illum minus dimidio sphaerae continere non dubites,* quemadmodum in circulorum fractionibus ostendimus. Cuius rei similitudo est fons rotunda, in cuius profunditate duae habentur ulnae, in oris autem amplitudine radix
10 de 40, quod est 6 et fere tertia, continetur. Manifestum est, itaque, quod in hoc fonte dimidium sphaerae nullatenus reperitur. Verumtamen si sphaerae diametrum protraxeris, illud 7 ulnarum fore cognosces, quapropter, si duo, quae sunt fontis profunditas, in 7, quod est sphaerae diametrum, multiplicaveris, 14 efficies. Quae si in tria et septimam duxeris, 44 in-
15 venies, quod est embadum super|ficiei fontis. Si hoc igitur in sextam dia- 36
metri partem multiplicaveris, 51 et tertiam reperies, et hoc est totius fontis embadum.

27. *Item si fontis profunditas 5, amplitudo autem radix de 40 fuerit, totius sphaerae diametrum 7 continebit.* Si igitur profunditatem in dia-
20 metrum duxeris, 35 nascentur, quae si in tria et septimam multiplicaveris, 110 invenies, quae sunt superficiei fontis embadum. Quod si in sextam diametri partem duxeris, 126 et unius tertiam complebis, quod est fontis area.[2])

Manifestum est igitur, qualiter sphaerarum et earundem fractionum
25 areas, et veraciter, invenire possumus, quare dimensiones corporum, quae sub tribus generibus comprehenduntur, velut in istius capituli principio promisimus, diligenter explanavimus, et ita quartum capitulum deo adiuvante perficimus.

---

1. His ita peractis, qualiter ad metiendi modum levius pervenies, in-
30 dicabimus. Magnus enim labor est, ita, ut praediximus, operari. Quapropter quoddam instrumentum, quo laboris modus evacuatur, ostendamus.[3])

---

7 minus minus *A*. — 9 horis *A*. — 19 totius totius *A*. — 27 deo] χpo. — 29 paratis *A*.

---

1) Halbkugel: $O = \frac{d^2}{2}\pi$; $V = O \cdot \frac{1}{6} d = \frac{d^3}{12}\pi$.

2) Kugelkappe: $O = d \cdot h \cdot \pi$; $V = \frac{1}{6} d^2 h \cdot \pi$.

3) Im Nachfolgenden giebt Savasorda praktische feldmesserische Regeln unter Benutzung zweier Instrumente, welche sonst, und auch von Leonardo in

Tiefe desselben aber enthalte $3\frac{1}{2}$. Multipliciert man nun die Tiefe mit der Weite der Öffnung, welche den Durchmesser der Kugel bildet, und vervielfacht das Produkt mit $3\frac{1}{7}$, wie wir für die Kugel gelehrt haben, so findet man 77, und das ist der Inhalt der Oberfläche des Brunnens. Multipliciert man nun diese Oberfläche mit dem sechsten Theile des Durchmessers, so findet man 90 weniger $\frac{1}{6}$, und das ist der Körperinhalt des Brunnens, der die Hälfte der Kugel beträgt.[1])

26. *Ist die Tiefe des Brunnens kleiner als die Hälfte der Weite, so ist ohne Zweifel der Brunnen weniger als die Halbkugel,* wie wir bei den Kreisabschnitten gezeigt haben. Als ein Beispiel dazu sei ein kreisrunder Brunnen vorgelegt, in dessen Tiefe 2 Ellen enthalten seien, die Weite der Öffnung aber sei $\sqrt{40}$, welche 6 und nahezu $\frac{1}{3}$ enthält. Es ist also klar, dass dieser Brunnen keineswegs die Hälfte der Kugel enthält. Wenn man aber den Durchmesser der Kugel bestimmt, so sieht man, dass er von 7 Ellen Länge ist. Multipliciert man daher 2, das ist die Tiefe des Brunnens, mit 7, dem Durchmesser der Kugel, so macht das 14, und durch Multiplikation mit $3\frac{1}{7}$ findet man 44, und das ist der Betrag der Oberfläche des Brunnens. Multipliciert man dann diesen mit dem sechsten Theile des Durchmessers, so findet man $51\frac{1}{3}$, und das ist der Körperinhalt des ganzen Brunnens.

27. *Ist ferner die Tiefe des Brunnens 5, die Weite der Öffnung aber $\sqrt{40}$, so enthält der Durchmesser der Kugel 7.* Multipliciert man nun die Tiefe mit dem Durchmesser, so entstehen 35, und diese mit $3\frac{1}{7}$ vervielfacht geben 110, den Inhalt der Oberfläche des Brunnens. Multiplikation mit dem sechsten Theile des Durchmessers ergiebt $128\frac{1}{3}$, das ist den Körperinhalt des Brunnens.[2])

Es ist also klar, wie man das Volumen der Kugel und der Kugeltheile genau zu finden imstande ist. Wir haben damit die Ausmessung der Körper, welche unter den drei Arten enthalten sind, vollständig dargelegt, wie wir im Anfange dieses Kapitels versprochen haben, und haben so das vierte Kapitel mit Gottes Hilfe zu Ende geführt.

---

1. Nachdem dies geschehen ist, wollen wir zeigen, wie man zu einer leichtern Ausmessungsmethode gelangen kann. Es ist nämlich mit vieler Mühe verknüpft, so vorzugehen, wie wir oben gesagt haben. Wir werden deshalb ein Instrument beschreiben, durch welches die Arbeit vereinfacht wird.[3])

---

seiner Distinctio VII., zur Höhenmessung verwendet wurden. Dass damals solche Regeln in Übung waren, ist wohl kaum einem Zweifel unterworfen.

2. *Si triangulum itaque campum ad modum subscriptae formae abc* (Fig. 73) *formatum metiri volueris,* eius quodlibet unum latus, et sit latus *bc*, diligenter metire: ipsum sit eiusdem trianguli basis. Post haec duas arundines accipiens, quarum altera super alteram secundum rectum angulum elevetur, vel, si volueris, quoddam quadrilaterum rectiangulum assumens, rectum angulum cuilibet puncto basis superpone, sitque punctus ille punctus *d* lateris *bc*. Quo facto mensurandi lineam in arundinis seu lateris praedicti basis directo, quousque ad alterutrum trianguli latus perveniat, protrahe. Quae si forte ad angulum trianguli pervenerit, ut linea *da* in hac subscripta figura, eam trianguli perpendicularem esse non dubites. Cuius quantitatem diligenter inquirens, ipsam in basis dimidium multiplica, et quod fuerit, erit trianguli embadum, nec aliarum summas investigare te tunc oportebit.

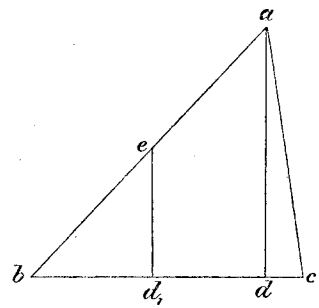


Fig. 73.

3. *Quod si mensurandi linea nequaquam ad angulum trianguli, sed ad alterutrum trigoni latus provenerit,* ut linea d_1e in hac eadem figura, sitque punctus *e* super lineam *ab*, erit proportio *be* ad *ab* sicut proportio lineae d_1e ad lineam *ad*, eo quod duo trianguli *adb*, bd_1e similes existunt. Ex hac itaque proportione summam perpendicularis *ad* non ignorare poteris. Hoc idem etiam facies, si mensurandi linea ad alterum latus *ac* perveniret. Isto igitur instrumento omnes triangulares campos metiri poteris, ita quod eorum omnium laterum summam investigare supervacaneum iudicabis.

4. *Item si campus quatuor rectis lateribus terminatur, praedictum quadrilaterum rectangulum supra quemlibet unum angulum eiusdem campi coapta,* et si mensurandi lineam in directo lineae quadrilateri rectilinei et super campum in latus protendi cognoveris, rectum angulum eum fore non dubitabis. | Idem in secundo tertioque angulo faciens, si eos tres rectos in- 36′
veneris, illum campum quadrilaterum rectiangulum affirmabis, et tunc duorum laterum uni angulo adiacentium summas inquirens, alteram in alteram multiplica, et quod fuerit, erit eiusdem quadrilateri embadum. Nec summarum aliarum laterum cognitionem, cum hoc feceris, egebis, et haec est huius rei prima figura *abcd* (Fig. 74).

5. *Quod si campus duos tantum rectos angulos et super unum latus*

---

11 vasis *A*. — 12 proveniat. — 16—17 investigari *A*. — 28 et si] et sit *A*. — linea.

2. *Will man also ein dreieckiges nach der nebenstehenden Gestalt abc* (Fig. 73) *gebildetes Feld ausmessen, so misst* man eine beliebige Seite desselben genau, es sei dies die Seite *bc*, sie werde als Grundlinie des Dreiecks genommen. Darauf nimmt man zwei Stangen, von denen die eine mit der andern unter rechtem Winkel verbunden ist, oder, wenn man will, irgend ein Rechteck, und legt den rechten Winkel auf irgend einen Punkt der Grundlinie auf. Es sei dies der Punkt *d* der Seite *bc*. Darauf verlängere man die messende Gerade in der Stange oder der Seite, welche auf vorgenannter Grundlinie errichtet ist, bis sie an eine der beiden andern Seiten des Dreiecks heranreicht. Gelangt sie zufällig an die Spitze des Dreiecks, wie die Gerade *da* in beigegebener Figur, so zweifele man nicht, in ihr die Höhe des Dreiecks zu haben. Ihre Länge messe man genau und multipliciere sie mit der Hälfte der Grundlinie, dann ist das Produkt der Inhalt des Dreiecks, und man braucht die Längen der andern Seiten nicht mehr zu suchen.

3. *Geht aber die messende Linie nicht durch die Spitze des Dreiecks, sondern kommt an eine Seite des Dreiecks heran,* wie die Gerade d_1e in der nämlichen Figur, und es sei der Punkt *e* auf der Geraden *ab*, dann ist das Verhältnis von *bc* zu *ab* gleich dem Verhältnis der Geraden d_1e zur Geraden *ad*, weil die beiden Dreiecke *adb*, bd_1e ähnlich sind. Aus dieser Proportion kann man die Länge der Höhe *ad* finden. Genau ebenso würde man vorgehen, wenn die messende Linie an die andere Seite *ac* heranreichte. Mit obigem Instrumente kann man also alle dreieckigen Felder ausmessen, so dass es überflüssig erscheinen dürfte, die Längen aller ihrer Seiten zu bestimmen.

4. *Ist weiter das Feld von vier geraden Seiten begrenzt, so lege man das oben beschriebene Rechteck auf irgend einen Winkel des Feldes.* Sieht man dann, dass die messende Linie auf der Rechteckseite auch auf der Seite des Feldes sich erstreckt, so muss der betreffende Winkel ein rechter sein. Verfährt man in derselben Weise in einer zweiten und einer dritten Ecke, und findet sie alle drei als rechte Winkel, so kann man behaupten, das das fragliche Viereck ein Rechteck ist. Dann sucht man die Länge zweier Seiten, welche einem Winkel anliegen, und multipliciert eine mit der andern, so wird das Produkt den Inhalt des Vierecks ergeben. Wenn man so vorgeht, braucht man also nicht auch die Länge der andern Seiten zu kennen. Hierzu gehört die erste Figur *abcd* (Fig. 74).

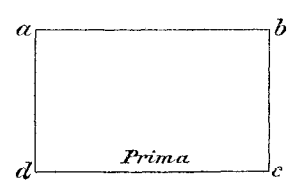


Fig. 74.

5. *Hat das Feld nur zwei rechte Winkel an derselben Seite,* wie in

habuerit, quemadmodum in hoc secundo quadrilatero *abcd* (Fig. 75) cuius duos angulos *c*, *d* super duos terminos lineae *cd* locatos rectos, reliquos vero nequaquam rectos esse didicimus, eius latus *cd* metire, et, quod invenies, in lineae *ca* dimidium, post hoc in dimidium lineae *db*, quae super duos rectos angulos eriguntur, multiplica, indeque collectum istius quadrilateri embadum fore iudicabis, nec te lateris *ab* quantitatem tunc oportebit addiscere.

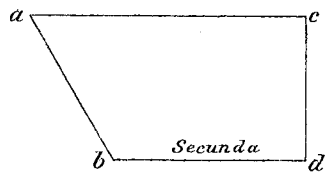


Fig. 75.

6. *Si duo item anguli sibimet oppositi normales exstiterint,* ut in quadrilatero *abcd* (Fig. 76) tertio, cuius duo tantum anguli *c*, *b*, qui per diametrum sibimet invicem opponuntur, recti, reliqui vero *a*, *d* diversi eliciuntur (eorum etenim alter oxigonius, alter ampligonius iudicetur), ebetem, inquam, angulum, qui est *d*, sumens ei angulum praedicti quadrilateri rectianguli superpone. Quo facto mensurandi lineam in directo eiusdem recti anguli protrahe, et manifestum est, eam intra campi aream, et non extra cadere, pervenietque ad lineam *ab*, et eam in duo secabit, eritque punctus sectionis punctus *e*. Nascetur igitur quadrilaterum *aced*, cuius duo recti anguli super idem latus *dc* constituentur, assimiliabiturque quadrilatero *abcd* secundo, quapropter eius embadum, quemadmodum in ipso eadem secundo docuimus, inquires. Remanebit trigonus orthogonius *deb,* cuius embadum ex multiplicatione lineae *eb* in dimidium lineae *bd* dignosces, et haec est figura.

7. *At si campus unum tantum normalem angulum, reliquos vero diversos habuerit,* ut in quadrilatero *abcd* quarto (Fig. 77), cuius solus angulus *c* est rectus, alii vero se ab invicem diversificantur. Cum enim impossibile sit, eos omnes acutos existere, erit eorum unus ebes, sitque in hoc quadrilatero ebes angulus punctus *d*. Ab hoc, inquam, ebete angulo *d*, si quandam rectam ⟨lineam secundum rectum angulum, quemadmodum in tertia figura monstravimus⟩ protraxeris, infra quadrilateri ambitum incidet, et usque ad latus sibi oppositum, ut linea *de*, perveniet formabitque quadrilaterum *aecd*, cuius duo anguli super idem latus locati normales nuncupantur. Huius itaque quadrilateri aream, sicut docuimus, investiga, remanebitque triangulus *deb* sicut in tertia figura, licet non orthogonius, cuius embadum, velut supra mon|stravimus, inquires et invenies, 37′
et haec est figura.

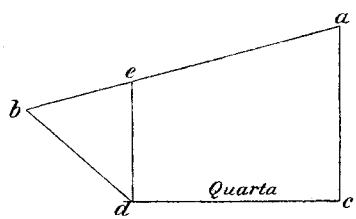


Fig 77.

---

4 linea. — 30—32 lineam . . . monstravimus *in A auf dem Rande ausradiert.*

dem zweiten Viereck *abcd* (Fig. 75), und wissen wir, dass die beiden Winkel *c*, *d*, die an den beiden Endpunkten der Geraden *cd* liegen, rechte, die beiden andern aber keineswegs rechte sind, dann messe man die Seite *cd* und multipliciere das Gefundene mit der Hälfte der Seite *ca*, darauf mit der Hälfte der Seite *db*, die unter rechtem Winkel gezogen sind. Die Summe der Produkte wird dann der Inhalt des Vierecks sein, und man braucht also die Länge der Seite *ab* nicht zu suchen.

6. *Wenn ebenso zwei sich gegenüberliegende Winkel rechte sind,* wie im dritten Viereck *abcd* (Fig. 76), von dem nur die beiden Winkel *c*, *b*, die sich in der Diagonale gegenüberliegen, rechte sind, die beiden andern aber *a*, *d* als verschieden erfunden werden, denn der eine ist ein spitzer, der andere ein stumpfer, so nehme man den stumpfen Winkel, der *d* sei, und lege auf ihn den Winkel des genannten Rechtecks. Dann verlängere man die Messlinie des rechten Winkels direkt, und es ist klar, dass diese Verlängerung in die Fläche des Feldes und nicht ausserhalb fallen muss, und zur Geraden *ab* gelangen und sie in zwei Stücke schneiden wird. Der Theilpunkt sei der Punkt *e*. Es entsteht so das Viereck *aecd*, für welches zwei rechte Winkel an derselben Seite *dc* gebildet sind, und es gleicht dem zweiten Vierecke *abcd*. Man sucht also seinen Inhalt, wie wir für das zweite Viereck gelehrt haben. Es bleibt das rechtwinklige Dreieck *deb* übrig, dessen Inhalt man durch Multiplikation der Geraden *eb* mit der Hälfte der Geraden *bd* erkennt, und das ist die Figur.

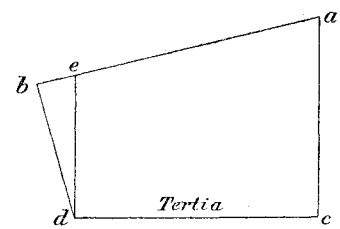


Fig. 76.

7. *Hat aber das Feld nur einen rechten Winkel, die übrigen aber ungleich,* wie im vierten Vierecke *abcd* (Fig. 77), von dem nur der Winkel *c* ein rechter ist, die drei andern aber unter sich verschieden, so muss, da es nämlich unmöglich ist, dass alle drei spitz sind, einer ein stumpfer sein, und es sei in diesem Vierecke der stumpfe Winkel am Punkte *d*. Wenn man, sage ich, von diesem stumpfen Winkel aus eine gerade Linie unter rechtem Winkel zieht, wie wir in der dritten Figur gezeigt haben, so wird sie innerhalb der Fläche des Vierecks fallen und bis zur Gegenseite, wie die Gerade *de*, gelangen. Sie bildet dann das Viereck *aecd*, von dem zwei Winkel an derselben Seite rechte genannt werden. Den Inhalt dieses Vierecks sucht man also so, wie wir es gelehrt haben, und es bleibt das Dreieck *deb* wie in der dritten Figur übrig, wenn auch kein rechtwinkliges. Seinen Inhalt sucht und findet man, wie wir oben gezeigt haben, und das ist die Figur.

8. *Item quadrilaterum etiam, in quo nullus rectus angulus habetur multiformiter describitur, et universaliter, qui sic describuntur, unum vel plures ebetes angulos continebunt.* Non est enim possibile, ut quadrilaterum constituatur, in quo rectus vel obtusus angulus non invenietur. Modus autem eorum areas investigandi unus est et idem. Nam cum perpendiculari linea super ebetem scilicet angulum erecta areas invenies. Descripto itaque quadrilatero *abcd* (Fig. 78) quinto, ebes angulus *c* super lineam *cd* construatur, perpendicularis vero linea *ce* dirigatur, et si angulus *d*, qui super eandem *cd* lineam continetur, obtusus fuerit, aliam perpendicularem *df* supra punctum *d* constituens in tres partes, quae sunt quadrilaterum *cfed*, et duo trianguli *ace*, *dfb*, totum quadrilaterum partieris, ut in subscripta quinta figura monstratur.

9. *Quod si angulus d obtusus non fuerit,* ut in sexto quadrilatero *abcd* (Fig. 79) declaratur, a puncto *d* versus punctum *c* recedens alium perpendicularem super linea *cd* a puncto *f* usque ad punctum *b* vel ad alium punctum lineae *bd* producas, et si perpendicularis ad punctum *b*, sicut linea *fb* pervenitur, quadrilaterum in duos triangulos *ace*, *bfd* et unum quadrilaterum *cbef*, velut supra, dividetur.

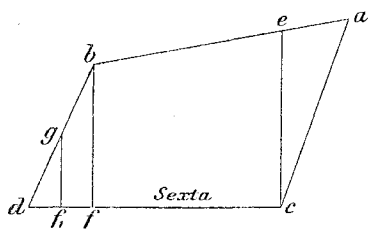


Fig. 79.

10. *At si perpendicularis ad punctum b nullatenus pervenire poterit,* ad alium lineae *bd* punctum, ut linea f_1g in hac eadem sexta figura, producetur, et manifestum est, quod proportio lineae *dg* ad lineam *db* est ut proportio perpendicularis gf_1 ad perpendicularem *fb*. Hac itaque proportione perpendicularis *fb* summam veraciter investigare poteris, eo ⟨quod⟩ trium linearum *dg*, *db*, f_1g, quantitas est nota. Hac igitur perpendiculari cognita quadrilaterum in tria, quemadmodum supra diximus dividetur. Et si duos perpendiculares sibimet invicem aequales inveneris, duas lineas *ab*, *cd* subalternas esse non dubites. Post haec unam ex perpendicularibus in dimidium duorum laterum, quae sunt *ab*, *cd*, multiplica, et quod fuerit, erit totius quadrilateri embadum.

11. *Quod si duo perpendiculares, ut in quinto quadrilatero abcd, inaequales exstiterint,* dimidium utriusque perpendicularis *ce*, *bf* in totam lineam *cd*, supra quam eriguntur, multiplica, indeque collectum erit quadrilateri *cebd* embadum. Demum duorum triangulorum *ace*, *bfd* areas inquire, et quod fuerit, embado quadrilateri *cefd* superadde, indeque coadunatum totius quinti quadrilateri *abcd* aream constituet.

---

5 investigandi investigandi *A.* — lineam. — 26 poterit. — quod *fehlt.*

8. *Ein Viereck, in welchem kein Winkel ein rechter ist, kann vielerlei Gestalten haben, und alle, die so gezeichnet werden, haben allgemein einen oder mehrere stumpfe Winkel.* Es ist nämlich nicht möglich, ein Viereck zu zeichnen, in dem kein rechter oder stumpfer Winkel vorhanden ist. Die Methode aber, deren Inhalt zu bestimmen, ist ein und dieselbe, denn man findet durch im stumpfen Winkel errichtete Senkrechte den Flächeninhalt. Hat man also das fünfte Viereck *abcd* (Fig. 78) beschrieben,

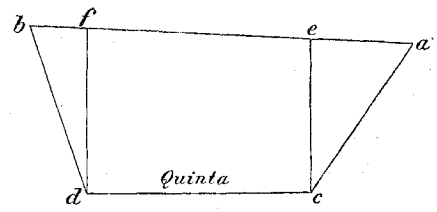


Fig. 78.

und sei der stumpfe Winkel *c* an der Seite *cd* konstruiert und die Senkrechte *ce* errichtet. Ist dann der Winkel *d*, welcher an derselben Seite *cd* liegt, auch stumpf, so wird durch Errichtung einer zweiten Senkrechten *df* im Punkte *d* das ganze Viereck in drei Theile zerschnitten, nämlich in das Viereck *cfed* und die beiden Dreiecke *ace*, *dfb*, wie die beigegebene fünfte Figur zeigt.

9. *Ist aber der Winkel d nicht stumpf,* wie im sechsten Vierecke *abcd* (Fig. 79) gezeichnet ist, so errichtet man, indem man von *d* nach *c* zurückgeht, ein anderes Loth auf der Geraden *cd* im Punkte *f* bis zum Punkte *b* oder bis zu einem andern Punkte der Geraden *bd*. Erreicht das Loth den Punkt *b*, wie die Gerade *fb*, so ist das Viereck in die beiden Dreiecke *ace*, *bfd* und ein Viereck *cbef* wie oben zerschnitten.

10. *Wenn aber das Loth nicht den Punkt b erreicht,* so führe man es bis zu einem andern Punkte der Geraden *bd*, wie die Gerade f_1g in der nämlichen sechsten Figur. Dann ist klar, dass das Verhältnis der Geraden *dg* zur Geraden *db* gleich dem Verhältnis des Lothes gf_1 zu dem Lothe *fb* ist. Durch diese Proportion kann man also die genaue Länge des Lothes *fb* bestimmen, weil die Grösse der drei Strecken *dg*, *db*, f_1g bekannt ist. Hat man diese Senkrechte gefunden, so ist dadurch das Viereck in drei Stücke wie oben getheilt. Findet man dabei die beiden Lothe einander gleich, so müssen die beiden Geraden *ab*, *cd* parallel sein. Dann multipliciert man eines der beiden Lothe mit der halben Summe der beiden Seiten *ab*, *cd*, und das Ergebnis ist der Inhalt des ganzen Vierecks.

11. *Sind aber die beiden Lothe, wie im fünften Viereck abcd, ungleich,* so multipliciere man die Hälfte jedes der beiden Lothe *ce*, *bf* mit der ganzen Länge *cd*, auf der sie errichtet sind, dann ist die Summe der Produkte der Inhalt des Vierecks *cebd*. Man suche darauf die Inhalte der beiden Dreiecke *ace*, *fbd* und addiere das Ergebnis zum Inhalte des Vierecks *cefd*, dann wird die Summe den Gesamtinhalt des fünften Vierecks *abcd* darstellen.

12. *Item si duo perpendiculares in sexto, secundo scilicet quadrilatero,* | *quadrilatero abcd, similiter inaequales fuerint,* longiorem perpendicularem 37′ in dimidium lineae *cf* multiplica (Fig. 80). Quo facto breviorem perpendicularem in dimidium totius lineae *cd* item multiplica, quodque ex utraque multiplicatione colligitur, erit quadrilateri *ecbd* area. Post haec residui trianguli *aec* embadum diligenter inquire, et quod inveneris, quadrilateri embado superaddens, totius quadrilateri *abcd* aream invenies.

13. Ostensum est igitur, qualiter omnium triangulorum et quadrilaterorum areas invenies. Verum *si campus multilatera figura fuerit, ut pentagonum vel exagonum aliaeve figurae multiangulae,* eam in triangulares quadrilaterasve figuras partire, et tunc in earum arearum cognitione, quemadmodum ostendimus, operare. Quia vero circulares figurae earumque fractiones rarissime reperiuntur, qualiter ad ipsarum cognitionem perveniamus, reticendum censuimus. Illud tamen, quod in hoc eodem libro superius inde monstravimus, satis sufficere ad hoc non dubitetur.

Finit liber embadorum a Savasorda *Iudaeo in ebraico compositus et a* Platone Tiburtino *in latinum sermonem translatus anno Arabum DX mense saphar, die XV eiusdem mensis, hora tertia, Sole in XX gradu et XV minuto Leonis, Luna in XII gradu et XX minuto Piscium, Saturno in VIII gradu et LVII minuto Tauri, Iove in Arietis XXVI gradu et LII minuto, Marte in Libra XXVII. XV, Venere in Libra II. XXVIIII, Mercurio in Leone XIIII. XLV, Capite in Cancro O. I, Cauda in Capricorno O. I.*

---

4 item] iterum *B.* — 5 quadrilaterum *A.* — 7 superaddes. — 16 Finis. — 18 ora *A.* — 22 Cancro t. I. — Capricorno t. I. *Der Buchstaben* t *war im XII. Jahrhundert eine Form für die Null, besonders in astronomischen Tabellen, als Abkürzung von* teca, *einem der vielfachen Namen für Null. Der Abschreiber des XV. Jahrhundert wusste das nicht mehr und schrieb deshalb gedankenlos auch das* t *mit ab.*

12. *Wenn ebenso zweitens die beiden Lothe im sechsten Vierecke abcd ungleich sind,* so multipliciere man die längere Senkrechte mit der Hälfte der Geraden *cf* (Fig. 80), darauf vervielfache man auch das kleinere Loth mit der Hälfte der ganzen Geraden *cd* und die Summe beider Produkte ist dann der Inhalt des Vierecks *ecbd.* Dann suche man den Inhalt des Restdreiecks *aec* und addiere das Ergebnis zu dem Inhalte des Vierecks, so findet man den Gesamtinhalt des Vierecks *abcd.*

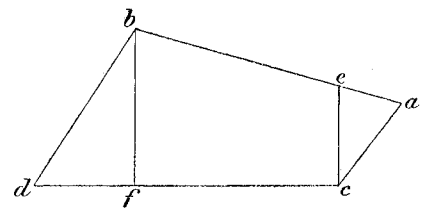


Fig. 80.

13. Hiermit ist gezeigt, wie man die Flächeninhalte aller Dreiecke oder Vierecke bestimmen kann. *Ist aber das Feld von vieleckiger Gestalt, etwa ein Fünfeck oder ein Sechseck oder ein anderes Vieleck,* so zerschneide man es in dreieckige oder viereckige Figuren und gehe dann mit ihrer Bestimmung vor, wie wir es oben gezeigt haben. Da man aber kreisförmige Felder oder dergleichen Abschnitte sehr selten findet, haben wir die Art, wie man zu ihrer Kenntnis gelangt, geglaubt verschweigen zu dürfen. Das aber, was wir in diesem Buche darüber weiter oben auseinandergesetzt haben, ist sicherlich dazu mehr als genügend.

Hier endet der Liber Embadorum, der von dem Juden Savasorda *in hebräischer Sprache verfasst und von* Plato von Tivoli *in das Lateinische übertragen ist, im Jahre DX der Araber, am XV. Tage des Monats Saphar, um die dritte Stunde, während die Sonne in 20° 15′ des Löwen verweilte, der Mond in 12° 20′ der Fische, Saturn in 8° 57′ des Stiers, Jupiter in 27° 52′ des Widders, Mars in 27° 15′ der Waage, Venus in 2° 29′ der Waage, Merkur in 14° 45′ des Löwen, der Drachenkopf in 0° 1′ des Krebses, der Drachenschwanz in 0° 1′ des Steinbocks.*

II.

DER BRIEFWECHSEL REGIOMONTAN'S MIT GIOVANNI BIANCHINI, JACOB VON SPEIER UND CHRISTIAN RODER.

Der Briefwechsel Regiomontan's mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder.

Einleitung.

Die nachfolgenden Briefe und dazugehörigen Rechnungen sind in einem Quarthefte enthalten, das die Stadtbibliothek zu Nürnberg aufbewahrt. Dasselbe hat die Bezeichnung: *Msc. Cent. V. No. 56c* und besteht aus 74 Blättern, welche unten mit rother Tinte von 1—74 bezeichnet sind. Eine frühere Paginierung, die, wie ich zeigen werde, von Regiomontan selbst herrührt, geht von 11—83, und beweist so, dass von dem ursprünglichen Bestande die ersten 10 Blätter verloren gegangen sind. Auf der Innenseite des vordern Umschlages ist von neuer Hand Folgendes geschrieben:

„Eigenhändige Briefe des Joh. Regiomontanus (auch Germanus genannt) und Antworten darauf. Nämlich

S. 11. Brief des Joh. Blanchini, Mathematikers in Ferrara, an Regiomontan.

S. 17. Brief des Regiomontan an Blanchini.

S. 41. Brief des Blanchini an Regiomontan.

S. 47. Brief des Regiomontan an Blanchini.

S. 59. Brief des Regiomontan an Jacob de Spira, Astronom des Grafen von Urbino.

S. 64. Antwort des Spira an Regiomontan.

S. 67. Brief des Regiomontan an Spira.

S. 76. Brief des Regiomontan an Christ. Roder, Mathem. in Erfurt.

Die ersten 10 Seiten fehlen.

St. 40 ist verbunden.“

Ebenso steht auf dem Rücken des Bandes:

„Regiomontani, Ioann. Blanchini et Iacobi Spirensis
Epistolae autographae.“

Der Band ist 22 cm hoch, $15\frac{1}{2}$ cm breit.

In der obigen Inhaltsangabe ist nicht aufgeführt, dass Blatt 19 bis 30 der obigen Bezifferung eine grosse Zahl Rechnungen, die Auflösungen der von Bianchini, Regiomontan und Jacob von Speier gestellten Aufgaben, enthält. Sie hat man offenbar als zu dem Briefe Regiomontan's an Bianchini, der Blatt 17 beginnt, gehörig angesehen. Es ist überhaupt die ganze Beschreibung irreleitend.

Der wirkliche Inhalt ist folgendermaassen vertheilt:

Blatt 11r—15r: Brief Bianchini's an Regiomontan d. d. *Ex Fossanova Sancti Gillii Die XXI° Novembris 1463.* — Antwort auf den in ihn eingehefteten folgenden Brief Regiomontan's.

Blatt 15v und 16 sind leer.

Blatt 17r—18v: Brief Regiomontan's an Bianchini d. d. *Ex Sancto Georgio in Venetiis die XXVII. Julii anno LXIII°.*

Blatt 19r—20v: Rechnungen zu diesem Briefe gehörig.

Blatt 21r—28v, col. 2: Rechnungen zu den drei folgenden Briefen zwischen Regiomontan und Bianchini.

Blatt 28v, col. 3 — 30v: Rechnungen zu dem Briefwechsel mit Jacob von Speier.

Blatt 31—34 sind leer.

Blatt 35r—40r: Brief Regiomontan's an Bianchini. Ohne Datum.

Blatt 40v ist leer.

Blatt 41r—46v: Brief Bianchini's an Regiomontan d. d. *Ex Ferraria die V^to^ februarii 1464 hora 3^a^ noctis* (Blatt 46r leer, 46v die Aufschrift des Briefes).

Blatt 47r—59r: Brief Regiomontan's an Bianchini ohne Datum, aber sicher aus 1464. Unmittelbar anschliessend.

Blatt 59r—63r: Brief Regiomontan's an Jacobus Spirensis d. d. *Ex Roma die 15 februarii anno 1465°.*

Blatt 64r—67b: Brief Jacob's von Speier an Regiomontan d. d. *Ex Urbino 6^a^ Aprilis 1465* (Blatt 67r leer, auf 67b nur die Adresse, das Siegel abgefallen).

Blatt 68r—73r: Brief Regiomontan's an Jacob von Speier *Apud Balneas Viterbienses die* (so!).

Blatt 73v, 74 und 75 leer.

Blatt 76r—82v: Brief Regiomontan's an Christian Roder d. d. *Ex Nuremberga die 4 Iulii anno Christi 1471.*

Auf Blatt 83r steht die Notiz: *δὲ τόν χριςτανὸν ἐρφορδιαίον.*

Die Handschrift Regiomontan's und Jacob's von Speier ist sehr leicht lesbar, dagegen befleissigt sich Bianchini einer sehr schlechten Schrift.

Der Briefwechsel ist schon einmal herausgegeben worden.

In dem Buche: Christophori Theophili de Murr *Memorabilia Bibliothecarum Publicarum Norimbergensium et Universitatis Altorfinae. Pars I. Cum VIII Tabulis Aeneis. Norimbergae, Sumptibus Iohannis Holschii. M.DCC.LXXXVI.* umfasst diese Ausgabe S. 74—205. Sie ist jedoch nicht vollständig. In den beiden ersten Briefen sind lange Abschnitte weggelassen. Ausserdem aber sind alle Rechnungen, welche Regiomontan über seine Aufgaben und die seiner Korrespondenten geführt hat, nicht mit aufgenommen. de Murr hat auch viele Abkürzungen nicht verstanden. So löst er $\widetilde{qn}$ = *quando* stets mit *quum* auf, einer Form dieses Wortes, die zu Regiomontan's Zeiten überhaupt nicht bekannt war. Ebenso heisst bei ihm $\widetilde{qm}$ = *quoniam* immer *quum*. *Scilicet* hat er fast immer, wo es als Kompendium geschrieben ist, mit *seu* wiedergegeben u. dgl. mehr.

In dem ersten Briefe Bianchini's hat er die Orthographie dieses Mannes vollständig verändert. Bianchini schreibt in diesem stets nach italienischer Art mit verdoppeltem Konsonanten, also z. B. *subtilli* statt *subtili, ellapsis* für *elapsis,* selbst *Cardinallis* für *Cardinalis:* alle diese Eigenthümlichkeiten sind verwischt, und der Brief ist in der Orthographie des 18. Jahrhunderts abgedruckt worden. Wie oft durch falsche Lesung der Sinn der Worte unverständlich geworden ist, eine gestellte Aufgabe oft einen ganz andern Sinn erhält, als Regiomontan es beabsichtigt hat, wird man bei einer Vergleichung unseres Textes mit dem de Murr's leicht finden. Seine Abweichungen von dem hier folgenden Wortlaute unter dem Texte anzugeben habe ich aber für überflüssig gehalten, da sie ja nur auf falscher Lesung der Originalhandschrift beruhen.

Die hier zum ersten Male veröffentlichten Originalrechnungen Regiomontan's dürften von hohem Interesse sein. Sie geben Beispiele zu seinen *libri quinque de Triangulis,* zeigen aber auch, dass er im vollen Besitze der Algebra gewesen ist.

Die Anordnung der Gleichungsauflösung ist dabei völlig modern und entbehrt selbst des Gleichheitszeichens nicht, für das er einen längern Horizontalstrich verwendet. Die Bezeichnungen für die Unbekannte und deren Quadrat sind $\mathfrak{z}$ = *res* und $\mathfrak{c}$ = *census,* die für *res* geht manchmal selbst in eine solche über, dass man sie für x halten könnte. Dass er auch das Restproblem, die Regel Ta-yen der Chinesen, vollständig beherrschte, sowie unbestimmte Gleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten zu lösen verstand, ist ebenfalls aus dem Briefwechsel klar; ob er die unbestimmten Diophantischen Aufgaben zweiten Grades, welche er seinen

Korrespondenten stellt, mehr als durch Probieren lösen konnte, ist zweifelhaft, aber nicht ganz unmöglich. Auch unter den geometrischen und stereometrischen Aufgaben und denen aus der Mechanik sind manche höchst beachtenswerthe. Ich mache darunter nur aufmerksam auf die beiden Maximumaufgaben, die Aufgabe über die Entfernung der Mittelpunkte des ein- und umbeschriebenen Kreises eines Dreiecks, diejenige über die schiefe Ebene, vor allem aber auf die Behandlung der Aufgabe, in einen gegebenen Kreis ein Sehnenviereck einzubeschreiben, dessen Seiten in gegebener Proportion stehen. Ich habe an der betreffenden Stelle den Gedankengang Regiomontan's klar zu legen gesucht.

Soweit es mir möglich war, habe ich durch Anmerkungen den Briefwechsel sowohl, als die uns aufbewahrten Rechnungen völlig zu erklären gesucht. Die Vergleiche der in den Rechnungen benutzten Sinus mit einer gedruckten Sinustafel des Regiomontan ist mit der den *Tabulae directionum profectionumque* angehängten Tafel gemacht worden, derjenigen, welcher sich zu damaliger Zeit der Verfasser allein bedienen konnte.

Giovanni Bianchini war Hofastronom des Herzogs von Ferrara. Weder das Geburts- noch das Todesdatum ist bekannt. Jacob von Speier war in ähnlicher Weise Hofastrolog des Fürsten von Urbino. Sonst ist über seine Lebensumstände überhaupt nichts bekannt. Christian Roder endlich war Professor der Mathematik an der Universität Erfurt. Er stammte aus Hamburg und war in dem Jahre, in dem Regiomontan an ihn sich wendete, Rektor dieser Hochschule. 1463 war er Dekan der Artistenfakultät: *Factum est A. 1463 Examen 80 Magistrorum sub Decano M. Christiano Roder de Hambork in Quadragesima* citiert Doppelmayr in seinem Werke über die Nürnbergischen Mathematiker und Künstler S. 6, Note hh nach der *Matricula sive Catalogo Universitatis Erfordiensis A. 1463.* Aus dem Briefe Regiomontan's selbst geht hervor, dass Roder auch Die Amplonianische Büchersammlung zu verwalten hatte. Weitere Notizen über ihn besitze ich nicht.

In Bezug auf die Anordnung der Rechnungen bemerke ich schliesslich noch, dass die bei mir den Zahlen nebengeschriebenen Bedeutungen derselben bei Regiomontan unter diese gesetzt sind, weil er die Quartseite in je vier Kolonnen getheilt hat, so dass neben denselben der Platz gemangelt hätte. Wenn ich z. B. habe drucken lassen:

$$\overline{23} \cdot 33' 30'' \text{ arcus } hz; \quad 23\,881 \text{ sinus } hz,$$

so sind diese beiden Angaben ebenfalls nicht neben- sondern untereinander angeordnet. Ich glaubte der bessern Übersicht halber so verfahren zu sollen, wie ich es gethan habe. Dass auch die Multiplikationen und Divi-

sionen sowie die Wurzelausziehungen nicht, wie bei mir vielfach geschehen ist, nebeneinander sondern untereinander bei Regiomontan angeordnet sind, brauche ich wohl nicht erst zu sagen. Die algebraischen Rechnungen aber sind so angeordnet, wie ich sie habe abdrucken lassen.

Auch hier eine deutsche Übersetzung beizugeben, hielt ich für inoportun. Sie würde gegen die Frische und Originalität der Briefe selbst so sehr abstechen, dass sie den Eindruck derselben sehr abschwächen würde, ohne dass sie das Verständnis beträchtlich beeinflussen könnte.

I.

Regiomontan an Giovanni Bianchini.

17 (7)[a] | Ad Io. Blanchinum Ferrariensem.

Non mireris, vir optime, si tardius, quam oportuerit, tue interrogationi respondeam. Quid enim moram hanc peperit, prius paucis dabo, deinde vero problema tuum pulcrum et subtile solvere conabor. Magistro Christophoro[1]), virtutum tuarum clamatori et sedulo predicatori, forte uno die obviam venio Rome domum iturus. Is ubi me vidit, salutem optat et interrogationem tuam in cartula offert. Accipio eam ita, ut decuit, hilari animo digna cum reverentia, tanquam indicium tue erga me benivolentie atque fiducie; lego eam et polliceor me responsurum, tametsi ingentem pre se ferret difficultatem. Quis enim tam magistrali interrogato satisfaciet, nisi magnam astronomie partem transcurrat? Discedo igitur a Magistro Christoforo, et domum veniens mox rationibus astronomicis incumbo, ut nodum hunc tuum tam subtilem quam implicatum resolvam. Nihil gratia dei occurrit, quod antehac non decies aut amplius contrectaverim. Responsione itaque exacta reliquum erat, ut epistolam quoque ad te super hac re scriberem. Sed nocte superveniente prohibeor, nam et punctatio problematis tui admodum serotina erat. Die ergo sequenti de more dominum meum Reverendissimum[2]) ad palatium Pape cum carioris suis cappellanis comitor, cumque ibi, ut assolet, operirer, insperato dominus meus pronunciatur legatus ad Venetias. Arbitrabar igitur, cum ad Venetias eundum est cum domino meo, ad Ferrariam etiam me venturum, et non modo litteris, sed et ore tibi responsurum. Cupiebat preterea dominus meus Reverendissimus te, tantum philosophum, videre, nam antehac fama solum et testimonio meo creberrimo te cognovit. Sed in itinere rumor venit, pestem invasisse civitatem, quamobrem preterire decrevit dominus meus Reverendissimus.

---

1) Später von Bianchini als Christophorus Briscensis erwähnt, was doch wohl „*aus Brescia*“ heissen soll.

2) Gemeint ist Kardinal Bessarion, bei dem Regiomontan als Sekretär bedienstet war.

Igitur, etsi non e Roma neque in Ferraria, ex Venetiis tamen, que me nunc tenent, responsum accipias meum, quod si bene se habeat, iudicio tuo relinquetur. Nam in hisce rebus tibi cedere non modo non pudet, verum etiam glorie datur, tantum habere preceptorem. Erat autem interragotionis tue tenor ille.

| Die V^to^ Aprilis 1463 nocte sequenti hora 2 minuto 25to horologii, dum quedam stella mihi ignota esset in linea meridiana, Ferrarie, cuius latitudo est gradus 44 minuta 45 secunda 4, longitudo vero ab occidente habitato gradus 32, accepi ipsius altitudinem ab orizonte, et ipsam inveni gr. 39 mi^ta^ 16: quero autem locum ipsius stelle in zodiaco tam per longitudinem quam per latitudinem ab ecliptica, nec non arcum diurnum ipsius, seu moram ipsius supra terram. 17(7)[b]

Respondendo sic procedo. Datus est mihi quintus dies Aprilis anni 1463[i] currentis cum ceteris ad hanc rem necessariis, ad cuius meridiem invenio motum Solis verum $0 \cdot \overline{24} \cdot 10' \cdot 8''$, declinationem eius septemtrionalem gradus 9 minuta 25 fere. Utor enim declinatione maxima Solis usitata $\overline{23} \cdot 33' \cdot 30''$, unde et propter latitudinem notam cocludo dimidium argumentum diei huius super diem equalem esse gradibus quidem equinoctialibus $\overline{9} \cdot 28'$, in tempore autem minuta 38 unius hore equalis. Tempus igitur semidiurnum est hore 6 minute 38. Cumque instans considerationis tue fuerit horis duabus minutis 25 horologii peractis, videlicet ab occasu, additis eis ad tempus semidiurnum colliguntur hore 9 minuta 3, et hoc tempore a meridie computato fuit consideratio tua. Est autem motus Solis verus in tanto tempore minuta 22 secunda 1, quare ad tempus considerationis verus motus Solis est $0 \cdot \overline{24} \cdot 32' \cdot 9''$. Ex loco itaque Solis et distantia eius a meridiano cognitis medium celum constat punctus videlicet et terminans gradus 6 et minuta 41 de Virgine. Stella igitur tua mediabat celum cum $\overline{6} \cdot 41'$ Virginis. Subtraho deinde $\overline{39} \cdot 16'$ altitudinis stelle meridiane ab altitudine equinoctialis, quam oportet esse propter tuam ypothesim $\overline{45} \cdot 14' \cdot 56''$; manet $\overline{5} \cdot 58' \cdot 56''$, et tanta est huius stelle declinatio meridionalis. Habito igitur principio mediatoris celi et declinatione huius stelle, videor esse perductus ad hoc problema: Dato puncto, in quo stella quevis celum mediat, declinatione quoque eius perspecta locum eius verum in ecliptica latitudinemque ab eadem et cetera perspicere. Quod quidem et pluribus quam talibus viis solvendi sit potestas, inpresentiarum tamen vestigiis Ptolemei clarissimi adherebo, per figuram sectoris videlicet, quicquid vincto opus est, enitendo.

| Revera hic primum apparet interrogati tui profunda subtilitas. Nam quocumque pacto figuram aptaverim, quatuor dumtaxat quantitates note occurrant. Oportet autem frequenter, quemadmodum perfectissime novisti, 18(8)[a]

quinque earum notas haberi, si sextam suscitari voluerimus cognitam. Sed hoc non obstante auxilio venit mihi conclusio quedam Ptolemei in capitulo 12° dictionis prime, cuius hec est intentio. Si arcus quidam in duos secetur, fueritque proportio sinus unius arcus ad sinum alterius sectionum rogata, reliquumque partialis arcus datus, totus quoque arcus et inde ambe sectiones inde nascentur.[1]) Mallem profecto tibi ostendere figurationem et numeros, quos hac in re notatos habui, quam multa tamquam somnia litteris intimare. Ut igitur ad metam provehamur, ne longis ambagibus detinearis, ex datis numeris, quos supra rememoravi, et conclusis meis dico stellam quidem esse in gradibus 12 minutis 25 Virginis, latitudinem autem habere meredionalem g̃ 13 m̃ 59. Tandem quoque arcum diurnum ipsius g̃ 168 m̃ 4 reperio.

Videor itaque interrogato tuo satis respondisse. Nunc reliquum est, ut id examines. Examinabis autem multo facilius, quam ego responderim, quod si differentiam a vero offenderis in minuto uno aut duobus, sciet sagacitas tua, multitudine numerorum sese multiplicantium atque dividentium id accidere debuisse. Nam in divisionibus rarissime tollitur totus dividendus, unde et multiplicationes, si que fiunt per numeros quotientes, deficere aut abundare necesse est; sed et in arcubus per sinum et e converso reperiendis nonnumquam a vero receditur. Hec et alia non dubito in excusationem meam, si opus fuerit, accomodabis. Vellem brevius dixisse, si res ipsa sineret. Si quid igitur superfluum te offenderit, pro modestia tua equo animo laturum te supplico. Hoc postremum unum oro, ut quam citius poteris, litteras tuas desideratissimas ad me mittas ea cum lege, ut fama virtutum tuarum me comparabis predicatorem, atque ut materia ad me scribendi habeas propono tibi cum omni reverentia quedam problemata atque interrogata, ad que digneris aliquid respondere. Nihil autem eorum ab interrogatu tuo alienum est; omnia enim de stellis finis et earum passionibus sonant. Postea vero quam videbo litteras tuas, de aliis rebus novis atque predictis, quas fortasse vidisse olim iuvabit, disseremus.

18(8)[b] | 1. Est quedam stella in medietate zodiaci descendentis, videlicet qui est inter caput Cancri per Libram et caput Capricorni, cuius declinatio septemtrionalis est g̃r 35 mi[ta] 17, latitudo autem septemtrionalis g̃r 20 minuta 49: quero locum eius verum in ecliptica, et cum quo puncto eius celum

---

1) Regiomontan dürfte die Übersetzung des Gherardo Cremonese benutzt haben. In der Ausgabe *Venetiis* Peter Lichtenstein *1515* steht der betreffende Satz auf Blatt 10[a], l. 6—13. In der Heiberg'schen Ausgabe steht er S. 73, 11 u. ff. Freilich kannte Regiomontan auch das griechische Original, das Peurbach und er ja auf Anregung Bessarions übersetzen sollten.

mediet. Suppono autem declinationem Solis maximam g̃ 23 mi^{ta} 30, quemadmodum nostro tempore per instrumenta deprehenditur.

2. Est quedam stella in g̃ 9 minutis 15 Leonis solita mediare celum cum g̃ 20 mi^{tis} 37 Virginis: quero, quanta sit eius latitudo et quanta declinatio. Facile.[1])

3. Dum irem Venetias hoc anno 1463 in loco, cuius latitudo g̃ 34 mi^{ta} 19, longitudo vero ab occidente habitato g̃ 33 mi^{ta} 48, notavi quandam stellam fixam in nocte, que sequitur diem 17^{m} Iulii, que quidem oriebatur hora tertia minutis 25 noctis, mediabat autem celum hora 7ma minuto 38: quero locum eius in ecliptica, punctum mediationis celi, item declinationem eius et latitudinem.

4. Dum essem in loco, cuius latitudo ignota mihi erat, die 13° Iulii hora tertia noctis, vidi quandam stellam, cuius altitudo ab orizonte erat 39 g̃r, distabat autem a meridiano versus orientem per spatium duarum horarum, itemque ab eodem meridiano per 37 g̃r circuli orizontis, quos vocant gradus azimuth: quero locum huius stelle et latitudinem regionis etc.

5. In Venetiis, quarum latitudinem pono nunc g̃r 45, longitudinem autem ab occidente g̃ 31 mi^{ta} 45, hora tertia mi^{to} 38° noctis, que sequitur diem nonum augusti de anno 1463°, notavi quandam stellam fixam, cuius declinationem septemtrionalem alias deprehendi g̃r 13 mi^{ta} 25, altitudinem autem eius supra orizontem in hac consideratione inveni g̃ 50 et mi^{ta} 19, et erat stella in parte orientali hemispherii: quero locum eius in ecliptica et punctum mediationis celi cum latitudine eius.[2])

Hec pro nunc sufficiant. Habeo enim multa alia de eisdem passionibus stellarum fixarum, que, si velis, posthac transmittam, ne prime littere mee fastidium tibi pariant. Studeo namque quam minimum tibi molestus esse, maxime autem morem gerere atque laudi tue, que plurima habetur, locum dare. Hoc faxis, iterum atque iterum obsecro, tempestivas ad me scribe litteras, sic enim nuncio non parum conplacemur. Domino Magistro Petro Bono[3]) commendatus humiliter esse velim. Vale feliciter mei memor.

Ex Sancto Georgio in Venetiis, die XXVII Iulii anno LXIIj°

Tuus in omnibus

Joannes Germanus, R̸^{mi} d̃ni
Cardinalis Niceni Legati familiaris.

---

1) Diese Bemerkung dürfte wohl in dem wirklich abgesendeten Briefe nicht gestanden haben.

2) In dem Konzepte ist diese Aufgabe nachträglich hinzugefügt und von Bianchini in der später abgedruckten Antwort nicht erwähnt, so dass sie bei der Reinschrift des Briefes wahrscheinlich unterdrückt wurde.

3) Gemeint ist Pietro Buono Avogario, der zu jener Zeit ebenfalls in Ferrara lebte. Vgl. Riccardi, *Bibl. Math. Italiana* I, 61—62.

Es findet sich vollständig durchgerechnet das Beispiel, welches Bianchini an Regiomontan sandte. Diese Rechnungen theile ich hier vollständig mit.

19 (9)[a], col. 1. | Ioannes de Blanchinis querit:

Die quinto Aprilis 1463 nocte sequenti hora 2 minutis 25 horologii, dum quedam stella mihi ignota esset in linea meridiana Ferrarie, cuius latitudo est $\overline{44} \cdot 42' \cdot 4''$, longitudo vero ab occidente habitato gradus 32, accepi ipsius altitudinem ab orizonte, et ipsam inveni $\overline{39} \cdot 16'$: quero autem locum ipsius stelle in zodiaco tam per longitudinem quam per latitudinem ab ecliptica, nec non arcum diurnum ipsius seu moram ipsius supra terram.

$\overline{31} \cdot 30'$	longitudo Vienne
$32 \cdot 0$	longitudo Ferrarie
$0 \cdot 30$	differentia longitudinum
$\overline{19} \cdot 1' \cdot 14''$	
$29 \cdot 31 \cdot 19$	
$28 \cdot 42 \cdot 29$	
$4 \cdot 55 \cdot 42$	
$22 \cdot 10 \cdot 44$	media stella
$\overline{0} \cdot 37' \cdot 7''$	
$4 \cdot 38$	
$5 \cdot 44$	
$2 \cdot 16$	
$0 \cdot 49 \cdot 45$	aux stelle
$21 \cdot 20 \cdot 59$	ortus stelle
$\overline{1} \cdot 59' \cdot 41''$	
$1 \cdot 58 \cdot 52$	
$0 \cdot 49$	
$20 \cdot 52$	
17	pars proportionalis[1])
$1 \cdot 59 \cdot 24$	Ascensio stelle *a*
$0 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 44$	
$0 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 8$	verus motus stelle ad 5^m Aprilis

1) D. i. der 60. Theil von 20′52″.

$\overline{9} \cdot 21' \cdot 20''$
$9 \cdot 43 \cdot 28$
$22 \cdot 8$
$10 \cdot$
$3 \cdot 41$ pars proportionalis a.[1])
$9 \cdot 25 \cdot 1$ declinatio stelle septemtrionalis.

$\overline{44} \cdot 45' \cdot 4''$	latitudo regionis dz;	42242	sinus dz,	col. 2.
$45 \cdot 14 \cdot 56$	complementum latitud. dg;	42610	sinus dg, [2])	
$9 \cdot 25 \cdot 1$	declinatio stelle septemtr. th;	9817	sinus th,	
$80 \cdot 34 \cdot 59$	complem. declinat. hz;	59191	sinus hz (Fig. 1).	

g ⊢——⊣ d	d ⊢——⊣ z	$gd \cdot dz$
t ⊢——⊣ h	h ⊢——⊣ z	$th \cdot hz$
g ⊢——⊣ e	e ⊢——⊣ t	$ge \cdot et$

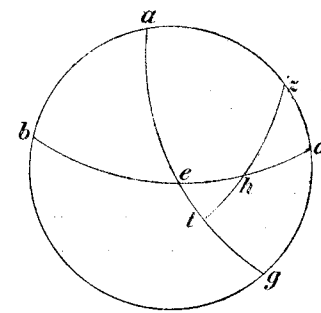


Fig. 1.

	11	
42242	139	
9817	37191	
295694	311742	9
42242	5629249	7
337936	414669714	3
380178	42610000	2
414689714	426111	
	4266	
	42	

	5		
	2467		
	33922		
	1484878		
9732	5192989	9	
60000	132211245	8	
583920000	583920000	6	col. 3.
	59191111	5	
	591999		
	5911		
	59		

1) Der 60. Theil von $22' 8'' \times 10$. 2) Es ist hier jedesmal $\frac{12 \cdot 4}{60} = 1$ gesetzt.

9865 sinus arcus *et*; $\overline{9} \cdot 28'$[1]) arcus *et*, et est dimidium augmentum diei huius ad diem equalem.

$6^{ho} \cdot 38^{ma}$ tempus semidiurnum.

2 · 25

9 · 3 tempus considerationis, ut proponit a meridie computandus.

0 · $\overline{0}$ · 2′ · 26″ motus stelle in hora.

9 · 3 ·

18 · 54

3 · 6

1

22 · 1 motus stelle verus in horis distantie a meridie.

0 · 24 · 10 · 8

22 · 1

0 · 24 · 32 · 9 verus motus stelle hora considerationis.

col. 4. | 112 · 12

113 · 8

30 Pars proportionalis *a*.

112 · 42 Ascensio recta stelle.

9 · 3

15 ·

135 · 45

248 · 27 Ascensio recta medii celi.

247 · 48′

248 · 27

248 · 45

6 · 41 ♍ medium celi

Stella igitur mediabat celum cum $\overline{6} \cdot 41'$ Virginis.

45 · 14′ · 56″

39 · 16 ·

5 · 58 · 56 delinatio huius stelle, et est meridionalis

9 · 21 · 20

8 · 59 · 3

22 · 17

41 ·

13 · 40

1 · 22

14 pars proportionalis *s*.

15 · 16

9 · 6 · 4 declinatio puncti ecliptice, cum que stella ipsa celum mediat.

1) Nach Regiomontan's Tafel ist sie 9°28′ = 9868.

| Sit ah medietas equinoctialis, bd medietas ecliptice, h polus mundi meridionalis, z polus ecliptice, o stella habens declinationem meridionalem oh (Fig. 2). 19 (9)[b], col. 1.

$hz \cdot za$ $\quad$ $az \cdot zh$
$ho \cdot ol$ conversim $lo \cdot oh$
$lk \cdot ka$ $\quad$ $ak \cdot (kl) \cdot x$.

$ak \cdot kl$
$az \cdot zh$
$oh \cdot lo$

Sit ak ad x ut az ad zh; igitur ak ad kl componitur ex duabus, scilicet ak ad x, hoc est az ad zh, et x ad kl, hoc est oh ad lo. Neuter autem arcuum ak et kl notus est, omnes tamen alii quatuor noti sunt. Multiplicabo igitur sinum az in sinum dh, et proveniat p; porro zh in lo, et proveniat s. Constat p ad s proportionem esse | sicut col. 2. sinus ak ad sinum kl, cumque residuus arcus al sit notus, erit consequenter kl notus, et ideo totus arcus ak. Prolixa erit operatio.

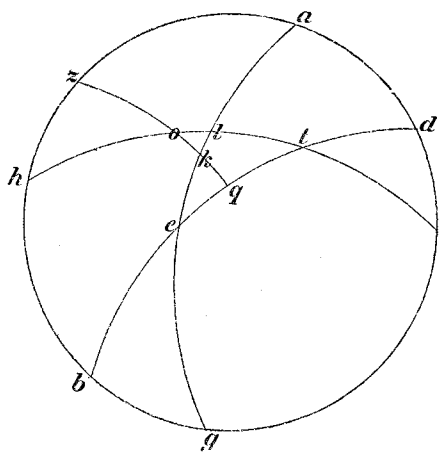


Fig. 2.

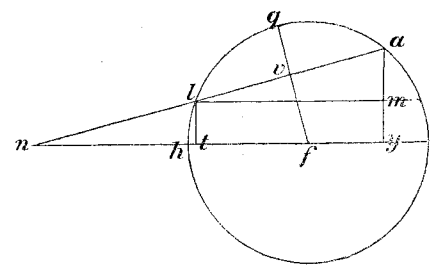


Fig. 3.

$\overline{23} \cdot 33' \cdot 30''$ arcus hz; 23981 sinus hz,
$66 \cdot 26 \cdot 30$ arcus az; 54999 sinus az,
$5 \cdot 58 \cdot 56$ arcus ol; 6253 sinus ol,
$84 \cdot 1 \cdot 4$ arcus ho; 59673 sinus ho.

```
     59673                          23981
     54999                           6253
    ------                          -----
    537057                          71943
   537057                          119905
  238692                           47962
298365                           143886
-----------                      ----------
3281955327 terminus antecedens   149953193 terminus consequens.
 149953193
-----------
3132002134 differentia terminorum, et est linea am (Fig. 3).
```

$\overline{248} \cdot 27'$
$180 \cdot$
$68 \cdot 27$ Arcus *al*

col. 2. | $34 \cdot 13 \cdot 30$ arcus *aq*

33746 sinus *aq*
33746
67492 corda *al.*

3132002134 · 149953193
67492

149953193	1	
67492	41 17	
299906386	19524 4781	
1349578737	7283725932	3
599812772	18342346191 32	2
1049672351	10120640901956	3
899719158	3132002134444	1
10120640901956	313200021333	
	313200211	
	312002	

3231 linea *ln*
33746
36947 linea *vn*

$\overline{34} \cdot 13' \cdot 30''$
$55 \cdot 46 \cdot 30$ complementum arcus *qa*
49610 linea *vf.*

col. 4.

36977	
36977	49610
258839	49610
258839	496100
332793	29766
221862	44649
110931	19844
1367298529 quadratum *vn*,	2461152100 quadratum *vf.*
2461152100	
3828450629 quadratum *fn.*	

1	
56	
2678	
38817	6
11126395	1
227818763	8
3828450629	7
1 2 2 6 4	4
1 2 3 7	
1 2 3	
1 2	

| 61874 linea *fn*. 20 (10)[a] col. 1.

61874 · 36977
60000

	1	
	3 3	
	4 4	
	548 9	
	34335	
	572941	3
36977	36243738	5
60000	484554812	8
2218620000	2218620000	5
	618744444	7
	6187777	
	61888	
	611	
	6	

35857 sinus arcus *kg*[1]); $\overline{36} \cdot 42'$ arcus *kg*,
$34 \cdot 13$
$2 \cdot 29$ arcus *kl*,
$68 \cdot 27$
$70 \cdot 56$ arcus *ak*,
$19 \cdot 4$ arcus *ek*,
$17 \cdot 35$ arcus *eg*.
$30 \cdot 0$
$12 \cdot 25$.

Igitur stella est in $\overline{12} \cdot 25'$ Virginis.

1) In Regiomontan's Tafel ist sin $36^0 42' = 35858$.

Nunc pro latitudine stelle, scilicet arcu oq (Fig. 4).

col. 2.

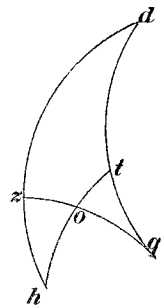


Fig. 4.

$hd \cdot dz$		$zd \cdot dh$
$ht \cdot to$	conversim	$ot \cdot th$
$oq \cdot qz$		$zq \cdot$ (qo)

| 54999 sinus dh

$\overline{9} \cdot 6' \cdot 4''$
$5 \cdot 58 \cdot 56$

$15 \cdot 5 \cdot 0$ arcus ot; 15613 sinus ot

$9 \cdot 6 \cdot 4$

$80 \cdot 53 \cdot 56$ complentum arcus ht; 59245 sinus th
60000 sinus zq

54999	3	
15613	4	
164997	262	
54999	573	
329994	16893	
274995	2526355	1
54999 [1])	23948137	4
21 3	36624373	4
85869 9387	858699387	9
14311	592455555	4
14312	5924444	
	59222	
	599	
	5	

14494 sinus arcus oq; $\overline{13} \cdot 59'$ arcus oq[2])

Hic arcus est latitudo stelle meridionalis quesita.

Examinabo.

col. 3.

$ha \cdot az$	totus $ha \cdot az$
$hl \cdot$ (lo),	$ok \cdot kz$
$ok \cdot kz$	totus $hl \cdot$ (lo)

Igitur kz ad ok ut az ad lo.

---

1) Hier hat Regiomontan erst durch den *Sinus totus* statt durch sin th dividiert, die falsche Division aber zu tilgen vergessen. Die Art der Division durch 60000 ist in ihrer Art sehr bemerkenswerth. Da der Rest grösser als die Hälfte des Divisors ist, so wurde die letzte Ziffer des Quotienten um eine Einheit vergrössert.

2) 14494 ist vielmehr nach Regiomontan's Tafel der Sinus von $13^0 57'$, dagegen sin $13^0 59' = 14498$.

$\overline{19} \cdot 4'$ arcus ek
$7 \cdot 28 \cdot 34$
$7 \cdot 51 \cdot 25$
$22 \cdot 51$
4
$1 \cdot 28$
$a \quad 3$
$1 \cdot 31$
$7 \cdot 30 \cdot 5$ arcus kq
$13 \cdot 59$
$6 \cdot 29$ arcus ok; 6775 sinus ok
$90 \cdot$
$7 \cdot 30$
$82 \cdot 30$ arcus kz; 59487 sinus kz
$66 \cdot 26 \cdot 30$ arcus az; 54999 sinus az

59487 · 54999
6775

	7	
	2	
54999	231	
6775	792	
274995	38991	6
384993	56144	2
384993	679864	5
329994	18236864	3
372618225	372618225	
	59487777	
	594888	
	5944	
	59	

6253 sinus declinationis stelle. Satis est.

| Nunc pro arcu diurno stelle huius col. 4. (Fig. 5).

	42610	sinus ab,
$ab \cdot bz$	42242	sinus bz,
$th \cdot tz$	6253	sinus th,
$ae \cdot$ (et)	59637	sinus tz,
	60000	sinus ae.

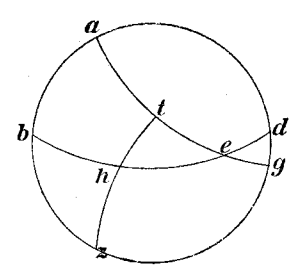


Fig. 5.

	342	
6253	467	
42242	685	
12506	42334	6
25012	184145	1 [1])
12506	2257834	9
12506	264139226	8
25012	42610000	
264139226	426111	
	4266	
	42	

	7	
	8	
	159	
	1477	
	29998	
6198	316726	6
60000	498837	2
371940000	17322414	3
	371940006	2
	59673333	
	596777	
	5966	
	59	

20(10)b col. 1. | 6233 sinus arcus *et*; $\overline{5} \cdot 58'$ arcus *et* [2])

$84 \cdot 2'$.

$84 \cdot 2$

$168 \cdot 4$ arcus diurnus stelle.

Die Antwort Bianchini's auf diesen Brief ist ebenfalls vorhanden. Sie hat v. Murr nur auszugsweise abdrucken lassen, und er hat die Orthographie Bianchini's sehr verändert. Letzterer liebt es, die einfachen Consonanten zu verdoppeln. So schreibt er z. B. *cellum* für *celum*, *subtilli* für *subtili* u. dgl. Ich lasse auch diesen Brief hier folgen, drucke dann die Antwort Regiomontan's ab und füge am Ende die Rechnungen des letzteren hinzu, welche sich auf diese beiden Briefe beziehen.

---

1) Hier ist die Vergrösserung der letzten Ziffer um eine Einheit unterblieben, während sie in der nachfolgenden Division wieder geschehen ist.

2) Nach Regiomontan's Tafel ist sin $5^0 58' = 6237$.

II.

Giovanni Bianchini an Regiomontan.

| Y + S Xpus Maria Blatt
1463, die 21 Novembris.[1]) 11(1)[a]

Hiis diebus ellapsis apportate mihi fuerunt litere vestre, quas certe non parum gratissimas habui tam ex vestra subtilli et vera terminatione interrogatorio meo, quam, que per ipsas comprehendo, ad noticiam Ꝑmi in xpo patris et amici communis nostri D. Cardinalis Niceni, cui certe ex corde desidero commendatum esse, tam ex sua profundissima sciencia, cuius fama per totum orbem vollat, quamque ex sua benignissima humanitate et erga me benevollentia, dum ab Illustri olim D. meo dno Leonello missus fuissem anno Iubillei ad Dominationem suam pro facto monetarum, factaque certa congegratione civium et ex animata canna, voluitque me ad prandium cum Dominatione sua esse. Ex quo semper me Ꝑme Dominationi sue obligatum esse reputo, cui me et mea supplico, quod inter numerum servitorum suorum me poni faciat et in memoria habeat.

Examinavi dilligens responsiones vestras et conclusiones interrogatorii mei, quas scienter et recte terminastis. Vidi etiam quatuor observationes per vos, ut dicitis, factas de alliquibus stellis fixis in diversis locis et temporibus, quibus brevi interllogo quam potero, ipsas terminabo. Et quia
a | magistro Cristophoro Briscensi nostro pluribus mensibus ellapsis habui, 11(1)[b]
quod nobis accomodauit tabullas meas[2]), puto vos forte habere copiam vobiscum, quod mihi valde gratum esset, quia summopere desidero, illas ad manus peritorum, ut vos estis, perveniant. Et ideo, ut vos in praticha operationis tabullarum mearum secundum doctrinam canonum operationes meas comprehendatis, conclusionesque meas per tabullas approbando describam, manifestum est, quod, si per latitudinem stellę declinatio invenitur, etiam per operationem conversam per declinationem latitududo(!) invenietur: Sapienti paucha sufficiunt.

Et si responsiones meas ad literas vestras in longum deductę sunt, veniam quesso. Nam de mense iunii causa evitandi dubium pestis huc cum tota famillia mea ad possessiones meas applicavi(!) ubi ex mandato Illu-

---

1) Diese Notiz ist von Regiomontan's Hand.

2) Die hier erwähnten Tafeln sind handschriftliche, da die erste Ausgabe derselben erst 1495 (nicht, wie bei Riccardi verdruckt ist, 1459) erschienen ist. Der Titel ist: Tabularum Ioannis | blanchini canones. Am Ende: Impreſſū itaq; Solertia z cura nō | mediocri Symōis biuilaque papiē|ſis āno 1495 die 10 Iunii. Venetiis. 344 Blatt 4° ohne Numeration mit den Signaturen A—C, a—z, z, ɔ, ꝓ, A—O.

strissimi D. mei Ducis data est mihi cura totius istius pollicini, ipsum totis viribus a contagione pestis conservando. Ubi per me posti sunt custodes in locis opportunis, ut alliqui venientes a locis suspectis huc non applicent, nec aliqui in polliceno huius habitantes ad loca suspecta acce-
12(2)[a] dant absque licentia, condonando et puniendo | deliquentes, ex quibus non parum extraticii incurit. Sed ultra hoc, quasi omnes de famillia mea ac etiam spectabilis D. Anniballis de Gonzaga, gener meus, passi sunt febribus sicis, multi convicini passi sunt. Et consors mea a tribus mensibus citra et ad de presenti a quartana retinetur, et ego quidem, ab aliquibus diebus citra et de presenti a febribus passus sum. Spero tamen ab ipsa in brevi liberari. Et similliter fillia mea, uxor D. Aniballis, a febre, a qua patitur, liberabitur, dato quod a gravissimo pericullo evassa sit. Spero tamen, domino concedente cum securitate, alias et sepe nobiscum confere. Nec vobis molestum erit, dubia vestra mihi patefacere, nam non tantum utille, sed necessarium est, stelle fixe verificare, et me ad tallem prathicam in loco isto personaliter cognosco negligentem.

Feci propter hoc instrumentum demonstrans altitudinem stellę per g̃ · m̃ · 2̃, cuius puto vidistis compositionem et operationem in canonibus tabullarum mearum de primo mobilli, cum quo operari potest in stellis. Sed ego in hoc parum excercere possum.

Videbitis autem decissiones meas ad quessita vestra et approbationes,
12(2)[b] quas subiunxi | ex canonibus et tabullis meis de primo mobilli extractis[1]) et operationes tabullarum magistrallium per me compositarum, et si non vidistis, videbitis in quanta brevitate reducitur calchullus, et non dubitetis, quod omnia demonstravi in libro florum almagesti.[2]) Reduxi enim denominationes sinuum ad numeros discretos propter abbreviationem et facillitatem calchulandi. Si vero illud non habetis illic, scilicet Tabullas meas de primo mobilli, sunt alliqui, qui Venetiis illę habent, et specialiter Egregius Magister Allexander Boromei, artium et medicine Doctor, quem non dubito ad requisitionem vestram seu ℞mi D. Cardinallis et Legatis(!) libentissime accomodabit. Et libentissime audirem, quid vobis videtur pro illis; et quid ex ipsis videtur corrigendum, vobis doctissimo, assentiam.

Et prosequendo ad decissionem quessitorum vestrorum in sequentibus accedam.

Primum quessitum est: Quedam stella fixa in medietate zodiaci de-
Fol. 21, facie 1.[3]) scendentis, declinatio semptemtrionalis est g̃r 35 m̃ 17, latitudo autem

1) Diese Rechnungen sind jetzt nicht mehr vorhanden.

2) Dieses Werk Bianchini's ist Manuskript geblieben und wahrscheinlich völlig verloren gegangen.

3) Diese und die folgenden Randbemerkungen beweisen, da sie von Regio-

septemtrionalis g̃r 20 m̃ 49: queritur locus eius verus, et cum quo puncto cellum mediat, supponendo declinationem maximam | g̃ 23 m̃ 30 · ỹ 30, 13(3)[a] sicut ipsum multotiens cum instrumento alias in diversis temporibus consideravi dilligenter.

Respondendo autem dico, stellam ipsam fuisse in g̃ 17 m̃ 37 Leonis, mediavitque cellum cum g̃ 25 · 28 Leonis, quibus correspondent g̃ 147 m̃ 45 assensionum, id est de gradibus equinoctialis.

Secundum quessitum est: Quedam stella in g̃ 9 m̃ 15 Leonis solita mediare cellum cum g̃ 20 m̃ 37 Virginis: queritur, quanta sit eius decli- Fol. 22, 2a facie. nacio et latitudo.

Dico ipsam esse cum declinatione g̃ 69 m̃ 35, et latitudine g̃ 57 m̃ 25 equinoctialis.

Tertium quessitum est: Observatum est in loco, cuius latitudo est g̃ 43 m̃ 19, longitudo autem ab occidente habitato g̃ 33 m̃ 48 quedam stella fixa in nocte sequentis diei 12 Iulii 1463, que quidem orta est hora 3 m̃ 25 noctis, mediavitque cellum hora 7 m̃ 38: queritur locus eius, punctus mediacionis celli, latitudo quoque, declinatio et arcus diurnus.

Dico stellam ipsam fuisse per longitudinem in g̃ 9 m̃ 39 Piscium, et ortam esse in regione ipsa cum g̃ 18 m̃ 17 Piscium, quibus correspondent g̃ 349 m[a] 5 ascensionum, et archus ipsius diurnus fuisse g̃ 126 m̃ 30, cuius medietas est g̃r 63 m̃ 15. Et omnia ista patent per problema (!) vestra alioque inventione veri loci stelle habito loco mediationis celli per figuras sectoris, ut peroptime scitis, inventus est verus locus g̃ 9 m[a] 30 Piscium, ut supra. | Hoc facto per locum verum et latitudinem regionis in- 13(3)[b] venta est declinatio stelle g̃ 25 m̃ 4 in partibus etiam meridionali (!).

Per locum autem verum et declinationem appl modo inventi sunt g̃ 18 m̃ 7 Piscium, cum stella mediari cellum, atque per declinationem et latitudinem regionis probatur archum diurnum fuisse g̃ 126 m̃ 30 meridionales.

Ultimum per gradus eclipticos medii celli et archum diurnum ipsius in regione proposita et archum diurnum stelle cum sua latitudine septemtrionali inventum probatum, ascensiones stelle cum sua latitudine fuisse in orizontis g̃ 15 m̃ 50 cum g̃ 28 m̃ 28 Arietis.

Quartum quessitum est: In regione latitudinis 45, longitudinis g̃ 31 m̃ 45, de qua longitudine primo est curandum, quia horis presuponit longitudinem videlicet horis 3 m[is] 38 noctis, que sequebatur diem 9 Augusti

---

MONTAN selbst herrühren, dass die Foliierung an der obern Seite der Blätter von 11—82 von ihm selbst herrührt, dass er also die Zusammenheftung der Briefe vorgenommen hat.

1463, visa est stella fixa, cuius declinatio septemtrionalis inventa est g̃ 13 m̃ 25, altitudo eius supra orizontem in hac consideratione inventa est g̃ 50 m̃ 19: queritur locus eius verus, punctus mediationis celli et latitudo.

Primo per declinationem datam et latitudinem regionis inventa est horam, qua stella ellevata fuit ab orizonte g̃ 50 m̃ 19, fuisse hora 5 m̃ 3 post ortum ipsius, presupponendo, fuisse, cum qua applicuisset ad lineam meridianam, et hoc presupponendum est. Et quia hoc fuit post ocassum Sollis hora 3 m̃ 38, sequitur fuisse hora 1 m̃ 25 stellam ipsam ortam
14 (4)[a] esse circa ocassum Sollis, que capiunt | de motu equinoctialis g̃ 21 m̃ 15. Sollis autem locus tunc fuit in g̃ 25 Leonis cui desscensiones in regione, quo respondent g̃ 340 m̃ 56. A quibus demtis g̃ 21 m̃ 15, sequitur stellam ortam fuisse cum g̃ 319 m̃ 41 equinoctialis.

Hoc facto per declinationem stelle et latitudinem regionis invenitur, medietatem archus diurni stelle fuisse in regione g̃ 103 m̃ 48, et per consequens differentiam medietatis archus diurni stelle ab equalli fuit g̃ 13 m̃ 48. Qui additi cum asscensionibus, cum quibus stella oritur, que ut supra fuerant g̃ 319 m̃ 41, et hoc, quia archus stelle excedit equalle. Fuerunt ergo ascensiones stelle correspondentes in medio celli g̃ 333 m̃ 29, quibus correspondent de ecliptica g̃ 1 m̃ 26 Piscium cum stella in medio celli.

Hoc facto per figuram sectoris cum adiutorio precedentium, ut novistis, invenivi (!) verum locum stelle fuisse in g̃ 10 m̃ 38 Piscium.

Ultimo cum loco vero et declinatione stelle inventa est latitudo g̃ 22 m̃ 44 in parte meridionali. Per locum autem mediationis celli, videlicet g̃ 1 m̃ 26 Piscium, et archum diurnum ipsius in regione equiparatum cum archu diurno stelle verificabitur locus eius verus g̃ 10 m̃ 38 Piscium.

Et ut videre et examinare possitis facillitatem et brevitatem calculandi cum tabullis et canonibus meis de primo mobilli, mitto vobis seriatim et ordinatim presentis calchullum his scriptis inclussum, per quem apparebantur omnes mee conclussiones et responssiones quesitorum vestrorum, manu mea propria scriptum.[1])

Et si male scriptus est, quod malus scriptor sum et peior pronunciator excussatum me habeatis rogo, quia nunquam preceptorem habui, nec verssatus sum in scollis, sed converssatio mea fuit cum illustribus Dominis Ducibus meis de Domo Estenssis, et adhuc est. Et quicquid sum, semper sum paratus ad mandata Ꝝmi in xpo patris et domini, Domini communis

---

1) Wie schon oben bemerkt ist, fehlen diese Rechnungen im jetzigen Manuskripte.

nostri Cardinallis Niceni et Legati etcetere, ac etiam ad mandata vestra prumtus ꝛcet Vale.

Ex Fossanova Sancti Gilii, Die XXI° Novembris 1463.

Io. Blanchinis.

| Consideratio in villa Fossanove Sancti Gilii, Ferrariensi districtu. 15 (5)ª
Die 4 Augusti 1463 Sole existente in g̃r 19 m̃ 48 Leonis circa meridiem accepi ipsius altitudinem, quam inveni g̃ 33 m̃ 49: quero oram post ortum ipsius, amplitudinem sui ortus, que est distantia per orizontem ab ortu vero, nec non tunc distantiam umbre ipsius per circulum orizontis usque ad contactum meridiani cum orizonte. Fol. 22, facie 1ª

In quesito vestro secundo et responsione mea inventa est quedam stella in g̃ 9 m̃ 15 Leonis cum latitudine g̃ 57 m̃ 2 septemtrionalis: quero, si per alium calculum declinatio ipsius nota est g̃ 19 m̃ 35, deinde altitudinem ipsius ab orizonte hora 3 m^is 25 post ipsius separationem a linea meridiana.

Tento, ut me tentetis.

Quero duos numeros proportionales ut 5 ad 8, quorum ad invicem productus equatur aggregationi ipsorum. Fol. 23, prima facie

Item quero de 10 facere duas partes, ex quibus maiorem per minorem divisam deinde minorem per maiorem et divisam, numeros autem cotientes simul iunctos eorum summa sit 25, et hoc gratia colationis. Fol. 23, facie 1ª.

III.

Regiomontan an Giovanni Bianchini.

| Maria. 35 (26)ª

Io. Germanus ad Ioannem de Blanchinis.

Ingentes vobis habeo gratias, prudentissime atque doctissime vir, qui litteras meas ita humaniter suscepistis, ac si grande aliquid sive novi sive utile advexerint, quorum profecto neutrum in eis apparuit. Novi enim nihil attulerunt, cum questiones meas vobis propositas iam dudum tanquam usitatas valde habueritis, neque quicquam utilitatis. Quid enim profuit, more meo vestre respondisse interrogationi, cum longe facilius eam decidere liceat per tabulas vestras, quas de primo mobili contexuistis, quas equidem Rome Magister Christoforus mihi comodavit? Utinam ego copiam earum fecissem! Eas summopere et laudandas censeo et omnibus studiosis publicandas, quod breviter atque facillime, quidquid de primo mobili queritur, expediant. Non licuit autem hactenus earum exemplum comparare conditione mea moderna id agente, nam voluntas mea ex imperio Domini mei

Ꝛmi pendere debet, cui serviendum est. Quo fit, ut minus libito studiis adherere possim, libros quoque quoslibet copiare. Curabo tamen, si possibile fuerit, eas vestras tabulas videre saltem nunc Venetiis, nisi m̃gr Alexander[1]) ab humanitatis officio alienus sit, in eis me plurimum oblectabo et dignitatem earum domino meo Ꝛmo, si vacat, hilariter predicabo. Qui etsi antehac tam visu quam fama dominationem vestram cognoverit, pars tamen magna dignitati vestre accrevit, ubi virtutes vestras, ita ut equum erat, Ioannes vester Germanus dinumerare conatus est. Pergite igitur, ut cepistis, vicicissim pro vestra mansuetudine discipulum vestrum amplecti, qui summopere studebit, vobis morem gerere, cuius demum iocos, nisi me animus fallit, haud egre feretis, si integritatem animi sui perspectam habueritis, et si quandoque tentare vos videar, ridere quidem licebit ineptias meas. Ex fiducia autem, quam ergo dominationem vestram gero, huiuscemodi manare estimandum est. Hanc enim mihi assumpsi licentiam ex scriptis vestris, ubi inter bina interrogata vestra: „Tento", dicitis, „ut tentetis." Vocare poteritis tentationem pro vestra auctoritate, ego autem
35 (26)b fiducie nominum huic dabo postulationi. Sed ne equo diutius detineamus | ad cepta nostra exercitia veniendum est. Quod tardius, quam sperabam, litteris meis responderitis, etsi molestum valde mihi fuerit mei ex parte, qui tam diu litteras vestras desideratissimas accipere non debuerim, longe tamen molestius, imo intollerabile visum fuisset, si more vestre causam sensissem. Vehementer enim me conturbasset mala vestra valetudo atque morbus, qui et patrem familias et totum insuper domum oppressit, cuius sevitia, ut quam citissime extinguatur, deum oro suppliciter et spero id propediem affore, quo crebrioribus invicem litteris relevari possumus. Respondistis igitur tandem et optime et benissime, misistisque exempla numerorum, quos in ea re habuistis necessarios, boni et docti preceptoris officio fretus. Exemplis enim facile doctrinam quampiam consequi datur, pro quibus, quantas possum, habeo gratias. Stelle, de qua in primo quesito locum verum in ecliptica reddidistis in termino graduum 17 et minutorum 37 Leonis, ego tabule sinus auxilio (nam aliam apud ne tabulam habeo nullam) inveni gradus 17 minuta 34. Differentia trium minutorum parvi ponenda, nam operanti mihi non semper totus dividendus tollebatur, quandoque etiam multiplicans aut maior aut minor equo, sicut in his fieri solet, acceptus est. Supposui tamen in eodem quesito maximam Solis declinationem g̃ 23 mita 30, que declinatione maxima communiter usitata minor fere est tribus minutis. Transeat illud. In quesito quarto digne notastis, subiici oportuisse, stellam nondum meridianum attigisse aut ipsum

1) Der oben erwähnte Alexander Borromei.

transivisse, nam due stelle, quibus sunt equales declinationes, equaliter utrique a meridiano pro eodem temporis instanti distare possunt, non tamen eundem in ecliptica locum habentes. Dum igitur et egregie solvistis universa, et quidem faciliter, per tabulas vestras, ego autem quicquid nunc Venetiis numerabo, non nisi per tabulam sinus consequi potero.[1]) Illud tamen non sit impedimento, quin ad me scribatis, quotquot et quecumque voletis interrogatoria. Si enim satis respondebo, scietis me labore ingenti id efficere, si minus digne, excusabitis me inermem. | 36 (27)[a]

Quod si ea, quam sub manibus habeo, tabula absoluta esset, facile omnia, que ad primum mobile referuntur, et alia multa possent expediri absque numerorum multiplicatione et divisione, absque sinuum per arcus et vice versa extractione. De qua quidem tabula, si veritatem mediocriter etiam auxero, nimis gloriari videbor, cum res admodum nova et hactenus infecta sit. Quicquid per eam investigare libebit, duobus tamen nnmeris introitualibus agebimus, quorum alterum in latere transversali, alterum in descendenti tabule immittimus, et in angulo communi reperiemus quesitum. Duos huic tabule accomodabo libellos, quorum primus quidem fundamenta tabule et operationum eius firmabit, secundus vero, quanam lege quilibet omnino novus artis discipulus per eam operare expedite possit.[2]) Decrevi autem ad Dominationem Vestram nunc mittere utilitates quasdam huius tabule more geometrarum per propositiones sive proposita distinctas, ut iudicium vestrum hac in re, quale sit, persentiam. Reliqua vero huiusmodi operis videbitis, ubi nomine domini mei R̸[mi] universis philosophie cultoribus divulgabuntur. Proposita ipsa utilitatum sive fructuum seriatim colligens in postrema membrana. Posteaquam ad interrogata mea sufficientissime

1) Wie aus den Rechnungen hervorgeht, war diese Tafel für den Radius 60000 berechnet.

2) Diese *Tabula primi mobilis* war also Anfang 1464 noch nicht vollendet. Später werden wir sehen, dass sie 1471 schon dem Könige Mathias Corvinus überreicht war. Sie erschien zusammen mit den *Tabulae eclypsium* G. Peurbach's im Jahre 1515 durch Tannstetter herausgegeben bei Lucas Alantsee in Wien. Regiomontan spricht in der obigen Notiz von *zwei* Schriften, welche er ihr gewidmet habe. Auch die zweite hat sich erhalten: *Fundamenta operationum, quae fiunt per tabulam generalem. Neuburgi ad Danubium* 1557. Herausgeber war Andreas Schoner. Da mir die *Tabula* selbst nicht zugänglich war, erlaube ich mir aus der „Geschichte der Trigonometrie" v. Braunmühl's die sie betreffende Stelle hier einzurücken.

„Um die Einrichtung der Tafel kennen zu lernen, wollen wir uns an die Relation $\sin a = \sin c \cdot \sin A$ halten. Die Winkel c wachsen von Grad zu Grad unter der Überschrift: *„numeri transversales"*, die oben auf je einer Folioseite steht, so dass die Tafel 90 Seiten umfasst. Desgleichen wachsen die A gradweise und stehen unter *„Numeri laterales"* in drei parallelen Spalten auf jeder Seite;

respondistis, questiones quatuor remittere dignati estis, quibus si bene respondero, ipse iudicabitis, qui talium rerum plenam habetis peritiam. Erat autem scriptum vestrum super prima questione huius tenoris.

Consideratio in villa Fossenove Sancti Gillii, Ferrariensi districtu. Die quarta Augusti 1463° Sole existente in g̃ 19 mi^{tis} 48 Leonis ante meridiem accepi ipsius altitudinem, quam inveni g̃ 33 mi^{ta} 49: quero horam post ortum eius; amplitudinem sui ortus, que est distantia per orizontem ab ortu vero, nec non tunc distantiam umbre ipsius per circulum orizontis usque ad contactum meridiani cum orizonte.

Hic, tametsi latitudinem loci considerationis non adnotaveritis, tamen, cum a Ferraria parumper distet, accepi altitudinem poli urbis Ferrariensis, quam alias dedistis g̃ 44 mi^{ta} 45 et 2^{a} 4, cum qua et declinatione Solis graduum 14 minutorum 57 inveni ex figura sectoris divisa differentiam arcus semidiurni diversi et semidiurni equalis g̃ 15 m̃ 21, unde arcum
36 (27)^{b} semidiurnum oportuit esse | g̃r 105 m̃ 21. Deinde ex altitudine Solis considerata, quemadmodum res ipsa postulabat, concludo distantiam Solis a meridiano g̃ 56 m̃ 53 antemeridianam quidem. Hanc dempsi ex arcu semidiurno supra memorato, et relinquebantur g̃ 48 m̃ 28, et tantus erat arcus paralleli Solis centro eius et orizonte interceptus, tantusque computabatur arcus equatoris ascendens in tempore, quod fluxit ab ortu Solis ad instans considerationis, cui respondent more suo hore 3 equales m^{a} 13 fere. Quo autem pacto ex altitudine Solis data cum ceteris cognitu necessariis distantiam eius a meridie invenerim, aperire non est consilium, ne nimium vobis concedat fastidium. Unum tamen ex sex modis diversis omnino eli-

---

der Winkel a findet sich dann nebenan in Graden, Minuten und Sekunden ausgerechnet. Die Tafel wird dadurch wesentlich verwendbarer, dass Regiomontan die zur Interpolation nötigen Differenzen beigesetzt hat. Unter jeder Arealzahl steht nämlich der Unterschied derselben von der nächst höheren mit *„differentia descendens“* oder *„subiectiva“* bezeichnet, während in einer Spalte neben den Arealzahlen unter *„differentia lateralis“* die Unterschiede der zu einem bestimmten c und A gehörigen Arealzahlen, die dem nächsthöheren c und demselben A entsprechen, angeführt sind. So hat z. B. der zu $c = 64^0$ und $A = 55^0$ gehörige Teil der Tafel nebenstehende Gestalt.

Transver 64 sales.

Arcus				Diff. lateralis.
Lat.	Areales descendens			
g.	g.	m.	s.	m. sec.
55	47	24 45	46 29	32 · 25
56	48	10 44	15 58	32 · 16

Will man nun z. B. zu $c = 64^0 37'$ und $A = 55^0 43'$ den entsprechenden Wert von a berechnen, so sucht man unter 64 *(Transversales)* und 55 *(Laterales)* das zugehörige a *(areales)* $47^0 24' 46''$ auf. Da die Differentia descendens $45' 29''$ dem Wachstum des Winkels A um 1^0 entspricht, so ist sie für $43' (45 \cdot \frac{20}{60} \cdot 43) : 60 = 32' 36''$. Ebenso erhält man mittelst der Diff. lat. für $31' 25''$ den Zuwachs $19' \cdot 22''$, so dass sich schliesslich $a = 48^0 16' 44''$ ergiebt.“

gere libuit, quorum nonnullos in epitomate almagesti[1]) explanatos dedi in fine secundi, reliquos autem modos in problematibus reperire licebit, unde petere licebit, postquam codex ille tredecim tractatuum iussu domini mei publicabitur. Quem vobis quidem placiturum, nisi me animus fallit, plerisque autem aliis usu venturum arbitror. Amplitudinem ortus Solis in die considerationis vestre invenio g̃ 21 m̃ 18, et erat ipsa septemtrionalis. Et arcus orizontis inter circulum altitudinis Solis et meridianum comprehensus, quem videmini querere tertio, erat g̃ 76 m̃ 54, et est complementum arcus, quem arabico nomine vocant azimuth. Hac ex secundo problematum almagesti colligere decrevi, ubi demonstratum dedi sinum rectum distantie Solis a summitate capitum ad sinum rectum distantie Solis a meridie se habere sicut sinum complementi declinationis eius ad sinum arcus, quem vestra quesivit dominatio. Ad hec autem problemata scribenda me nuper stimulastis, quando primo vestro quesito respondendum erat. Duos iam ferme huius operis absolvi libros pedetenim reliquos undenos expediturus. Institui autem nihil eorum, que in epitomate tradita sint, in huiusmodi problematibus repetere. Nam quo problemata intelligantur, epitomatis precognitio necessaria est. Sed quo ruit calamus? Dabitis, spero, veniam, si paulo prolixior fuerim, et quidem non sine vestra gloria. Hec enim, que dixi, opera iuditio vestro offerenda censui, quo plus autoritatis nanciscantur. De his satis. | 37 (28)[a]

Hec ex capite 2[i] epitomatis.

Amplius littere vestre interrogatorie habent illud:

In quesito vestro secundo et responsione mea inventa est quedam stella in g̃ 9 mi[tis] 15 Leonis cum latitudine graduum 57 minutorum 2 septemtrionali: quero si per alium calculum declinatio ipsius vere est g̃ 69 mi[ta] 35, deinde altitudinem ipsius ab orizonte hora tertia mi[to] 25 post ipsius separationem a linea meridiana.

Hec sunt verba dominationis vestre. Revera (parcatis) nescio, utrum ex suppositis meis, videlicet vero loco in ecliptica et puncto mediationis celi, invenire iubetis declinationem eius, an potius ex loco eius in ecliptica cum latitudine. Nam neque satis intelligere possum, quonam modo vos ex suppositis meis declinationem stelle inveniatis. Sed exercitii gratia ad utrumque respondere conabor si prius figuram huic rei oportunam descripsero. Sit ergo (Fig. 6) colurus solstitiorum *abgd*, sub quo medietas equatoris *aeg* et medietas ecliptice descendens *bed*, ita quod *b* caput Cancri, *e* initium Libre et *d* Capricorni existant, sic enim figuram aptare locus stelle, qui

1) Gemeint ist: Ioannis de Monte Regio et Georgii Peurbachii *Epitome in Cl. Ptolemaei magnam compositionem. Venetiis 1496.* Zur Zeit des Briefes natürlich ebenfalls nur handschriftlich vorhanden.

est in hac medietate ecliptice, monet; polus mundi borealis sit z, polus ecliptice h, stella sit in o puncto, per quem ad duos polos predictos incedant arcus circulorum magnorum zl et hok, ipsi quidem equatori in punctis l et k, ecliptice autem in punctis m et n incidentes. Constat itaque n esse locum verum stelle in ecliptica, et m punctum, cum quo celum mediat, qui duo puncta sunt data in quesito meo, quoniam arcus, quos terminant, dati sunt. Vos autem respondendo et optime solvendo dubium accipitis arcum equatoris, qui inter caput Arietis et punctum k clauditur, eum vocatis radicem et subtrahitis ex ascensione recta respondente arcui ecliptice ad punctum m tirato, quicquid ascensio inter initium Arietis et punctum l comprehenditur, et relinquitur vobis arcus lk. Huius arcus lk sinu utimur in operatione. Nunc dico, sive duo puncta m et n dentur, sive alter eorum tantum, verbi gratia n, cum latitudine stelle, que est arcus ne, per aliam viam reperire posse declinationem stelle in o existentis, et non modo per unam, sed plures, quarum due nunc incidunt meditatione,

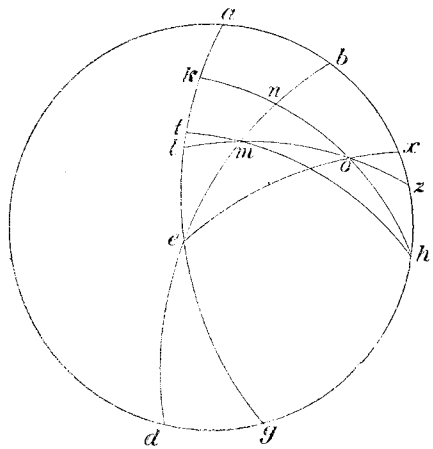


Fig. 6.

37 (28)[b] in quibus | neque arcus lk, neque kn necessarius est. Nam sit primo datus punctus n, locus scilicet verus stelle in ecliptica, cum latitudine no, et velimus invenire declinationem stelle, arcum scilicet lo, sic agendum est. Cum e sit polus coluri $abgd$, ut ex primo Theodosii de spheris[1]) constat, descendat ex eo per punctum o quadrans eox. Quo facto, licet per secundum triangulorum syllogismum[2]) cudere possem, tamen figura sectoris, in qua vos estis exercitatissimus, utar. Eos autem, quos de triangulis conscripsi libellos, propediem videbit dominatio vestra. Iam enim apud me non sunt, sed ex Roma brevi afferantur. Id opus amplexu vestro haud indignum videbitur, nam et ipsum expectat limaturam vestram egregiam. Sed redeo

1) Es giebt zwei Übersetzungen dieses Werkes von Plato von Tivoli und von Gherardo Cremonese. Welche von ihnen Regiomontan bentzte, ist natürlich nicht zu entscheiden.

2) Da die sphärischen Dreiecke erst im 4. Buche behandelt werden, so dürfte bei Abfassung dieses Briefes nur Buch 2 und 4, das erste als Buch 1, das zweite als zweites gezählt, ausgearbeitet gewesen sein. Buch 1 und 3 der entgültigen Arbeit sind also erst später hinzugefügt worden.

ad ceptum. In figura sectoris, cuius caput est *b* punctus, pedes autem *e* et *h*, et venter *o* punctus, scilicet sectionis coniunctim argumentandi proportio *eb* ad *bn* componitur ex duabus proportionibus, quarum altera est proportio *ex* ad *xo*, altera *oh* ad *hn* (de sinibus non arcubus dico). Quinque autem horum arcuum sunt noti: *eb* quadrans, *bn* distantia veri loci stelle a principio Cancri, *oh* complementum latitudinis, *hn* quadrans et *ex* quadrans. Unde et arcus *ox* notus habebitur, cuius sinum habeo 20675, ipsum vero arcum $\overline{20} \cdot 8'$. Item eadem figura manente et eodem argumentationis genere arcus *bx* cognitus erit, si proportionem sinus *hb* ad sinum *bx* compositam ex duabus aliis, ut assolet, intellexerimus. Arcum autem *bx* invenio g̃ 63 m̃ 20, unde arcus *hx* relinquetur g̃ 26 m̃ 40, ex quo demo arcam *zh* equalem maxime Solis declinationi, ut residuus maneat arcus *zx* g̃r 3 m̃ 6. Hinc arcus *ax* venit g̃r 86 m̃ 54. Iam ad aliam sectoris figuram me transfero, cuius vertex est punctus *a*, pedes autem *e* et *z*, punctus sectionis *o*. Erit quoque proportio *za* ad *ax* composita ex duabus, scilicet ex proportione *zl* ad *lo* et ex *oe* ad *ex*. (De sinibus horum loquor.) Quinque autem noti sunt. Est enim arcus *oe* notus propter arcum *ox* superius cognitum, quare et arcus *ol* non ignorabitur, scilicet declinatio stelle, quam sic numerando elicui g̃ 69 m̃ 38; differimus in tribus unitatibus. Sed transeant. Est et alius modus, quam nunc missum facio. Quod si intentio questionis vestre fuerit, ex duobus punctis *m* et *n* datis per alium modum invenire declinationem *lo*, respondeo, id iterum duobus aliis modis fieri posse, et quidem hec omnia per tabulam sinus tantummodo absque suffragio aliarum quarumcumque. Dico autem de modis iam in memoria existentibus, quos nunc preterire fuit consilium, ne libido vobis respondendi vertatur | in molestiam. Ab initio enim huius rei tanta 38 (29)[a]
verba non rebar me facturum. Sed quid hoc est? Dum procedit calamus alium effudo modum predicta solvendi. Sic tres alios a modo vestro, qui per ascensiones vadit, reperire licuit. Credite mihi, non recito somnia. Nihil enim horum preteribo, ubi ad octavum librum problematum ventum fuerit, quin imo omnia acuratissime conscribam, quo tandem effecto eiusce rei iudex eritis obtatissimus.

Deinde querebatur altitudo huius stelle, distantiam a meridiano habentis in tempore quidem horas tres m̃ 25. Hec stella in orizonte vestro non oritur neque occidit, sed habet duas altitudines meridianas inequales. In qualibet ergo revolutione primi mobilis quatuor habet a meridiano tantas distantias, quantam vos posuistis unam. Accepi autem distantiam a superiore parte meridiani, nam non difficilius reddidissem altitudinem suam, que debetur tante distantie a parte inferiori ipsius meridiani, et altitudinem stelle quesitam inveni g̃ 54 m̃ 34. De hoc iam satis.

Ad tertium, quo dicitis: Quero duos numeros proportionales ut 5 ad 8, quorum ad invicem productum equetur aggregationi ipsorum. Hoc est aliud genus questionum. Profecto, nisi molestum viderem, tantis litteris una dumtaxat vice respondere, duos producerem modos, quibus huic interrogato satisfacerem, sed neutrum eorum fortasse dominatio vestra expectat. Quare per alium tertium respondebo modum, quo demum sciatis, artem rei et census (vocant arabice algebram) mihi esse familiarem. Pono primum 1 rem, unde ex ypothesi vestra secundus erit $1\frac{3}{5}$ rei. Duco alterum in alterum, producuntur $1\frac{3}{5}$ census. Item coniungo eos, resultant $2\frac{3}{5}$ ℛ. Habeo igitur census equales rebus, quare secundum precepta artis agendo invenio minorem numerum, quos queritis, $1\frac{5}{8}$, maiorem autem $2\frac{3}{5}$.

Queritis quarto de 10 facere duas partes, quarum maiorem per minorem dividendo, et item minorem per maiorem, numeros quotiens colligendo resultant 25. Respondeo ponendo primum 1 ℛ, et secundam, quemadmodum res postulat, 10 $\overline{\text{ig}}$ 1 ℛ etc. Primum invenio 5 minus radice de $21\frac{8}{27}$, secundus autem et maior est 5 et radix quadrata de $21\frac{8}{27}$. Habebam enim censum et numerum equalem rebus. Igitur secunda pars est binomium quartum, prima autem recisum eius. Potui autem et hoc solvere duabus
38 (29)[b] aliis viis, | sed nunc eam elegi, quam vobis arbitror familiarissimam, per artem videlicet rei et census, quod querebatur, absolvendo.

Si itaque vestris interrogatis sufficienter respondi, facile iudicabitis, qui omnium huiuscemodi rerum abundantissimam habetis peritiam. Opinione etenim mea satisfactum est. Potuit tamen error quisquam numerandi intercidere, ut solet fieri. Talem, si offenderitis, pro mansuetudine vestra tolerandum velim. Nihil enim eorum, que numerando scrutabar, repetivi. Nunc vestrum est officium, ut litteras alias ad me mittatis, quas equidem eo hilarior suscipiam, quo tempestivius advolabunt. Pollicebar superius propositiones secundi libri ad tabulam meam pertinentes seriatim perstringere, quod nunc persolvam ex ordine.

1. Generalem tabule usum in primis explanare. Usus tabule est intrare cum duobus numeris, ut supra tetigi. In angulo enim communi reperitur quesitum. Verum huiusmodi introitus pro nonnullis quesitis non est unicus, sicut neque unica operatio sufficit per sinus procedendo. Hoc tamen advertendum, quod quilibet huiusmodi introitus tantum facit, quantum alias una multiplicatio sinus per sinum et divisio producti per certum sinum, sed et neque sinum arcuare, neque arcum sinuare oportet, imo prorsus ab operatione sinuum excusat hec tabula. Satis nunc.

2. Cuiuslibet puncti ecliptice ab equatore declinantis declinationem invenire. Intra cum distantia puncti dati a sectione equatoris et ecliptice

viciniori et cum maxima declinatione. Reperies enim in angulo communi declinationem quesitam etc.

3. Proposita declinatione Solis quantalibet cui puncto ecliptice, aut quibus punctis respondeat, explicare.

4. Latitudinem Lune investigare.

5. Cuiuslibet arcus ecliptice ab equatore sumentis initium ascensionem in sphera recta invenire.

6. Ex ascensione recta et altera sectionum ecliptice et equatoris initium sumente arcum ecliptice sibi debitum indagare.

7. Amplitudinem ortus unicuiusque puncti ecliptice ab equatore declinantis computare.

8. Ex amplitudine ortus supposita punctum ecliptice, cui ipsa respondet, deprehendere.

9. In omni regione arcum diurnum puncti ecliptice, quodcumque etiam dederis, numerare.

10. Idem aliter concludere. | 39 (30)[a]

11. Cuiuslibet arcus ecliptice a sectione incipientis ascensionem obliquam in qualibet regione dimetiri.

12. In omni regione ex data ascensione obliqua ab altera sectionum initium sumente arcum ecliptice sibi debitum invenire.

13. Altitudinem Solis supra orizontem existentis in omni regione omnique hora perpendere.

14. Dum Sol in signis septemtrionalibus fuerit, altitudinem eius in circulo orientis perscrutari. Quis sit circulus orientis ille, in secundo problematum diffinitum est.

15. Arcum azimuth Solis aut alterius stelle dimetiri.

16. Angulum ex concidentia ecliptice et meridiani apud quodlibet punctum ecliptice provenientem comprehendere.

17. Angulum ex concursu ecliptice et orizontis orientalis procreatum pronuntiare.

18. Quantitatem anguli ex ecliptica et circulo altitudinis producti exequire.

19. Idem aliter comprehendere.

20. Quod due precedentes promiserunt, alio tramite perscrutari.

21. Gradum ascendentem vel punctum orientis in omni regione et omni hora per hanc tabulam elaborare.

22. Si quis ascendentem in regione qualibet habuerit, quo pacto medium celum investiget, manuducere.

23. In omni regione altitudinem Solis supra orizontem existentis quacumque hora data aliter quam superius dinumerare.

24. Arcum orizontis, quem secat circulus horarius ex eo, deprehendere. Quis sit arcus, quem significet, alibi lucubrabitur.

25. Arcum circuli orientis, quem horarius quilibet ex eo secat circulus, mensurare.

26. Puncta flexionis tenebrarum in eclipsibus determinare.

27. Cognito loco vero stelle fixe cum eius latitudine declinationem suam ab equatore sciscitare.

28. Punctum ecliptice, cum quo stella quelibet celum mediat, determinare.

29. Quod precedens docuit, alio tramite percontari.

30. Declinationem stelle fixe cuiuscumque altitudinis investigare.

31. Punctum, quocum stella quelibet celum mediat, aliis quam supra mediis inquirere.

32. Ex data stelle declinatione punctoque ecliptice, cum quo ipsa celum mediat, latitudinem eius atque verum locum in ecliptica diffinire.

33. Arcum diurnum stelle dimetiri.

34. Punctum ecliptice, quocum stella quelibet aut oritur aut occidit,
39 (30)[a] diffinire. |

35. Per altitudinem stelle cuiuscumque et azimuth atque medium celi declinationem eius stelle et punctum, cum quo celum mediat, indeque latitudinem et verum locum eius in ecliptica subtiliter indagare.

36. Arcum apparitionis aut occultationis stelle perscrutari.

37. Equationem octave sphere secundum Alfonsi fundamenta numerare.

38. Equationem octave sphere secundum imaginationem Tebith computare.

39. Equationem Solis colligere.

40. Equationem argumenti Lune dinumerare.

Sed quo ruit calamus ille molestus et audax? Forsitan omnia astronomorum quesita ad hanc unicam tabulam appellet? Dico ego, bonam partem huiusmodi quesitorum per hanc repertum iri tabulam, si prius concentricam astronomiam totam fundaverimus. Quid illud? Diversitates motuum planetarum per concentricos salvare pulcrum erit. Iam Soli et Lune viam dedimus, de reliquis autem quedam initialia iacta sunt, quibus completis equationes omnium planetarum per hanc tabulam numerare licebet. De hac re nihil amplius in presentiarum, ne legendi scripta mea magis patramini fastidium, quam ego scribendo voluptatem habeam. Si quid harum rerum audentius equo dixisse videor, posteris litteris rationes meas luculentius (sic puto) accipitis. Mallem tamen voce quam calamo hisce de rebus disserere. Facilius enim multo et expeditius foret. Dum id fieri nequit, littere voci officia sumant, que, quicquid afferent, vestro iudicio

limandum erit. Institui ire Mediolanum pro certo negotio. Nunc reliqui nihil scribendi est sententia, verum operiar litteras vestras dulcissimas atque, ut materies ad me scribendi detur, questiones mittere decrevi subscriptas.

1. Est quedam stella latitudine carens in $\overline{10} \cdot 25'$ Tauri, et alia item in $\overline{27} \cdot 29'$ Tauri absque latitudine, tercia autem latitudinem habens septemtrionalem distat a prima per $\overline{6} \cdot 18'$ circuli magni per earum centra transeuntis; a secundo autem distat per gradus 20 m̃ 47: quero verum locum huius tertie stelle in ecliptica et eius latitudinem.

2. Sunt due stelle fixe ab ecliptica versus septemtrionem elongate, quarum unius latitudo est $\overline{9}\,' 26'$, alterius vero $\overline{35} \cdot 53'$, distantia autem inter corpora stellarum est $\overline{8} \cdot 45'$: quero quantum distent loca sua vera in ecliptica.

⁜ 3. Est circulus diametrum habens 60 pedum. Huic inscriptum est quadrangulum, cuius quatuor latera proportionem habent, quas illi numeri | $4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$: quero, quanta sit area huius quadranguli. 40 (29)ᵃ

4. Sphera quedam habet diametrum 100 pedum, cui inscripta est pyramis basim habens trilateram. Huius pyramidis sex latera sunt in proportionibus horum 6 numerorum: $3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 16$: quero, quanta sit corpulentia huius pyramidis.

5. Sunt duo numeri, quorum differentia est radix quadrata de 5 (aut sic, quorum alter in alium ductus reddit radicem de 250)[1]), quadrati autem dictorum numerorum se multiplicantes, videlicet alter alterum, producunt 250: quero, qui sint illi duo.

6. Quidam mercator cum 100 ducatis in primo anno lucratur aliquid; deinde in secundo anno cum capitali et lucro primi lucratur propotionaliter ut in primo, et in tertio anno iterum proportionaliter cum capitali et duobus lucris duorum annorum precedentium. Quo facto in universo, videlicet ex capitali et tribus lucris, colligit 265 ducatos: quero, quantum in primo anno lucratus sit.

7. Tres socii ponunt communiter 70 ducatos et lucrantur cum eis 20 ducatos, quorum primo cedunt pro capitali et lucro 15 ducati, secundo 25, tertio autem 50, et stat pecunia capitalis primi tribus mensibus, secundi autem quinque, et tertii 6 mensibus: quero, quanta sit summa capitalis primi socii.

8. Quero numerum, qui si dividatur per 17, manent in residuo 15, eo autem diviso per 13, manent 11 residua, et ipso diviso per 10 manent 1103.
tria residua: quero, quis sit numerus ille.

1) Die Klammer gehört eigentlich hinter den nächsten Satz, vor das Kolon, aber sie steht in der Handschrift an der hier gegebenen Stelle.

Die zu diesen beiden Briefen gehörigen Rechnungen des Regiomontanischen Manuskriptes sind folgende:

21 (11)[a], col. 1.

| Primum interrogatum meum.

Stella existens in medietate celi descendentis, habens latitudinem septemtrionalem $\overline{20} \cdot 49'$, declinationem item borealem $\overline{35} \cdot 17'$: queritur locus eius, arcus etc. Supponitur maxima declinatio Solis $\overline{23} \cdot 30'$.

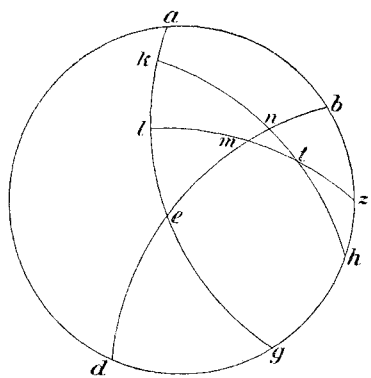


Fig. 7.

Ecce occurrit triangulus tzh trium notorum laterum (Fig. 7).

In figura secunda (Fig. 8) sit t polus circuli qy, erunt quoque duo arcus hx et zq noti, quoniam complementa arcuum tz et th notorum, quare proportio sinus zy ad sinum hy nota, cumque differentia arcuum sit nota, scilicet arcus hz, reliqua constabunt, si figuram tertiam (Fig. 9) respexeris.[1])

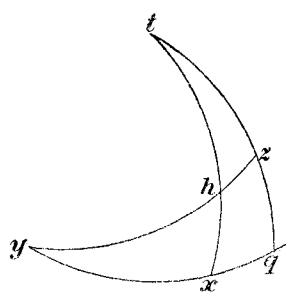


Fig. 8.

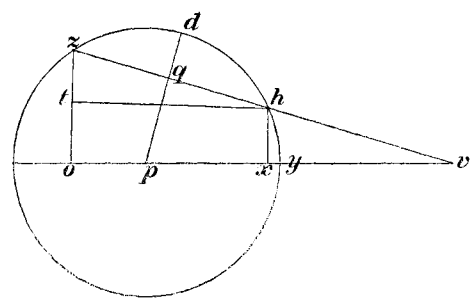


Fig. 9.

1) Regiomontan benutzt hier die im IV. Buche seiner Trigonometrie gelehrte, auch von Nasîr Eddîn gebrauchte Methode zur Bestimmung des Winkels aus den drei Seiten, wie sie v. Braunmühl S. 69 seiner „Vorlesungen über Gesch. der Trigon." in unserer Bezeichnungsweise dargelegt hat. An der betreffenden Stelle des Buches IV (Prop. XXXIV), der letzten des Buches, giebt Regiomontan kein durchgerechnetes Beispiel, es dürfte deshalb das hier folgende auch deshalb interessant sein, weil jede Rechnung wirklich ohne jede Auslassung durchgeführt ist. Die Aufgabe und ihre Lösung ist aber ein weiterer Beweis dafür, dass das IV. Buch der Trigonometrie schon 1463 vollendet vorlag.

$\overline{23} \cdot 30'$ arcus *hz*

$35 \cdot 17$

$54 \cdot 43$ arcus *tz*; 48978 sinus *tz*.

$20 \cdot 49$

$69 \cdot 11$ arcus *th*; 56083 sinus *th*.

34657 sinus *tl*, sive *zo*.

21323 sinus *tm*, sive *hx*.

$\overline{11} \cdot 45'$ medietas arcus *hz*; 12219 sinus arcus *dh*.

12219

24438 corda *zh*.

34657

21323

13334 linea *zt*.

| 13344 · 21323 col. 2.

24438

col. 3.

	11	
24438	62	
21323	3177	
73314	123718	3
48876	2328752	9
73314	521091474	0 [1]
24438	133444444	5
48876	1334444	0
521091474	13333	
	133	
	1	

| 39051 linea *hv*.[2] col. 4.

12219

51270 linea *qv*.

$\overline{11} \cdot 45'$ arcus *dh*.

$78 \cdot 15$ complementum *dh*. 58743 linea *pq*.

---

1) Hier ist wieder die letzte Ziffer um eins vermehrt worden.

2) Bei dieser Division hat sich Regiomontan zuerst dreimal verrechnet. Zunächst findet er 389 als die drei ersten Ziffern, dann 38301 als Quotient, beginnt dann nochmals mit 38, um dann endlich das richtige Ergebnis zu erhalten. Es erübrigt wohl die drei unrichtigen Rechnungen ebenfalls hier mitzutheilen.

21 (11)[b], col. 1.

| 51270
51270
3588900
10254
5127
25635
2628612900 quadratum *qv*;
3450740049
6079352949 quadratum *qv*.

58743
58743
176229
234972
411201
469944
293715
3450740049 quadratum *pq*.

1
16343
451992
1195746
6079352949
1 4 4 8 4
1 5 5 9
1 5 5
1 5
1

7
7
9 [1])
7
0

77970 linea *pv*.

col. 2.

| 77970 · 58743
60000

58743
60000
3524580000

132
1333
26934
4532581
74873642
3524580000|0
77977777
779999
7777
77

4
5
2
0
4

45204 linea *pq*, ut *pv* est 60000.

48 · 53′ angulus *pvq*.
41 · 7 angulus *vpq*.
11 · 45
29 · 22 arcus *hy*.
23 · 30
52 · 32 arcus *zy*.

1) Auch hier hat sich Regiomontan zweimal verrechnet und erst der dritte Anlauf giebt den richtigen Werth der Wurzel.

60 · 38 complementum arcus hy; 52290 sinus complementi hy.
37 · 8 complementum zy; 36220 sinus complementi zy.

56083 · 52290
60000

	114	
	23268	
	746791	
	35283312	5
52290	683255384	5
60000	3137400000	9
3137400000	560833333	4
	5608888	2
	56000	
	566	
	5	

| 55942 sinus complementi xy; $\overline{68} \cdot 49'$ complementum xy.[1]) col. 3.

48978 · 36220
60000

	1	
	64	
	345	
	16716	
	28171	
	522941	4
26220	2144677	4
60000	55748864	3
2173200000	2173200000	7
	489788888	0
	4897777	
	48999	
	488	
	4	

44371 sinus complementi qy; $\overline{47} \cdot 41'$ complementum qy.[2])

$\overline{68} \cdot 49'$
$\underline{47 \cdot 41}$
$\overline{21} \cdot 8$ arcus qx, est etiam quantitas anguli htz.

21632 sinus anguli htz.
23925 sinus arcus hz.

---

1) Nach der Sinustafel Regiomontan's ist sin $68^0 49' = 55946$.

2) Nach der Tafel ist sin $47^0 41' = 44366$, man sieht aus Allem, dass es auf Genauigkeit nicht ankommt.

23925 · 21632
48978

col. 4.

48978	12	
21632	431	
97954	194	
146934	2763	
293868	16815	4
48978	12249732	4
97956	2336184 31	2
1059492096	1059492096	8
	239255555	3
	2392222	
	23999	
	233	
	2	

44283 sinus anguli *thz*[1]); $\overline{47} \cdot 34'$ angulus *thz*.

Et tanta est distantia stelle a capite Cancri; est igitur in $\overline{17} \cdot 34'$ Leonis. Blanchinus habet $\overline{17} \cdot 37'$, verum ipse usus et declinatione maxima $\overline{23} \cdot 33' \cdot 30''$, quam in tabulis suis supponit.

22 (12)[a] | **Interrogata D. Ioannis Blanchini.**

Consideratio in villa Fosse nove Sancti Gillii in Ferrariensi districtu. Die 4[ta] Augusti 1463, Sole existente in $\overline{19} \cdot 48'$ Leonis ante meridiem accepi altitudinem eius, quam inveni $\overline{33} \cdot 49'$: quero horam post ortum ipsius, amplitudinem sui ortus, nec non distantiam umbre ipsius per circulum orizontis inter circulum altitudinis Solis et meridianum.

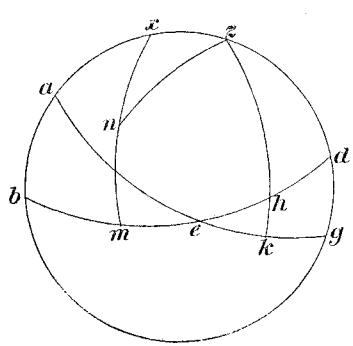


Fig. 10.

Quoniam in alio quesito dedit latitudinem Ferrarie $\overline{44} \cdot 45' \cdot 4''$, utor eadem latitudine nunc $\overline{44} \cdot 45'$; de secundis enim curare non utendo (Fig. 10).

$\overline{14} \cdot 57'$ declinatio Solis septemtrionalis
44 · 45 arcus *zd*; 42241 sinus *zd*; secundus,
45 · 15 arcus *dg*; 42611 sinus *dg*; primus,
14 · 57 arcus *hk*; 15479 sinus *hk*; tertius,
75 · 3 arcus *hz*; 57969 sinus *hz*; quartus,
60000 (sinus totus); quintus.

1) Hier hätte die letzte Ziffer um 1 erhöht werden müssen. In Regiomontan's Tafel ist der betreffende Sinus auch = 44284.

	12	
42241	235	
15479	13972	
380169	129256	
	2468675	1
295687	237733195	5
168964	653848439	3
211205	426111111	4
42241	4261111	4
653848439	42666	
	422	
	4	

col. 2.

	36	
	258	
	722	
	4883	
	155973	
15345	5114944	1
60000	9626726	5
920700000	341515882	8
	920700000	8
	579699999	2
	5796666	
	57999	
	577	
	5	

15883 sinus *ek*; $\overline{15} \cdot 21'$ arcus *ek*.

$$\begin{array}{r} 90 \\ \hline 105 \cdot 21 \end{array}$$ arcus semidiurnus.

Respice secundam figuram (Fig. 11). col. 3.

60000 · 42241
15479

42241
15479
380169
295687
168964
211205
42241
653848439

542
653848|8439
10897

10897 linea *kl*, et est sinus altitudinis Solis distantis a meridie per 6 horas equales.

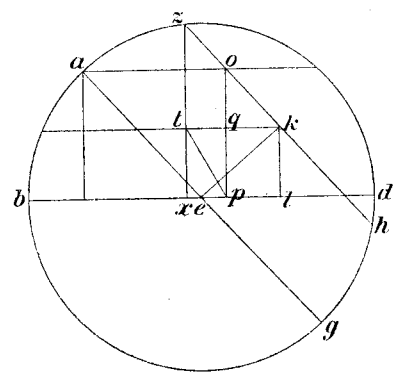


Fig. 11.

$\overline{33} \cdot 49'$ altitudo Solis considerata.

33392 sinus huius altitudinis, et est linea *op*

10897

22495 linea *oq*; $\overline{14} \cdot 57'$ arcus *dh*

$45 \cdot 15$

$\overline{60 \cdot 12}$ altitudo Solis meridiana

col. 4. | 52066 sinus huius altitudinis

10897

41169 linea *zt*

41169 · 60000

22495 /

	1
	12
	28
	49
	57
	38855
22495	43267
60000	24951
1349700000	3461394
	116932784
	1349700000
	411699999
	411666666
	41111
	411
	4

3
2
7
8
4

32784 sinus complementi distantie Solis a meridie,

$\overline{33} \cdot 7'$ complementum distantie a meridie.[1])

$56 \cdot 53$ distantia a meridie.

$105 \cdot 21$

$56 \cdot 53$

$48 \cdot 28$ arcus equinoctialis, per quem ascendit in tempore ab ortu Solis.

$3^{ha}\ 13^{ma}\ 52^{2a}$ tempus, quod percurrit ab ortu Solis.

22 (12)[b], col. 1. | Pro amplitudine ortus.

42611 · 60000

15479 /

1) Nach der Tafel ist sin $33^0 7' = 32781$.

	2 3	
	3 6	
	44372	
	3554135	
15479	7389246	2
60000	186529315	1
928740000	928740000	7
	426111111	9
	4261111	5
	42666	
	422	
	4	

21796 sinus arcus *eh*[1]); $\overline{21} \cdot 18'$ arcus *eh*, amplitudo scilicet ortus septemtrionalis.

Nunc pro arcu orizontis inter circulum altitudinis et meridiani.

$\overline{33} \cdot 49'$ altitudo Solis

$56 \cdot 11$ arcus *xn*, et est complementum altitudinis Solis.

49849 sinus *xn*.

$\overline{56} \cdot 53'$ distantia Solis a meridie, et est quantitas anguli *nzx*

50254 sinus huius distantie

57969 sinus *nz*.

49849 · 50254

57969

	14	
	45	
	1538	
	2796	
57969	5927	
50254	13984	5
231876	2291281	8
289845	12833639	4
115938	461722555	3
289845	2913174126	9
2913174126	298499999	
	4984444	
	49888	
	499	
	4	

col. 2.

58440 sinus anguli *nxz*.[2])

Cum autem hic sinus duos habeat arcus sive angulos, videndum primo

1) Hier ist wieder die Erhöhung um eine Einheit eingetreten. 2) Desgleichen

est, an angulus *nxz* sit minor recto aut maior eo, quod quidem docebit altitudo Solis in circulo orientis.

42241 · 15479
60000

	2	
	239	
	34623	
	56866	
	184287	2
15479	4367398	1
60000	184929124	9
928740000	928740000	8
	422411111	6
	4224444	
	42222	
	422	
	2	

21896 sinus altitudinis Solis in circulo orientis

$\overline{21} \cdot 30'$ altitudo Solis in circulo orientis.[1])

col. 3. | Cum autem altitudo Solis considerata excedat hanc, constat Solem iam transcire circulum orientis.

$\overline{76} \cdot 54'$ arcus *bm* quesitus.[2])

Hec de primo quesito.

Secundum interrogatum (Blanchini).

Quedam stella in $\overline{9} \cdot 15'$ Leonis, cuius latitudo septemtrionalis $\overline{57} \cdot 2'$: quero, si per alium calculum declinatio ipsius vere est $\overline{69} \cdot 35'$; deinde altitudinem eius ab orizonte hora 3 minuto 25 post ipsius separationem a linea meridiana.

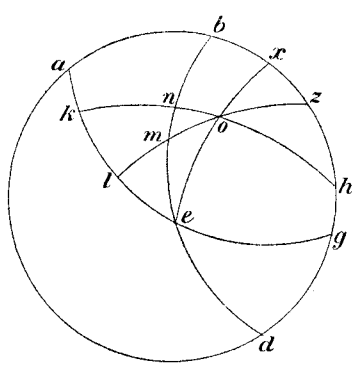


Fig. 12.

Ipse usus est modo Ptolemei, quamvis per tabulas suas primi mobilis computaverit. Igitur alium modum, quem querit, attentabo (Fig. 12).

Sit *aeg* medietas equatoris, cuius polus *z*, et *bcd* dimidia ecliptica, cuius polus *h*. Ponatur autem stella in medietate zodiaci descendenti, habens locum,

1) Nach seiner Sinustafel ist sin 21°30′ = 21990.
2) Hier ist der Sinus = 58439.

qui sit o. Ex puncto o ad colurum descendat perpendicularis ox aut eox et habebis per figuram sectoris:

$\overline{39} \cdot 15'$ angulus ohx; 37962 sinus anguli ohx
$57 \cdot 2$
$32 \cdot 58$ arcus oh; | 32649 sinus arcus oh col. 4.

60000 · 37962
32649

37962
32649
341658
151848
227772
75924
113886
1239421338

3
123942|1338
20657

20657 sinus ox; $\overline{20} \cdot 8'$ arcus ox[1])
$69 \cdot 52$ complementum arcus ox
56334 sinus huius complementi; $57 \cdot 2$ complementum arcus oh
50339 sinus huius complementi; et est sinus arcus on.

56334 · 50339
60000

50339
60000
3020340000

4
25
37
1837
46488
575422
23363734
555858664
3020340000
563344444
5634333
56333
566
5

5
3
6
1
4

53615 sinus complementi arcus hx; $\overline{63} \cdot 20'$ complementum arcus hx[2])
$26 \cdot 40$ arcus hx
| $23 \cdot 34$ 23(14)[x], col. 1.
$3 \cdot 6$ arcus zx
$86 \cdot 54$ complementum arcus zx.
59912 sinus huius complementi zx.

1) In der Tafel ist sin 20°8′ = 20652.
2) In der Tafel ist sin 63°20′ = 53618, die letzte Ziffer um eins erhöht.

```
60000 · 59912
56334/
        59912
        56334
       ------
       239648
      179736
     179736
    359472
   299560
   ---------
     13  2
   337308|2608
    56251
```

56251 sinus complementi arcus *oz*; est autem et sinus declinationis quesite $\overline{69} \cdot 38'$ declinatio huius stelle[1]), sed ipse habet $\overline{69} \cdot 35'$.

Nunc pro altitudine huius stelle supra orizontem.

Accipe secundam figuram primi quesiti.

```
60000 · 42241
56251/
        56251
        42241
       ------
        56251
      225004
     112502
    112502
   225004
   ---------
     33  3
   237609|8491
    39601
```

39602 linea *kl*, et est sinus altitudinis stelle in circulo orientis.

```
   45 · 15'
   69 · 38
  ---------
  114 · 53
col. 2. | 180 ·
  ---------
    65 ·  7
```

altitudo eius meridiana maxima. Hec enim stella non oritur, neque occidit.

1) In der Tafel ist sin 69°38′ = 56249.

54430 sinus huius altitudinis meridiane
39602
14828 linea *zt.*
45 ·
6 · 15′
51 · 15 distantia stelle a meridie
38 · 45 complementum huius distantie
37555 sinus huius complementi.

60000 · 14828
37555
14828
37555
74140
74140
74140
103796
44484
14
55686|5540
9281

9281 linea *oq*
39602
48883 sinus altitudinis stelle; 54 · 34′ altitudo stelle quesita.[1])

| Accipe autem distantiam eius stelle a meridiano in sinistriori parte· col. 3.
Bonum fuisset etiam describere specialiter figuram, cum stella illa bis supra terram ad meridianum perveniat. Sed de hoc satis.

Tertium quesitum.

Quero duos numeros in proportione 5 ad 8, quorum multiplicatio equalis sit aggregationi eorum.[2])

1) In der Tafel ist sin 54°34′ = 48887.

2) Das ist in moderner Bezeichnung:

Die erste Zahl sei x, dann verhält sich $5 : 8 = x : y$, also $y = \frac{8}{5}x$. Die beiden Zahlen sind also x und $\frac{8}{5}x$, folglich

$$\frac{8}{5}x^2 = \frac{13}{5}x, \quad \text{also}$$

$$x = \frac{13}{5} : \frac{8}{5} = \frac{13}{8} \qquad y = \frac{13}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{104}{40} = \frac{13}{5}$$

Probe:

$$x + y = \frac{13}{8} + \frac{13}{5} = \frac{65 + 104}{40} = \frac{169}{40}; \qquad x \cdot y = \frac{13}{8} \cdot \frac{13}{5} = \frac{169}{40}.$$

Sit primus 1 ℛ.

$$\begin{array}{ccc} 5 \cdot 8 & & \\ 1\ \mathcal{R} & & 1\ \mathcal{R}\ \frac{8}{5}\ \mathcal{R} \end{array}$$

$$\frac{8}{5}\ \mathcal{C} - \frac{13}{5}\ \mathcal{R}$$

$$\frac{13}{5} \quad \frac{8}{5} \qquad \frac{13}{8} \text{ valor unius rei.}$$

$$\frac{13}{8} \cdot \frac{8}{5} \quad \text{(Der Punkt steht im Originale.)}$$

$$\frac{104}{40} \text{ valet } \frac{13}{5}$$

$$\text{Primus } \frac{13}{8}, \quad \text{secundus } \frac{13}{5}$$

Proba.

$$\begin{array}{cc} 65 & 39 \\ \underline{104} & \underline{13} \\ \underline{169} & \underline{169} \\ 40 & 40 \end{array} \quad \text{bene stat.}$$

col. 4. | **Quartum interrogatum.**

Divisi 10 in duos, quorum maiorem per minorem divisi, item minorem per maiorem. Numeros quotiens coniunxi, et fuit summa 25: quero, que sint partes.[1])

1) In moderner Bezeichnung:

$$\overset{10}{\frac{x}{10-x}, \quad \frac{10-x}{x}}$$

$$\begin{array}{r} 100 - 10x \\ x^2 - 10x \\ x^2 \\ \hline 2x^2 + 100 - 20x \\ \hline 10x - x^2 \end{array} = 25$$

$$250x - 25x^2 = 2x^2 + 100 - 20x$$

$$270x = 27x^2 + 100.$$

Durch 27 dividiert:

$$10x = x^2 + \frac{100}{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & \underline{27 \cdot 25} \\ 25 - \frac{100}{27} & \underline{135} \\ & \underline{54} \\ & \underline{675} \\ & \underline{100} \\ 575 : 27 = 21\frac{8}{27} & \frac{575}{27} \text{ davon die Wurzel} \end{array}$$

Eingeheft. Zettel (13)a.

$$\mid 10$$

$$\begin{array}{l}
\underline{1\ \mathcal{R}} \qquad\qquad \underline{10\ \overline{\text{ig}}\ 1\ \mathcal{R}} \\
\quad 10\ \overline{\text{ig}}\ 1\ \mathcal{R} \qquad\qquad 1\ \mathcal{R} \\
\quad 100\ \overline{\text{ig}}\ 10\ \mathcal{R} \\
\quad 1\ \mathcal{C}\ \overline{\text{ig}}\ 10\ \mathcal{R} \\
\quad \underline{1\ \mathcal{C}} \\
\quad \underline{2\ \mathcal{C}\ \text{et}\ 100\ \overline{\text{ig}}\ 20\ \mathcal{R}} \quad - 25 \\
\qquad 10\ \mathcal{R}\ \overline{\text{ig}}\ 1\ \mathcal{C}
\end{array}$$

$$250\ \mathcal{R}\ \overline{\text{ig}}\ 25\ \mathcal{C} - 2\ \mathcal{C}\ \text{et}\ 100\ \overline{\text{ig}}\ 20\ \mathcal{R}$$

$$270\ \mathcal{R} - 27\ \mathcal{C}\ \text{et}\ 100.$$

Omnia per censum

$$10\ \mathcal{R} - 1\ \mathcal{C}\ \text{et}\ \frac{100}{27}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
5 & & 27 \\
25\ \overline{\text{ig}}\ \frac{100}{27} & & \underline{25} \\
 & & 135 \\
 & & \underline{54} \\
1 & & 675 \\
138 & 21\frac{8}{27} & \underline{100} \\
575 & & \underline{575} \\
277 & & \underline{27} \\
2 & & \text{huius radix}
\end{array}$$

$$5\ \overline{\text{ig}}\ \text{Radice de}\ 21\frac{8}{27},\ \text{ecce valor rei,}$$

$$\underline{5\ \text{et Radix de}\ 21\frac{8}{27}\ \text{secunda pars.}}$$

$$25 \qquad \frac{575}{27}$$

$$5 - \sqrt{21\frac{8}{27}} = x,$$

$$5 + \sqrt{21\frac{8}{27}} = 10 - x.$$

$$5^2 = 25 \qquad \sqrt{21\frac{8}{27}}^{\,2} = \frac{575}{27},\quad \text{Differenz} = \frac{100}{27},$$

also ist der zweite Theil das vierte Binomium (Euklid's), und der erste Theil das vierte Recisum.

Regiomontan hat sich bei dieser Gleichung zuerst vielfach verrechnet. Er sagt selbst von sich *„precipitasti te“*, hat dann aber auf einem eingehefteten Zettel nochmals klar, deutlich und fehlerfrei das geschrieben, was ich habe drucken lassen.

$$\begin{array}{r} 675 \\ 575 \\ \hline 100 \\ \hline 27 \end{array} \text{ differentia qudratorum.}$$

Igitur secunda pars est binomium quartum, et prima pars recisum eius.

23(14)[b], col. 2.

| Aliter.

Necesse est, quod duo numeri quotientes in se multiplicati unus in alterum producant unitatem.

Sit ab 10, df unitas; divisa db per ad exeat de. Fit ergo proportio bd ad da sicut de ad df, et coniunctim sicut ba ad ad ita ed et unitas ad unitatem. Quare quod fit ex unitate in 10, scilicet 10, equatur ei, quod fit ex ed et unitate in ad. Divide igitur 10 per ed et unitatem, scilicet per numerum quotiens cum unitate, et exibit ad (Fig. 13).

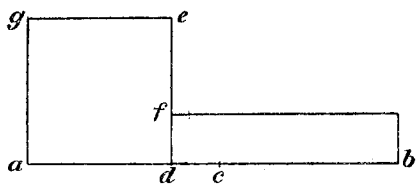


Fig. 13.

$$\frac{25}{2} \text{ in se; } \begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 625 \\ \hline 4 \end{array}; \text{ ab hoc subtraho 1.}$$

$$\frac{621}{4}, \text{ huius radix est } de.$$

$\frac{25}{2}$ ꝝ ℞ de $\frac{621}{4}$ primus quotiens; $\frac{25}{2}$ et ℞ de $\frac{621}{4}$ secundus quotiens.

$$\frac{10}{\frac{27}{2} \text{ ꝝ ℞ de } \frac{621}{4}} \text{ prima pars;}$$

$$\frac{10}{\frac{27}{2} \text{ et ℞ de } \frac{621}{4}} \text{ secunda pars.}^{1)}$$

---

1) Regiomontan setzt $\frac{x}{10-x} = y$ und hat also die Gleichung $y + \frac{1}{y} = 25$, also $y^2 + 1 = 25y$, woraus $y = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - 1}$, also

$$y = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{621}{4}} \text{ folgt.}$$

Es folgen jetzt die Antwort BIANCHINI's auf den zweiten Brief REGIOMONTAN's und die Antwort des letzteren auf jenen Brief. Ihnen lasse ich wieder die auf sie bezüglichen Rechnungen REGIOMONTAN's folgen.

IV.

Bianchini an Regiomontan.

| Ex Ferraria 1464, die 5. februari. 41(33)[a]

Responsiones ad quesita vestra sunt hec.

Primum quesitum est: Stella in ♅ 10 ♏ 25 Tauri latitudine carens, et alia in ♅ 27 ♏ 29 Tauri absque latitudine, tertia autem latitudinem habens septemtrionalem distat a prima per ♅ 6 ♏ 18, a secunda autem ♅ 20 ♏ 47: queritur verus locus et latitudo huius tertie stelle.

Hec propositio non videtur per demonstrationem terminari posse, nisi declaretur alterum duorum, latitudo scilicet huius tertie stelle aut locus ipsius in ecliptica, dato quod per 12[am] et 13[am] secundi[1]) inveniatur perpendicularis, sed in hoc non valet questio.

Secundum quesitum: Due stelle fixe ab ecliptica versus septemtrionem elongate, quarum latitudo unius est ♅ 9 ♏ 26, alterius vero ♅ 35 ♏ 53, et distantia inter corpora stellarum est ♅ 9 ♏ 45: queritur, quantum distent loca sua in ecliptica.

Propositio hec male posita videtur et impossibilis terminari. Nam si ab eodem puncto ecliptice per latitudinem declinantur, manifestum est, quod distantia inter corpora ipsarum erit ♅ 26 ♏ 27. Si vero adversis punctis ecliptice declinantur, necessario linea protracta a centro ad centrum prope ultimam sui curvatio longior erit quam ♅ 26 ♏ 27. Sed prius brevior ponitur, quod est impossibile, ergo videtur male posita.

⁜[2]) Tertium quesitum. Est circulus diametrum habens 60 pedum. Huic inscriptum est quadrangulum, cuius quatuor latera proportiones

---

Es ist also der erste Quotient $= \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}$, der zweite $= 25 + \sqrt{\frac{621}{4}}$.

Die Rechnung ist aber so weiter geführt: Es ist $\frac{x}{10-x} = \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}$, und daraus

$x = \frac{10}{\frac{27}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}}$ und ebenso $\frac{10-x}{x} = \frac{25}{2} + \sqrt{\frac{621}{4}}$, also $10 - x = \frac{10}{\frac{27}{2} + \sqrt{\frac{621}{4}}}$.

Dass diese beiden Werthe in umgekehrter Reihenfolge die in der ersten Lösung gegebenen sind, ist leicht zu beweisen.

1) Das ist der Geometrie des EUKLIDES.

2) Dieses Zeichen hat REGIOMONTAN zugesetzt. Man sehe dasselbe Zeichen oben in dem Briefe REGIOMONTAN's neben Aufgabe 3.

habent, quantam illi numeri 4 · 7 · 13 · 17: queritur, quanta sit area huius quadranguli.

Si vero hec propositio presupponit latera quadranguli supra circumferentiam circuli, facilis erit hec conclusio per regulam Archimedis aut Arsemidis[1]) allegati per Ptholomeum, sed si quadrangulum presupponitis ex lineis rectis, ut sint corde suposite arcubus, michi videtur impossibile pro libito linearum quatuor cordas suppositas quatuor arcubus includentibus superficiem proportionem inter se habentes pro libito compositoris, nec puto possibile esse, dare quatuor angulis contentis a quatuor rectis lineis
41(33)[b] ex diversis | proportionibus includentibus superficiem, et invenire commune centrum equidistantem illis quatuor angulis. Non est proportio inter cordam et cordam, qualis est inter circulum et circulum, nec est proportio numeralis inter costam et diametrum, prout 7[ma] decimi[2]) demonstrat.

Minime etiam videtur possibile, includere in spera piramidem sex diversorum laterum pro libito proportionalium, prout in quarto quesito dicitur. Nihilminus, si super hoc viderem demonstrationem, aquiescerem et libenter audirem solum de quadrangulo conclusionem, solumodo quantitas cordarum suppositarum toti circulo, que sint in proportione ut 5 · 7 · 9 · 12.

Quintum quesitum: Sunt duo numeri, quorum differentia est radix de 5, et quadratum (!) dictorum numerorum si multiplicantur alter in alterum, producentur 250: queritur, que sint illi numeri.

Manifestum est, quod productum numeri quadrati per numerum quadratum semper et omnino erit numerus quadratus. Sed 250 non est numerus quadratus: ergo impossibile est, quod productus duorum numerorum quadratorum constituat 250, igitur etc[a].

Sextum: Quidam mercator cum 100 ducatis in primo anno lucratus est aliquid; deinde in secundo anno cum capitali, id est cum 100 ducatis, et lucro primi anni lucratus est, proportionaliter ut in primo; tertio anno item cum capitali et duobus lucris annorum preteritorum proportionaliter lucratus est. Quo computato in universo ex capitali et tribus lucris coligit ducatos 265: queritur, quantum in primo anno lucratus sit.

Si hoc fecerimus per regulam argebre, proveniet, quod res, census et
42(34)[a] cubus equantur numero, et concluderetur quod 100 ducati cum lucro | primi anni secum lucrati sint radix cubica de 2650000 detractis ab ipsa radice 100. Sed multa similia per regulam argebre difficillime concluderentur, tamen in libro florum hec demonstravi et dedi regulam universalem ad omnem proportionem.[3])

1) Die korrumpierte Form des Namens Archimedes.

2) Geometriae Euclidis.

3) Die Lösung ist richtig. Sie zeigt, dass man die Zinseszinsaufgaben da-

Septimo: Sint tres socii, qui communiter posuerunt 70 ducatos et lucrati sunt cum eis ducatos 20, quorum primo cedunt pro capitali et lucro ducati 15, secundo autem ducati 25, tertio etiam pro capitali et lucro ducati 50, et stat capitalis primi tribus mensibus, secundi autem quinque mensibus, et tertii stat 6 mensibus: queritur, quanta sit summa capitalis primi socii.

Hec propositio, prout ponitur, a me non intelligitur. Si enim 3 socii communiter posuerunt 70, videtur quilibet posuisse tertiam partem videlicet $23\frac{1}{3}$, et si primo cederunt ducati 15, ut ponitur, videtur perdidisse de capitali, et non lucratus esset. Deinde dicitur, quod pecunia capitalis primi stetit mensibus tribus, sequitur, quod alii socii, qui remanserunt, traficati sunt cum minori summa capitali quam ducatis 70, videlicet cum ducatis 55; similiter finitis 5 mensibus, quibus secundus socius extravit ducatos 25, tertius cum minori summa etiam traficatus est. Considerandum ergo est, quod cum minori capitali minus lucrum sequitur. Non intelligo opinionem quesiti, si melius non declaretur.

Octavo et ultimo queritur numerus, qui si dividitur per 17, remanent in residuo 15, eo diviso per 15 manent 11 in residuo, et ipsum divisum per 10, manent 3.

Huic quesito multe responsiones dari possent cum diversis numeris, qui propositionem concluderent, ut 1103, 3313 et alii multi. Sed in hoc non curo laborem expendere, in aliis numeris invenire.[1]) | 42(34)[b]

Et ut videre possit reverentia vestra, familiariter et domestice vobiscum loquor, et hoc, quia volo vos mecum similiter faciatis.

Prosequendo enim colationis gratia quero decisionem infra scriptorum dubiorum, videlicet:

1. Tres stelle sunt, ex quibus duo super eodem gradu ecliptice dicuntur esse, sed per latitudinem ab ipsa declinant versus septemtrionem, prima scilicet per g̃ 3 m̃ 25, secunda vero per g̃ 28 m̃ 48. Tertia autem stella ipsas sequens per longitudinem secundum successionem signorum videlicet in g̃ 6 m̃ 15 Geminorum cum latitudine g̃ 12 m̃ 9 septemtrionali, cuius distantia a prima stella per arcum orbis magni a centro ad centrum est g̃ 26 m̃ 40: queritur distantia ipsius a secunda stella atque loca prime et secunde stelle in ecliptica.

2. Ego divisi 100 per certum numerum, deinde divisi 100 per eundem

---

mals schon richtig zu behandeln verstand. Der *Liber florum Almagesti,* wie der volle Titel des Werkes von Bianchini hiess, ist nicht auf uns gekommen, wenn er sich nicht in irgend einer italienischen Bibliothek wiederfinden sollte.

1) Bianchini kennt also die allgemeine Lösung nicht, die in dem Antwortschreiben Regiomontan vollständig giebt.

divisorem sibi addito 8, et numeros cotientes prime et secunde divisionis aggregavi, et fuerunt in summa 40: queritur quantitas primi divisoris.

3. Quidam accessit ad campsorem cum 10 florenis, et ipsos cambiavit in grossos Venetorum, pro quibus accepit certos grossos. De qua summa extrassit 60 grossos et ipsos recambiavit in florenos ad eandemmet rationem, sicut primo fecerat. Hoc facto reperit, se habere communiter grossos et florenos 80: queritur precium florenorum ad grossos.

4. Quidam mercator in primo anno cum 100 ducatis lucratus est certum quid, prout in sexto quesito vestro dicitur, et sic procedit de anno in annum cum capitali et lucro lucrari in simili proportione sicut in primo. In fine autem sex annorum in universo inter capitale et sex lucris habuit ducatos 900: queritur proportio lucri primi anni.

5. Die 6° octobris prossime preteriti 1463 in hac regione vobis nota
43(35)[a] visa est stella de orizonte orientali distans per arcum orizontis a contactu | meridiani g̃ 60 m̃ 30, et hoc per horas 3 minuta 36 equales ante ortum Solis: queritur locus ipsius verus in ecliptica et latitudo ab ipsa.

6. Duo circuli sunt. Primus videlicet habens diametrum 60 pedum, secundus vero habens diametrum 68 pedum. Qui secundus circulus supraponitur primo, diametrus supra diametrum, occupando de diametro primi 50 pedes: queritur quanta de superficie seu de area primi occupabitur.

7. Construxi tabulam de cordis et arcubus particularibus, et per doctrinam Ptholomei per viam mediationis, duplationis, copulationis et residui ex istis nullo modo perveniri potest ad inveniendum cordam unius gradus, nec in eternum perveniri potest. Dico autem, quod, si dividerimus angulum in tres partes equales, habebimus cognitionem corde uninus gradus et particulariter de omnibus aliis gradibus pro libito: quero igitur divisionem anguli continentis de circulo g̃ 60, qui arcus notus est, et cordam ipsius esse medietati diametri equalem. Sed tertia pars erit corda 20 graduum, quando possibilis est.

8. Tres socii sunt, et quilibet pro se habet denarios in marsupio. Duo vero primi absque tertio habent denarios 30, duo autem secundi absque primo habent denarios 42, et duo alii absque secundo habent denarios 54: queritur, quot denarios quilibet de per se habeat.

Et hoc volo sufficiant. Quantum ad regulas argebre, de quibus comprehendo, vos doctissimum esse, ego quidem in iuventute, dum operationem mercantium operarem, aliquantulum in hoc me delectavi, sed hoc in me venia facta sit. Nescio autem, quo facto hoc astrologica scientia magnopere delectatus sim, et inter meas occupationes, quas ex erario illustrissimorum dominorum meorum habui, causam adamandi et animum reficiendi per intervalla temporis spatium ad astrologie calculum me dedi et transtuli et

totis viribus conatus sum, ipsum reducere ad brevitatem et ad facilitatem calculandi, ex quibus aliquas tabulas construxi, in quibus calculus facilis seriose invenitur, in me | suscipiendo fere omne onus et difficultatem cal- 43(35)[b]
culandi, prout videre potueritis tam de motibus planetarum, quam de primo mobili et de eclipsibus. Vidi etiam certas rubricas per vos michi transmissas tabularum vestrarum, que mihi magnopere placuerunt, quia bene posite et necessarie sunt, et modos operandi tabulas ipsas intellexi, quia dicitis in angulo communi omnia reperire, ex quibus tantum comprehendo, multas tabulas necessario esse constructas. Et quia multa necessaria quesita occurrunt, ex quibus etiam oportet alias habere tabulas, puta, vidi tabulas vetustas pro inveniendo latitudines planetarum, in quibus intratur cum centro et cum argumento medio planetarum, et in angulo communi inveniuntur latitudines planetarum. Tamen primo oportet, habere tabulas inveniendi medii motus, auges, centra, et argumenta etc., et quilibet planeta de per se oportet habere tabulam. Sed inventio pulcherrima est: ego quidem construxi tabulam pro multiplicando et dividendo, in quibus multiplicanda de 10 minutis in 10 minuta, in angulo communi invenitur productus, in dividendi etiam, invento in parte superiori numerum divisorem et descendendo numerum dividendum, ipsius directo ad sinistrum inveniatur numerus cotiens, que operatio illis, quibus laboriosius est multiplicare et dividere, facilis redditur.[1]) Non dico de capitulis tabularum mearum, quas vidistis grosso modo compositas, tamen fideliter composui et cotidie alias illis adiungo, quia exercitium illum valde mihi delectabilem occupationibus meis remedium optimum invenio.

In decisione quesiti vestri alias per me facta, quando dixi, stellam, que presuposita erat in g̃ 9 m̃ 15 Leonis mediare celum cum g̃ 20 m̃ 37 Virginis, dixi ipsam declinare ab ecliptica per latitudinem septemtrionalem g̃ 57 m̃ 2, et ab equinoctiali per declinationem g̃ 69 m̃ 38. Si autem dixi g̃ 69 m̃ 35, fuit error calami. Sed hec non curo. Quesivi autem a vobis, si per alium calculum | declinatio ipsa inveniebatur difformis ab 44(36)[a]
ista. Vos autem interlisistis, si per alium calculum perscruptari possetis declinationem ipsam, et subtiliter per tres figure sectoris demonstrationes notabiliter et bene ipsam conclusionem verificando decidistis eandem esse declinationem, et si intentionem quesiti mei exprimere non valui, modestie vestre patientiam queso, nam scio, quod per plures et quasi infinitas de-

1) Eine solche Tafel hat noch am Ende des XVI. Jahrhunderts Christoph Rothmann aus Bernburg berechnet. Sie findet sich im Msp. mathem. 4° 29 zu Kassel. Rothmann legt dort überhaupt eine Lanze für die Sexagesimalrechnung ein, bedient sich aber bei seinen trigonometrischen Rechnungen durchaus nur der nach Decimalrechnung gefertigten Tafeln.

monstrationes veritas elucescit, et specialiter per demonstrationes, que per figuram sectoris demonstrantur. Nam in tractatu, quem de floribus almagesti construxi, concluse sunt 150 diverse proportiones, ex quibus una ex duabus alliis componitur. Non dico de figura infrascripta per vos magistraliter lineata cum linea a centro coluri per centrum stelle protracta (Fig. 14), et concludendo dicitis, quod proportio *eb* ad *bn* componitur ex proportionibus *ex* ad *xo* et *oh* ad *hn*: dico etiam, quod proportio *ex* ad *xo* componitur ex proportionibus *hn* ad *oh* et *eb* ad *bn*. Item proportio *oh* ad *hn* componitur ex proportionibus *bn* ad *be* et *ex* ad *xo*, et similiter multe alie dari possunt. Et super hoc construxi tabulam seriosam precedentibus primo demonstrationibus. Dico etiam per lineam paralleliter protractam a centro coluri, per quam causatur triangulum *ea* et *ex*, scilicet *eax* dato puncto *o* distantiam a centro *e*, invenietur arcus *ok*, qui est declinatio scilicet Io. Blanchini. Item arcus *no*, qui est latitudo ab ecliptica. Item arcus *al*, que est declinatio vera etc., que non dubito in tractatu vestro de triangulis demonstrata per vos doctissimum sint.

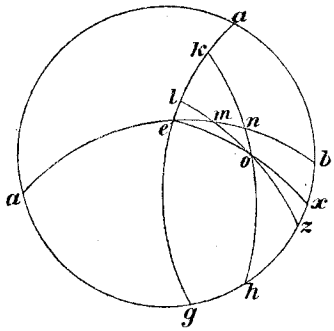


Fig. 14.

Cupio autem cum aviditate illum habere, quia in hac positione de tri-
44(36)[b] angulis non me tractavi | multum, dico in triangulis spericis, nisi quantum mihi visum est ad demonstrandam distantiam stellarum adinveniendam, et quia non dubito, tractatum ipsum e manibus vestris compilatum seriosum et copiosum esse. Valde ipsum gratum haberem solvendo scriptori mercedem. Regratior enim vobis de oblatione michi de ipso facta, quando in manu habebitis, et ego me offero, domino concedente, per quantum vires ingenioli mei se extendebunt, ipsum nomine vestro predicare et super ipsum ad vestri gloriam aliquid commentum fabricare.

Ad quesitum autem meum non bene expressum revertendum dico, quod, ut vobis notum est, invenire declinationem veram stelle ab equinoctiali maximum et quasi unicum fundamentum est in omnibus calculis astrologie, et ipso deficiente omne edificium super ipsum constructum in ruinam cadet. Vidi, per aliquos auctores doctrinam dari ad inveniendum declinationem stelarum habentium latitudinem, quorum doctrina est, accipere latitudinem stelle atque declinationem gradus ecliptice, in quo videtur stella esse, et si ambo sunt in eadem parte, septemtrionali scilicet aut meridionali, ipsas copulare, si vero una fuerit meridionalis, altera vero septemtrionalis, demere minorem a maiori, et quod post copulationem aut subtractionem perveniat,

elongationem stelle ab equinoctiali nominant, cuius dicunt accipiendum esse sinum. Nam prima fronte doctrina ipsa videtur falsa, quare arcus latitudinis et arcus declinationis quilibet procedit a suo polo, et sunt duo diversi arcus se secantes supra centrum stelle, nec ex ipsis solam sinus aut cordam accipi potest. Dicunt etiam, dictum sinum multiplicari debere per sinum aut cordam residui maxime declinationis, et productum dividere per sinum residui sciti complementi declinationis ecliptice, et hoc modo dicunt, declinationem veram stelle cum sua latitudine invenire. | Certe nescio hanc 45(37)[a]
demonstrationem lineare, nec invenio Albategni ipsam demonstrasse, sed narrando regulam ipsam ultro concludit. Miror etiam de Ioanne Anglicano[1]) peritissimo et docto, qui in suo commento supra tabulas Toletanas per Arzachelem constructas hoc affirmat absque demonstratione, et propter hoc declarari a vobis volebam, si per aliquam demonstrationem hoc verificabatur, quia declinationes per hunc canonem invente notabiliter diferunt a declinationibus per tabulas per me constructas, et dico, quod omnes calculi actenus super hoc fundamentum facti male concludunt. Et hoc demonstravi in libro florum, atque narravi in tractatu de primo mobili, ubi dedi regulam ad hoc inveniendum et faciliter cum tabulis per me compositis, videlicet in tabula rubricata *„Tabula declinationis per arcum latitudinis secundum Io. Blanchinum“*, prout est linea *kn* secta per arcum transientem per utrosque polos zodiaci, et per *„Tabulam radicum“* etiam secundum me, in qua inveniantur ascensiones, ut arcus *ak*, cum quibus ad multas proportiones notabiliter et optime concluditur. Puta data est stella in g̃ 9 m̃ 15 Leonis cum latitudine g̃ 57 m̃ 2, et quero declinationem ipsius. Primo invenio declinationem ipsam in Tabula secundum Ioannem Blanchinum, quam invenio g̃ 18 m̃ 39 s̃ 30, quos subtraho de 90, restant g̃ 71 m̃ 20 s̃ 30, cum quibus in tabula magistrali prima invenio numerum corrispondentem 9675, quos ex parte scribo. Postmodum copulabo latitudinem cum supra scripta declinatione, quia sunt in eodem arcu et in eadem parte, eruntque in summa g̃ 75 m̃ 41 s̃ 30, quorum sinus per tabulas invenio in numeris 50138, quos multiplico per numerum supra salvatum, et producuntur secundum doctrinam canonum 56249 fere, ex quibus per tabulam sinus invenio arcum g̃ 19 m̃ 38, et hec est vera declinatio stelle. | 45(37)[b]

Quia preteritis diebus continue moram traxi Zure, ut alias vobis dixi, nec habui nuntium vobis transmittendi responsiones ad quesita vestra, namque ex mandato Illustrissimi D. mei die 2° instantis mensis huc ad offi-

---

1) Es ist das Johannes Ashenton, der um 1348 ein Buch beendete mit dem Titel: *Summa astronomica sive iudicialis de accidentibus mundi* gewöhnlich *Summa Anglicana* genannt.

cium meum veni, et presenti hora per veniam prefati Ill^{mi} D. mei raptim literas istas egregio viro TASSINO destinavi, ut vobis fideliter reddat, correptionibus vestris omnia subiacebunt.

Ex Ferraria, die V^{to} februarii 1464 hora 3^{a} noctis.

Totus vester IOANNES DE BLANCHINIS.

46(38)^{b} ^{a} ist leer. | Venerabili et doctissimo Viro
dm̃o IOAN̄I GERMANO R̄^{mi}
dn̄i dn̄o legati ꝛc^{n}.

V.

Regiomontan an Giovanni Bianchini.

47(39)^{a} | IOANNES GERMANUS ad IOANNEM DE BLANCHINIS Ferrariensem.

Accepi undecima mensis huius Februarii litteras vestras expectatissimas, doctissime vir, que non parum ceptam inter nos consuetudinem atque amicitiam adauxere et vobis mirum in modum obsquentem me reddidere, non modo quod meis respondeant litteris, verum etiam, quod doctiorem me in dies reddant et res occultas investigandi calcar adiiciant. Immortales igitur Dominationi vestre gratias habeo, que non cessat, IOANNEM suum familiariter adoriri. Dabitis, spero, veniam, si responsionum sive decisionum vestrarum ad interrogata mea ex ordine meminero. Non equidem, ita me deus amet, animo superbiandi aut reprehendendi istic faxo, sed, ut veritas ipsa relucescat, conabor pro viribus circa singula aliquantisper immorari.

In primo quesito posui stellam unam in $\overline{10} \cdot 25'$ Tauri sine latitudine, item aliam in $\overline{27} \cdot 29'$ Tauri absque latitudine, tertiam vero habentem latitudinem septemtrionalem et distantem a prima per $\overline{6} \cdot 18'$, a secunda autem per $\overline{20} \cdot 47'$. Respondistis, si daretur alterum duorum, videlicet aut latitudo tertie stelle ab ecliptica, aut locus eius in ecliptica, reliquum quoque notum fieret. Verum illud dixistis et solueremus hoc per figuram sectoris aut per scientiam triangulorum spheralium faciliter. Quod ut lucidius accipiatur (Fig. 15), sit portio excliptice xq, prima stella sit in h puncto ecliptice, secunda in k puncto eiusdem, tertia autem sit in l extra eclipticam, ita ut arcus lh sit $\overline{6} \cdot 18'$, arcus vero lk $\overline{20} \cdot 47'$. Super puncto l facto polo describo

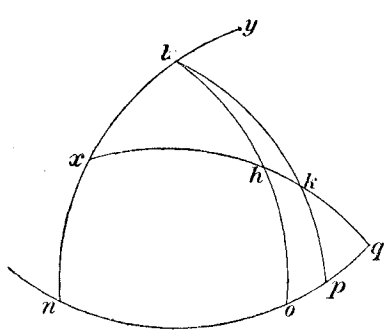


Fig. 15.

circulum magnum in sphera, cuius arcus nq conincidat ecliptice in puncto q; polus ecliptice sit y, per quem et polum circuli nq, qui est punctus l, incedat circulus maior in sphera yln secans eclipticam in x et circumferentiam circuli supra l descripti in n, duoque arcus lh et lk continuantur, donec occurrant arcui nq in punctis o et p. Manifestum erit, unumquemque trium arcuum ln, lo et lp esse quartam circumferentie circuli maioris in sphera, itemque duo arcus xq et qn erunt quadrantes. Hec ex primo et secundo Theodosii de spheris aut ex primo Gebri Hispalensis[1]) clara trahuntur. |

Est autem arcus xl latitudo stelle tertie, qui si supponeretur notus, 47 (39)[b]
arcus quoque xn innotesceret. Cum autem proportio ln ad nx erit composita ex proportione lo ad oh et ex proportione hy ad qx (de sinibus intelligo), quinque autem horum sinuum noti sunt, arcus enim ho notus erit propter arcum lh datum, quare et arcus hq notus erit et residuus de quarta arcus xh. Cumque punctus h sit datus in ecliptica, erit et x cognitus, videlicet locus verus stelle l. Idem fieret si uteremur figura $lnqk$, concluderetur enim arcus kx cognitus, et inde punctus x. Si autem locus eius in ecliptisa esset datus, propter punctum h etiam datum cognosceretur arcus xh, et inde arcus hq residuus de quarta. Fieret, ut antea, proportio ln ad nx composita ex duabus proportionibus, scilicet lo ad ho et hq ad qx (de sinibus loquor). Omnibus autem notis preter arcum nx ipse quoque notus eliceretur, et hinc residuus de quarta xl, scilicet latitudo stelle. Quo autem pacto procederetur per scientiam triangulorum spheralium, si alterum duorum predictorum datum esset, silentio nunc pretereundum censeo, cum ad vos nondum venerint libelli mei triangulorum. Ubi enim eos videbitis amplior conversationis nostre dabitur materies. Sed cum neutrum duorum dictorum sit datum, videndum est, quonam modo ad quesitum perducamur. Triangulus lhk tria latera habet cognita, et nihil aliud cognitum est. Quod si unus angulorum eius quicumque esset notus, reliqui quoque innotescerent, et inde arcus lx, quemadmodum in tertio triangulorum demonstratum videbitis deo volente, notus redderetur cum arcu xh.[2]) Cumque ypothesis dederit punctum h, fieret et punctus x inventus, scilicet locus stelle l in ecliptica. Sed neque aliquis angulorum trianguli lhk notus supponitur. Quod igitur restat? In tertio triangulorum ex tribus lateribus trianguli spheralis cognitis tres angulos eius dimetiri doctum est,

1) Hier also hat Regiomontan seine Bekanntschaft mit dem Werke Geber's deutlich ausgesprochen.

2) Daraus geht hervor, dass das III. Buch der Trigonometrie Regiomontan's erst ein späterer Zusatz ist, und das jetzige IV. Buch hier als drittes bezeichnet wird.

unde et reliqua, que commemorata sunt, nota fieri necesse est. Cum autem hisce mediis uti iam non liceat, aliam viam aggrediar. Respicite figuram *lokq*, ubi proportio *lo* ad *oh* componitur ex duabus, scilicet proportione *lp* ad *pk* et *kq* ad *qh* (sinus appello); proportio item *lo* ad *oh* componitur ex duabus, scilicet proportione *lo* ad *kp* et proportione *kp* ad *oh*
47 (39)[c] (in sinibus semper versor), arcus autem *lo* equalis est arcui *lp*, quare | proportio *lo* ad *oh* componitur ex proportione *lp* ad *pk* et proportione *pk* ad *oh*. Ablata utrobique communi proportione *lp* ad *pk* manebit proportio *pk* ad *oh* sicut *kq* ad *qh*. Uterque autem arcuum *pk* et *oh* notus est propter sua complementa *lk* et *lh* per ypothesim data, quare proportio sinus arcus *hq* ad sinum arcus *qk* est data. Horum quoque arcuum differentiam notam subiecit ypothesis, arcum videlicet *hk* propter duo loca stellarum *h* et *k* data. Unde per unam conclusionem Ptolemei in capitulo 12° prime dictionis uterque arcuum *hq* et *kq* notus occurrat. Iam ad figuram *lnqh* revertendum. Proportio *ln* ad *nx* ex duabus constat, proportione *lo* ad *oh* et proportione *hq* ad *qx* (de sinibus dico). Omnia autem, ut brevior sim, nota sunt preter arcum *nx*, unde et propter argumentationem memoratam ipse non ignorabitur. Hinc arcus *xl* notus erit, qui est latitudo stelle ab ecliptica. Locum autem verum stelle *l* in ecliptica ex dictis facile est percontari. Oportet autem stellam *l* esse in $\overline{7} \cdot 25'$ Tauri cum latitudine septemtrionali $\overline{5} \cdot 31'$. Meminit autem dominatio vestra 12[e] et 13[e] propositione 2[i] Euclidis, ex quibus perpendiculares in triangulis planis rectilineis queruntur. Ego autem dictis propositionibus non utor, nam nihil loci habent in hoc meo proposito. Hec de primo.

In secundo supponebantur due stelle habentes latitudines septemtrionales, una quidem $\overline{9} \cdot 26'$, alia vero $\overline{35} \cdot 53'$, et distantia inter centra stellarum erat $\overline{8} \cdot 45'$ etc. Vestrum responsum est, hanc positionem esse inpossibilem, et confiteor, me ex proposito ita supposuisse, ut intelligam, si apud vos esset Menelaus de sphericis figuris, in cuius tertio libro quinta propositio iam diu me suspensum tenuit. Quotquot reperio exemplaria, omnia in hac parte imminuta sunt. Alii vocant Mileum, ne nomen aliud vos persuadeat, alium esse librum, quam vos putatis, sed Menelaus vere dicitur, in cuius primo demonstratum est, quod cuiuslibet trianguli ex arcubus circulorum magnorum in sphera contentis duo quelibet latera tertio
48 (40)[a] reliquo sunt longiora; penultima autem primi aut alie, que | de figuris planis rectilineis demonstrata sunt, conclusiones, proposito non serviunt. Impossibilitatem sic colligo: Sit arcus ecliptice *de* (Fig. 16), polus eius *g*, stella prima sit in *a*. Demitto a polo ecliptice per punctum *a* quadrantem *gz*. Aut igitur stella secunda est in quadrante *gz* aut extra eum. Si in eo sit *b*, erit arcus *zb* g̃ 35 m̃ 53. Sed arcus *za* est $\overline{9} \cdot 26'$, quare

arcus ab erit ♋ 26 ♍ 27. Sed ex ypothesi oportet eum esse $\overline{8} \cdot 45'$, quod est impossibile. Si autem stella b fuerit extra quadrantem gz, ducatur a polo ecliptice alius quadrans per ipsam, qui sit gh, producto arcu ab erit itaque arcus gb $\overline{54} \cdot 7'$, arcus ga $\overline{80} \cdot 34'$ et arcus ab $\overline{8} \cdot 45'$. Duo ergo latera gb et ab trianguli spheralis abg coniuncta minora sint tertio, quod est impossibile. Si ergo ponetur arcus ab ♋ 32 ♍ 29 bene stabit possibile. Sed nolo, quod Dominatio vestra fatigetur querendo arcum zh, seu distantiam stellarum secundum longitudinem zodiaci. Labor enim multus est et iam planus ex eis, que super primo quesito commemorata sunt.

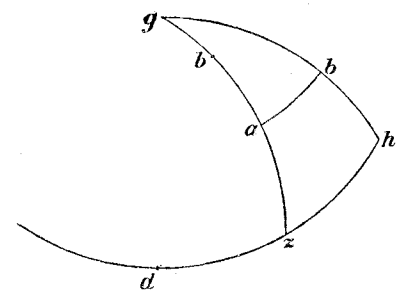


Fig. 16.

$\overline{35} \cdot 53'$
$9 \cdot 26$
$\overline{26} \cdot 27.$
gb $54 \cdot 7$
ga $80 \cdot 34$
ab $8 \cdot 45$
$\overline{62} \cdot 52$
impossibile
ga $54 \cdot 7$
gb $80 \cdot 34$
ab $32 \cdot 29$

In tertio quesito ponebatur circulus habens diametrum 60 pedum, cui inscriptum intelligebatur quadrangulum latera quatuor habens in proportionibus horum numerorum $4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$, et querebatur area huius quadranguli. Quadrangulum illud intelligebam rectilineum, nam si essent latera eius curva et super circumferentiam circuli dati, non diceretur quadrangulum, cum circumferentia circuli nullum admittet angulum. Revera hoc quesitum est satis arduum, quam ob rem paulo altius ordiendum arbitror, quo facilius expediri possit. Premitto autem has conclusiones. | 48(40)[b]

1. Omnis quadranguli plani rectilinei quelibet tria latera simul sumpta quarto reliquo sunt longiora (Fig. 17).

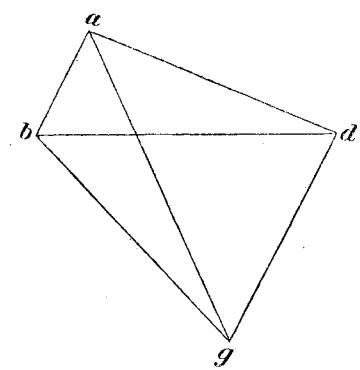


Fig. 17.

Sit tale quadrangulum $abgd$, cuius due diametri ag et bd. Dico, quod initio de eo verificetur presens conclusio. Sunt enim trianguli abg duo latera ab et bg per 20[am] primi Euclidis longiora latere ag, itemque ga et ad latera trianguli gad simul sumpta longiora ipso latere eiusdem gd, tria igitur latera gb et ba et ad longe maiora sunt latere gd. Non aliter de reliquis omnibus lateribus predicabitur. | 49(41)[a]

2. Ex omnibus quatuor lineis rectis, quarum quelibet tres simul iuncte quarta sunt longiores, possibile est fieri quadrangulum circulo inscriptibile (Fig. 18).

Sint quatuor huiusmodi linee *a*, *b*, *c*, *d*, quarum minima sit *a*, quam constituo diametrum circuli *ehg*. Palam, quod circulo *ehg* non possunt inscribi quatuor ille proposite linee conterminaliter, cum summa earum non sit minor diametro circuli *abg*. Sed et nemini dubium est, quin aliquis sit circulus ita magnus, quod si tres propositarum linearum aut eis equales posuerimus in eo tanquam cordas conterminales, et deinde quartam, remaneat arcus aliquis absque corda. Volo dicere, quod secundus terminus quarte linee et primus prime non conincidunt. Duos ergo constat esse circulos, quorum alteri quatuor date linee non possunt immitti conterminales propter nimiam eius circuli parvitatem, alteri vero non possunt hoc pacto inscribi propter nimiam eius magnitudinem. Necesse est igitur, cum sint infiniti circuli medii inter eos, ad aliquem pervenire, cui dicte quatuor linee possint inscribi. Hec certa sunt et intellectum faciunt quietum, quare ad alia me transfero.

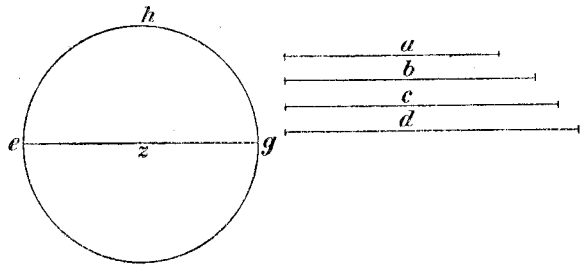


Fig. 18.

3. Non est necesse, omne quadrangulum rectilineum circulo esse inscriptibile (Fig. 19).

Sit enim circulus *abgd*, in quo ordinentur quatuor corde *ab*, *bg*, *gd* et *da*, ut libet sibi conterminales, quadrangulum *abgd* concludentes. Signeturque punctus *h* extra circulum in linea *gb* continuata, ducta linea *ah*. Dico, quod impossibile sit, quadrangulum *abgd* inscribi circulo. Si enim possibile est, esto per adversarium, ducaturque diameter *ag* communis ambobus quadrangulis. Duo itaque anguli *ahg* et *adg* ex confessione adversarii et 28ta tertii Euclidis duobus rectis angulis sunt equales. Sed et duo anguli *abg* et *adg* ex ypothesi et eadem 28ta tertii Euclidis duobus rectis equipollent: duo igitur anguli *ahg* et *adg* equabuntur duobus *abg* et *adg*. Ablatoque utrobique angulo *adg* relinqueretur angulus *abg* equalis

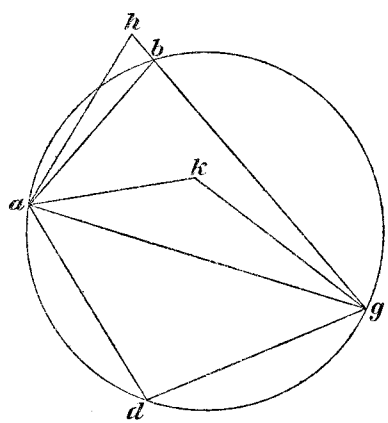


Fig. 19.

angulo *ahg*, extrinsecus intrinseco, quod est impossibile et contra 16^{am} primi elementorum. Ad | idem inconveniens redigeretur adversarius, si 49 (41)^{b} dixerit, quadrangulum *akgd* inscriptibile circulo. Posito *k* puncto in triangulo *abg* aut in altero laterum eius. Non est ergo necesse, omne quadrangulum rectilineum inscriptibile esse circulo, quod erat demonstrandum.

4. Omne quadrangulum rectilineum, cuius duo anguli sibi oppositi duobus equantur rectis, circulo est inscriptibile.

Quadranguli *abgd* rectilinei (Fig. 20) duo anguli *abg* et *adg* duos rectus valeant: dico ipsum inscriptum iri circulo. Ducta enim diametro quadranguli *ag* per 5^{am} quarti elementorum Euclidis licet, triangulo *agd* circumscribere circulum. Fiat igitur, et sit circulus huiusmodi *agd*, cuius circumferentia si transibit punctum *b*, habebitur intentum. Si non, ponatur *ab* indefinita ex parte *b*, quam necessario secabit circumferentia circuli *agd* aut supra *b* aut infra. Si supra, esto in puncto *h*, ductaque linea recta *hg* erit quadrangulum *ahgd* in circulo, unde ex 21° tertii elementorum duo anguli *d* et *h* duobus rectis equivalebunt. Sed et duo anguli *adg* et *abg* per ypothesim duos valent rectos, per communem ergo scientiam relinquetur angulus *abg* equalis angulo *ahg*, extrinsecus intrinseco, quod est impossibile 16^{a} primi ratiocinante. Idem et eodem modo inconveniens redundabit, si circumferentiam circuli *agd* quis dixerit secare lineam *ab* infra punctum *b*.

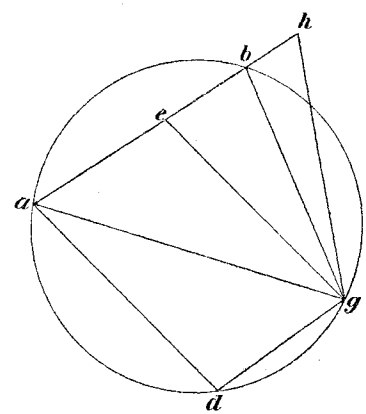


Fig. 20.

5. Proposito quadrangulo rectilineo, sitne inscriptibile circulo an non, explorare.

Utrique duorum angulorum quadranguli sibi oppositorum equalem constituens super puncto unius linee per 23^{am} primi elementorum, inde quoque, sintne equales duobus rectis an non, facile docebitur. Si igitur equales fuerint duobus rectis, quadrangulum ipsum circulo erit inscriptibile per primam partem 13^{e}. Si vero inequales, nullus circulus unquam ipsum circumscribet.

6. Quadrangulo, cuius duo invicem oppositi anguli duobus rectis equipollent, circulum circumscribere.

Sit tale quadrangulum *abgd*, cuius duo anguli *b* et *d* duobus rectis equivalent. Volumus circumscribere circulum. Ducta diametro *ag* ex processu antepremisse consequemur intentum.

7. Si in quadrangulo rectilineo, quod circulo inscribitur, due eius diametri producantur se secantes, erit proportio unius partis ad reliquam eiusdem diametri partem, sicut eius, quod sub duobus lateribus quadranguli huic parti
0(42)[a] allateralibus | continetur, ad id quod sub reliquis duobus lateribus, alteri videlicet parti allateralibus continetur rectangulum (Fig. 21).

In figura clarebit facilius. Quadrangulo *abgd* circumscriptus sit circulus *abgd*, sintque due eius diametri *bd* et *ag* secantes se in puncto *h*: dico quod proportio linee *bh* ad lineam *hd* est ut proportio eius, quod continetur sub duobus lateribus *ab* et *bg* ad id, quod continetur sub duobus *ad* et *dg*, cuius demonstrationi incumbendum est. Aut enim duo anguli *bag* et *gad* equales sunt aut non. Si fuerint equales, erunt et due corde *bg* et *gd* per 25[am] et 28[am] tertii equales. Per tertiam autem sexti proportio *ah* ad *hd* sicut *ba* ad *ad*, et talis etiam est proportio eius, quod sub *gb* et *ba*, ad id, quod sub *ad* et *dg* prima sexti arguente propter duas cordas *bg* et *dg* equales. Si vero alter dictorum angulorum altero maior sit, verbi gratia angulus *gad* maior angulo *bag*, fiat angulus *ead* equalis angulo *bag* ductis cordis *be* et *de* itemque *ae* secante cordam *bd* in *k*. Unde constabit, cordam *ed* equalem esse corde *bg*, item cordam *be* equalem ipsi *gd*. Erit enim angulus *bae* equalis angulo *gad*, angulo *gae* facto communi. Cum itaque angulus *ead* equalis positus angulo *bag*, duoque anguli *abd* et *aed* equales, quia in unum arcum *ad* cadant, erunt 32[a] primi adiuvante duo trianguli *abh* et *aed* equianguli, quare per quartam sexti proportio *bh* ad *ah* sicut *ed*, et ideo *bg* ad *ad*. Similiter probabimus duos triangulos *ahd* et *abe* esse equiangulos, et ideo proportionem *ah* ad *hd* esse sicut *ab* ad *be* sive ad *gd*. Sed proportio *ah* ad *hd* componitur ex duabus proportionibus, scilicet proportione linee *bh* ad *ha* et proportione *ha* ad *hd*, quarum prima quidem est ut *bg* ad *ad*, secunda vero ut *ab* ad *gd*, ex quibus per 14[am] sexti componitur etiam proportio eius, quod sub *ab* et *bg*, ad id, quod sub *ad* et *dg*, quare proportio *bh* ad *hd* est ut eius, quod sub *ab* et *bg* ad id, quod continetur sub *ad* et *dg*, et hoc erat concludendum.

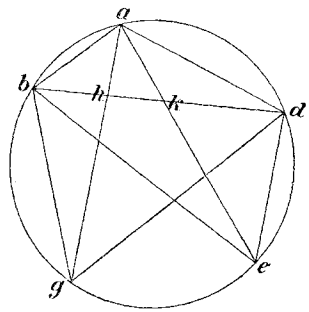


Fig. 21.

8. Datis quatuor lateribus quadranguli circulo inscripti proportio diametrorum eius inter se cognita veniet.

Resumpta priori figuratione sint date quatuor linee ab, bg, gd et ad: dico, quod proportio bd diametri ad ad nota erit. Erat enim ex precedenti bh ad hd sicut eius, quod sub ab et bg, noti propter ypothesin, ad id, quod sub ad et dg, notum similiter. Sic | proportio bh ad hd nota 50 (42)[b]
redditur, et ideo coniunctim proportio bd ad hd non erit ignota. Similiter per omnia probatur proportionem ag diametri ad gh fieri cognitam. Est autem gh ad hd data, quoniam sicut bh ad ah per 34^{tam} tertii et 15^{am} sexti, proportio igitur diametri ag ad portionem hd data fiet. Duorum itaque diametrorum bd et ag utraque ad lineam bh proportionem habet datam, unde necesario earum inter se proportio nota veniet, quod expectabatur lucubrandum. Nonnullos autem probationum locos allegare neglexi, cum nihil ambigui habeant, et in primo triangulorum unicuique plana occurrant.[1])

9. Si, quod sub duabus lineis proportionem notam habentibus continetur, rectangulum datum fuerit, utraque earum nota proclamabitur (Fig. 22).

Sint due recte hb et bg, quarum proportio nota, quadrangulum $bhge$ rectangulum et notum continentes: dico, quod utraque earum data invenietur. Prolongetur enim gb directe, donec ba fiat equalis ipsi bh, supra qua constituatur quadratum $dabh$. Erit itaque per primam sexti proportio ab

---

1) Der Gang seines Beweises, dass das Verhältnis der Diagonalen gegeben sei, ist folgender: Nach Satz 7 verhält sich

$$bh : hd = ab \cdot bg : ad \cdot dg \quad \text{und}$$
$$ah : hg = ab \cdot ad : dg \cdot bg,$$

also auch

$$(bh + hd) : hd = (ab \cdot bg + ad \cdot dg) : ad \cdot dg = bd : hd$$
$$(ah + hg) : hg = (ab \cdot ad + dg \cdot bg) : dg \cdot bg = ag : hg$$

Es ist aber wegen Ähnlichkeit der betreffenden Dreiecke

$$bh : ah \qquad = gh : hd$$

und daher auch

$$(ab \cdot bg + ad \cdot dg)\, bh : ad \cdot dg \cdot ah \qquad = bd : hg$$

und da auch

$$dg \cdot bg \qquad : (ab \cdot ad + dg \cdot bg) = gh : ag$$

ist, so folgt endlich

$$bd : ag = (ab \cdot bg + ad \cdot dg)\, bh \cdot dg \cdot bg : (ab \cdot ad + dg \cdot bg)\, ad \cdot dg \cdot ah.$$

Dass $bh \cdot dg \cdot bg = ad \cdot dg \cdot ah$ ist, giebt Regiomontan nicht an, es folgt aber sofort aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $ahd \sim bhg$. Der Beweis ist soweit gegeben, dass Bianchini mit Leichtigkeit die obigen Schlüsse durchführen konnte. Da aber nach dem Ptolemäus'schen Satze das Produkt der Diagonalen ebenfalls bekannt ist, so schliesst Regiomontan in Satz 9 u. 10 daraus, dass die Diagonalen einzeln bekannt sind.

ad *bg* sicut quadrati *db* ad parallelogrammum *hg*. Proportio autem *ab* ad *bg* est ut *hb* ad *bg* nota per hypothesim, unde proportio *db* quadrati ad spatium *hg* rectangulum nota elicietur. Est autem *hg* notum ex hypothesi, quare et quadratum *db* non ignorabitur. Hinc costa sua *bh* non latebit, cuius cum proportionem ad lineam *bg* subiecerit ypothesis, necessario et linea *bg* nota prosiliet.

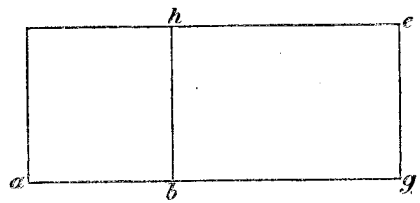


Fig. 22.

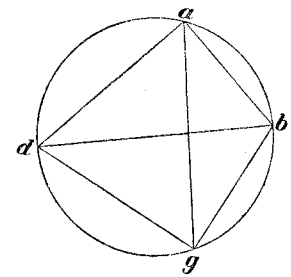


Fig. 23.

10. Quadranguli circulo inscripti quatuor latera nota habentis diametros quoque cognitum iri (Fig. 23).

Sit tale quadrangulum *abgd*, cuius due diametri sint *ag* et *bd*, latera autem quatuor eius data: dico, quod et diametri patefient. Erit enim per 8^{am} huius proportio diametrorum nota, quod autem sub diametris continetur, equum est his, que sub binis lateribus sibi oppositis continentur simul sumptis. Que autem sub binis lateribus continentur, nota sunt propter latera ipsa nota, unde et per precedentem utraque eorum cognita reddetur.

11. Datis quatuor lateribus huiusmodi quadranguli diametrum circuli sibi circumscripti invenere (Fig. 24).

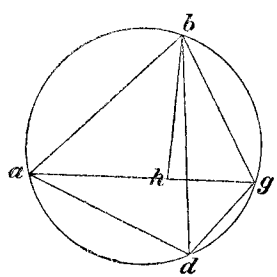


Fig. 24.

Repetita figura precedenti due linee *ab* et *bg* note habebuntur per ypothesim, ex precedenti autem et *ag* nota declarabitur. Triangulus ergo *abg* circulo circumscriptus diametrum ipsius circuli notam suscitabit, quod erat absolvendum. Plures autem cum sint modi ex tribus lateribus trianguli rectilinei notis diametrum circuli se circumscribentis invenire, eum eligo, qui ceteris est facilior et brevior apparet. A puncto *b* ad lineam *ag* demitto perpendicularem *bh*, quam |
51(43)^{a} notam habebo propter latera trianguli *abg* cognita. Est autem proportio *bh* perpendicularis ad latus *ab* sicut lateris *bg* ad diametrum circuli *abgd*, cumque tres harum linearum sint note, diameter circuli non igno-

rabitur. Hunc autem modum diametri circuli inveniendi alibi demonstratum tradidi.[1])

12. Sed ne diutius equo detineamini, ad hoc quesitum respondere licet hoc pacto (Fig. 25).

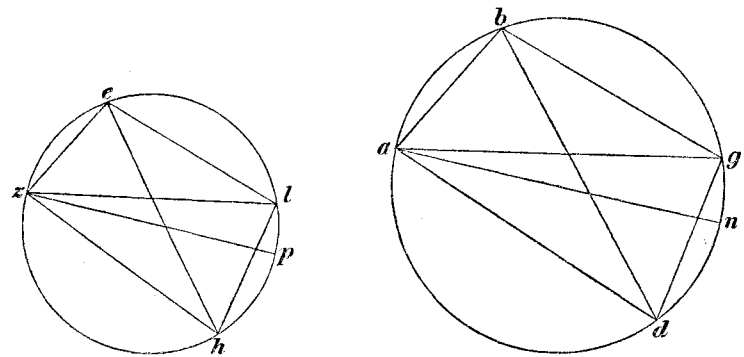


Fig. 25.

Cum sint date proportiones quatuor linearum, que claudere debent quadrangulum, pono pro libito lineam *ze* quotlibet pedum, et reliquas lineas *el*, *lh* et *hz* secundum proportiones datas et ut sit brevius, sit linea *ze* 4 pedum, linea *el* 7, linea *lk* 13 et linea *kz* 17 pedum. Possibile autem est per 2^{am} huius esse circulum, cui conterminaliter inscribantur hec quatuor linee, cum tres eorum quelibet quarta reliqua sunt longiores. Sit ergo circulus ille *zelk*, cuius diameter *zp* nota erit respectu linee *ze* per precedentem. Erit autem et area quadranguli *zelp* nota, quoniam ex 10^{a} huius diameter quadranguli *zl* nota habebitur. Sic uterque triangulorum *zel*, *zhl* tria habebit cognita latera, unde et utriusque area nota reddetur. Hinc quoque totius quadranguli area innotescit. Si igitur diameter *zp* circuli *zelh* esset 60 pedum, satis iam responsio pateret. Et si non fuerit 60 pedum ponatur linea *an* 60 pedum et fiat diameter circuli *abgd*, cui circulo inscribatur quadrangulum simile quadrangulo *zelh*, cuius rei dispositionem, cum et possibilis et facilis sit, pretereo. Quadrangulum tule sit *abgd*, ad cuius aream se habet area quadranguli *zelh* sicut quadratum diametri *zp* ad quadratum diametri *an*. Cumque tres harum quantitatum sint note, quarta quoque innotescet, quod erat absolvendum. Quod autem aree quadrangulorum similium et quadrata diametrorum circulorum, quibus quadrangula inscripta sunt, eandem habeant proportionem, nemini docto ignotum est. De hoc iam satis. Quo autem pacto numeris illud

1) *De triangulis* lib. II prop. XXIIII. Santbech'sche Ausgabe p. 49.

expediendum sit, ex commemoratis facile addiscetur, sed labor ingens et
51 (43)[b] diuturnus. |

Ad quartum respondetis, minime esse possibile includere in sphera pyramidem sex diversorum laterum pro libito proportionalium etc. Verum et bene respondetis, Sed infinite possunt dari huiusmodi pyramides sphere inscriptibiles. Quod ut apertius fieret, multa premittenda essent, sed pau-
3 · 5 · 8 · 10 · 11 · 13 cula nunc commemorabo. Intelligo spheram, cui inscripta est huiusmodi pyramis, si possibile est, vocaboque spheram primam et pyramidem primam (Fig. 26). Deinde pono lineam *ab* ut unum ex illis sex numeris 3·5·8·10·11·13, verbi gratia 10 pedes, et lineam *ag* 8 pedes, lineam *gb* 3 pedum, ponoque triangulum *abg* basim pyramidis secunde hoc pacto. Per 26[am] undecimi apud punctum *g* constituo angulum solidum equalem angulo solido prime pyramidis, qui est apud latera basis prime pyramidis proportionalia duobus lateribus *ag* et *gb* trianguli *abg*. Oportet enim triangulum *abg* equiangulum esse basi prime pyramidis. Ductaque linea *gk* surgente a superficie trianguli *abg* sumatur ex ea *gd* pedum 11; a puncto quoque *d* sublimi demittantur ad terminos linee *ab* due linee recte *da* et *db*. Iam confectam habemus pyramidem sex notorum laterum, eritque omnino similis prime pyramidi, licet fortasse non equalis eidem. Huic pyramidi secunde intelligatur sphera circumscribi, quam vocabo spheram secundam. Omni enim pyramidi basim habente triangularem sphera circumscriptibilis est. Hec autem omnia alibi demonstrata dedi. Si itaque ex notis lateribus pyramidis secunde inveniemus diametrum sphere se circumscribentis, quemadmodum possibile est et demonstratum, plana erunt omnia. Nam cubus circumscribens spheram secundam ad cubum, qui circumscribit spheram primam, est ut corpulentia pyramidis secunde ad corpulentiam pyramidis prime. Hec tenent propter similitudinem cuborum et pyramidum et habitudinem eorum ad spheram secundum inscriptionem et circumscriptionem. In his non moror. Si enim satis lucubrari deberem,
52 (44)[a] nimium prolixus evaderem; sed recta sunt omnia. | Modum autem metiendi corpulentiam pyramidis sex latera cognita habentis iam alibi conscripsi. Sic due cubi noti essent et corpulentia pyramidis secunde, unde et corpulentia pyramidis prime cognoscetur, essetque responsum satis ad hanc interrogationem. Sed profecto non facile est explorare, an ex sex lineis habentibus proportiones ut sex numeri dati sit constructibilis pyramis trilatera

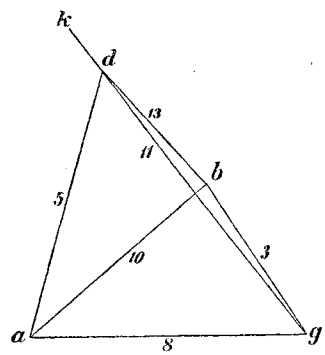


Fig. 26.

propter variam combinationem huiusmodi linearum possibilem fieri, propter multas quoque passiones pyramidi trilatere convenientes. Sit enim huius explanandi gratia pyramis, cuius basis trilatera *hkl* et vertex *n*, quam claudant quatuor trianguli plani rectilinei et sex linee recte, que habebit quatuor angulos solidos ex novem superficialibus angulis resultantes. Cum itaque hec pyramis ex triangulis planis rectilineis consurgat, de quibus demonstratum est in vigesima primi, cuiuslibet eorum quelibet duo latera simul sumpta tertio reliquo esse longiora, item cuiuslibet anguli solidi ex tribus superficialibus angulis rectilineis contenti duos quoslibet superficiales simul sumptos maiores esse tertio, omnes autem tres coniuncti minores quatuor rectis, hoc ex vigesima et vigesimaprima undecimi, oportuit igitur in pyramide *abgd* superius signata angulum *agd* et angulum *dgb* simul iunctos maiores esse angulo *agb*, itemque tres angulos superficiales in puncto *g* confluentes minores esse quatuor rectis. Hec omnia pensanda sunt, priusquam ad corpulentiam inveniendam descendatur. Modum autem inveniendi corpulentiam huiusmodi et inveniendi diametrum sphere circumscribentis ipsam pyramidem et cetera his rebus necessaria nunc preterire statui, ne fastidium pariam. De hoc nunc satis, nam, si ad plenum absolvere hoc quesitum vellem, duo quinterni vix sufficerent.

Velletis insuper scire quantitates quatuor cordarum conterminalium in circulo, quarum proportiones sunt ut hi numeri $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 12$. Si ponetis diametrum circuli notam, ex supra dictis sufficienter trahetur modus operandi, quamquam laboriosissimus.

| In *quinto* quesivi duos numeros, quorum differentia esset radix qua- 52 (44)[b]
drata de 5 etc. Quesivi duos numeros huiusmodi non in unitatibus, scilicet in actu tantum, sed in potentia etiam, si opus fuerit, quemadmodum vos respondistis ad sextum interrogatum, lucrum primi anni fuisse radicem cubicam de 2650000. Demptis ab ipsa radice 100. Hic enim in veritate non est numerus vulgaris. Ita etiam in questione mea satis erit determinare, quorum numerorum radices sint, quales queruntur. Huiusmodi enim numeris utuntur computatores algebre.

In *septimo* subieci, tres socios communiter posuisse 70 ducatos, et lucratos fuisse etc., non dixi eos equaliter posuisse, sed simul et communiter, in principio anni verbi gratia posuisse 70 ducatos ita, quod unus quisque posuerit partem suam. Sed completis tribus mensibus primus recepit de capitale suum cum lucro suo trium mensium, et invenit 15 ducatos. Sed duo capitalia duorum reliquorum steterunt amplius per duos menses ita, quod ambo in toto steterint per quinque menses. Quibus expletis secundus recepit capitale suum cum lucro, et collegit 25 ducatos. Amplius capitale tertii stetit per unum mensem ita, quod in toto stetit

per 6 menses, quibus expletis tertius invenit capitale cum suo lucro 40 ducatorum: queritur etc.

In *octavo* bene reddidistis numerum quesitum minimum 1103, secundum autem 3313. Satis est, nam infiniti sunt tales, quorum minimus est 1103. Huic si addiderimus numerum numeratum ab ipsis tribus divisoribus, scilicet 17, 13 et 10, habebitur secundus, item eodem addito resultat tertius etc[a].[1])

17 | 170
13 | 13
10 | 510
17
2210

Hec de quesitis meis, ad que licet sufficientissime responderitis, libuit tamen circa ea paulisper immorari, quo sententiam meam planius acceperitis. Nunc ad interrogata vestra respondebo, quam paucissimis potero.

Primum erat illud: Tres sunt stelle, ex quibus due super eodem gradu ecliptice dicuntur esse, sed per latitudinem ab ipsa declinantes versus septemtrionem, prima scilicet per ♊ 3 ♏ 25, secunda vero per ♊ 28 ♏ 48, tertia autem stella ipsas predictas sequens secundum successionem signorum in ♊ 6 ♏ 15 Geminorum cum latitudine septemtrionali ♊ 12 ♏ 9, cuius distantia a prima stella per arcum orbis magni a centro ad centrum
53(45)[a] est ♊ 26 ♏ 40: queritur distantia ipsius | a secunda stella locaque prime et secunde in ecliptica (Fig. 27).

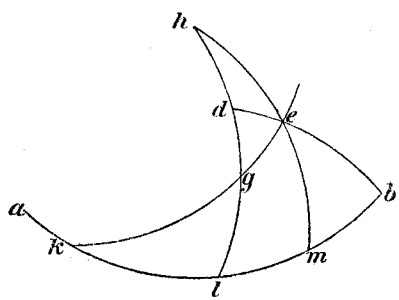


Fig. 27.

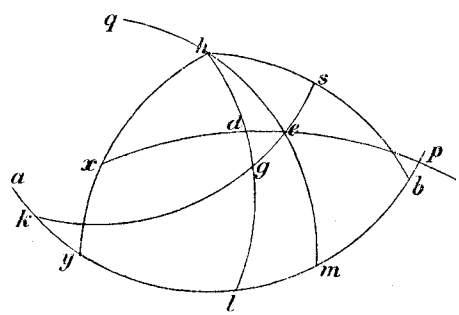


Fig. 28.

Respondendo pono eclipticam ab, cuius polus septemtrionalis sit h, sintque due stelle prime g et d in quadrante hl, punctus autem m sit finis 6 graduum et 15 minutorum de Geminis, demissoque quadrante hm signetur in eo tertia stella per notam e, productis duobus arcubus circulorum magnorum eg et ed. Ex notis itaque arcubus gl, dl, em et eg, itemque

1) Hieraus in Verbindung mit der Randglosse ist klar, dass Regiomontan die vollständige Lösung dieses Problemes besass, wie denn zu seiner Lebenszeit dergleichen Aufgaben vielfach umliefen. In der vierten Abhandlung dieses Heftes wird man die Art der Lösung, welche das 16. Jahrhundert kannte, auseinandergesetzt finden.

puncto *m* dato queritur arcus *ed* cum puncto *l*. Quod ut fiat, continuetur arcus *eg*, donec occurret ecliptice in puncto *k*. Iam perducti sumus ad eam viam, qua superius in primo quesito meo utebar. Erit enim proportio *hm* ad *me* composita ex duabus proportionibus, scilicet arcus *hl* ad *lg* et ex proportione *gk* ad *ke* (de sinibus loquor). Unde concluditur proportionem sinus arcus *ek* ad sinum arcus *kg* esse tanquam proportionem sinus *em* ad sinum *gl*, cumque arcus *eg* datus sit, qui est differentia duorum arcuum *ek* et *kg*, erit per superius commemorata uterque eorum cognitus. Quod si per polum circuli *ke*, qui sit *q*, et polum ecliptice *h* circulum magnum produxerimus (Fig. 28), qui secet arcum *ke* satis prolongatum in puncto *s*, ipsam autem eclipticam in puncto *b*, erit unusquisque arcuum *hb*, *ks* et *kb* quarta circumferentie magne, fietque proportio *kb* ad *bl* composita ex duabus proportionibus, proportione sclilicet *ks* ad *sg* et proportione *gh* ad *hl* (sinus intelligo non arcus). Cum autem omnia sint nota preter arcum *bl*, est enim *sg* notus propter *kg* superius notum, similiter *gh* cognoscitur propter latitudinem *lg* notam ex ypotesi, quare et arcus *bl* non ignorabitur. Similiter per omnia invenietur arcus *bm*, si figura sectoris utemur *hbke*. Differentia igitur duorum arcuum *bl* et *bm* nota prosiliet, scilicet arcus *lm*, cumque punctus *m* sit notus, exit et *l* notus, locus videlicet primarum duarum stellarum, qui querebatur. Arcum autem *ed* metiemur, si prius eum extendimus ad partem puncti *e*, donec conincidat ecliptice in puncto *p*, ad partem autem puncti *d*, donec occurret circulo magno per polum ecliptice *h* et polum circuli *de*, qui sit *t*, transeunti, quod fiat in puncto *x*. Hic autem circulus per polos dictos incedens secet eclipticam in puncto *y*, eritque uterque arcuum *px* et *py* quarta circumferentie. Hec figuratio tenebit, dum arcus *dp* minor quadrante fuerit, nam si aliter eveniet, circulus per *t* et *h* polos transiens aut coninciderct circulo *hl* aut secaret arcum *dp*. Sed argumentatio | parum variaretur. Redeamus igitur 53 (45)[b]
ad figurationem prescriptam, ubi proportio *hd* ad *dl* componitur ex duabus, proportione scilicet *he* ad *em* et proportione *mp* ad *pl*. Si ergo subtraxerimus proportionem *he* ad *em* ex proportione *hd* ad *dl*, que ambe note sunt propter terminos suos notos, relinquetur proportio *mp* ad *pl* cognita (de sinibus loquor). Cumque superius inventus sit arcus *lm*, qui est differentia duorum arcuum *pl* et *pm*, erit ex modo supradicto uterque eorum cognitus. Hinc et arcus *lg* innotescet. Est autem proportio *py* ad *yl* composita ex duabus, scilicet ex proportione *px* ad *xd* et proportione *dh* ad *hl*. Omnia autem nota sunt preter *xd*; est enim *hd* arcus notus propter latitudinem secunde stelle *dl* cognitam, unde et arcus *xd* invenietur cognitus. Similiter per omnia numeretur arcus *xe* ex figura *hype*. Demptoque arcu *xd* ex arcu *xe* relinquetur arcus *ed*, qui querebatur. Quod si

figuratio aliter accideret, processus huiusmodi ad intentum paucis rebus mutatis nos traducet. Habeo insuper alios modos respondendi et breviores per scientiam triangulorum spheralium, quibus non libuit uti, donec videbitis libellos meos triangulorum. Usus autem sum figura sectoris, in qua profundissimam habetis intelligentiam, quatenus assumpte mea omnia confitemini. Oportuit autem ex vestra ypothesi duas primas stellas esse in gradibus 10 minutis 48 Tauri, tertiam autem stellam habere distantiam a secunda g̃ 28 m̃ 58, que querebantur.

Secundum quesitum. Divisi 100 per certum numerum. Deinde divisi 100 per eundem divisorem additis 8. Summa autem ex numeris quotiens resultabat 40: queritur quantitas primi divisoris.

Primus divisor fuit radix quadrata de $22\frac{1}{4}$ dempto ex ipsa radice $1\frac{1}{2}$, unde etiam secundus divisor fuit radix de $22\frac{1}{4}$ additis $6\frac{1}{2}$.

Tertium. Quidam accessit ad campsorem cum 10 florenis et ipsos campsit in grossos Venetorum, accipiendo scilicet pro eis certam summam grossorum. Ex qua summa dempserit 60 grossos, et ipsos recampsit in florenos secundum idem cambium ut prius. Quo facto reperit, se habere ex grossis et florenis coniunctis 80: queritur valor unius floreni ad grossos.

Unus florenus valuit radicem quadratam de $48\frac{1}{4}$ additis $6\frac{1}{2}$.

Quartum. Quidam mercator cum 100 ducatis in primo anno lucratus est certum quid, sicque procedit de anno in annum etc.; in fine autem sex annorum in universo ex primo capitali et omnibus lucris colligit 900 ducatos: queritur lucrum primi anni.

Hoc quesitum, licet simile sit interrogato meo ab inicio, tamen in fine redigit me ad scopulum maximum. Invenio enim rem, censum, cubum,
54(46)[a] censum de censu, cubum de censo et cubum de cubo equari numero. | Difficile igitur profecto videtur absolvere hoc quesitum. Si enim dixero lucrum primi anni fuisse radicem cubicam radicis cubice de 9000000000000 demptis ab hac radice 100, opus sine ratione certa faciam.[1]) Nunquam etiam de omnibus combinationibus numerorum algebre artem traditam invenio, ut si quis dixerit: 5 census de censu, tres cubos et 8 census equare 260 rebus et 50, quanta sit ipsa res, nondum habeo compertum. Ita in similibus et multis aliis combinationibus.

Hoc dico dominationi vestre, me reperisse nunc Venetiis Diofantem, arithmeticum grecum nondum in latinum traductum. Hic in prohemio

---

1) Nach italienischem Sprachgebrauche ist hier *radix cubica radicis cubicae* nicht die 9., sondern die 6. Wurzel. Die Lösung Regiomontan's ist völlig richtig. Die von ihm beispielsweise angeführte Gleichung würde in unserer Bezeichnung heissen $5x^4 + 3x^3 + 8x^2 = 260x + 50$. Die Wurzel liegt zwischen 3 und 4.

diffiniendo terminos huius artis ascendit ad cubum cubi. Primum enim vocat numerum, quem nostri vocant rem, secundum vocat potentiam, ubi nos dicunt censum, deinde cubum, deinde potentiam potentie, vocant nostri censum de censu, iterum cubum de censu et tandem cubum cubi. Nescio tamen, si omnes combinationes horum prosecutus fuerit; non enim reperiuntur nisi 6 eius libri, qui nunc apud me sunt, in prohemio autem pollicetur se scripturum tredecim. Si liber hic, qui revera pulcerrimus est et difficillimus, integer inveniretur, curarem eum latinum facere; ad hoc enim sufficerent mihi littere grece, quas in domo domini mei Reverendissimi didici. Curate et vos, obsecro, si apud vestros usque inveniri possit liber ille integer. Sunt enim in urbe vestra nonnulli grecarum litterarum periti, quibus solent inter ceteros sue facultatis libros huiusmodi occurrere. Interea tamen, si suadebitis, sex dictos libros traducere in latinum excipiam, quatenus latinitas hoc novo et pretiosissimo munere non careat.

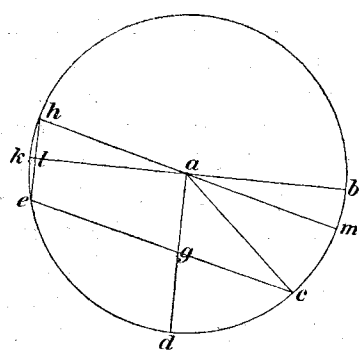
Quesitum quintum. Die sexta octobris anni preteriti 1463^{ti} in hac regione visa est stella in orizonte orientali distans per arcum orizontis a contactu meridiani g̃ 60 et m̃ 30, et hoc per horas 3 minuta 36 equales ante ortum Solis: queritur locus ipsius verus in ecliptica et latitudo eius.

Quoniam due sunt contactus meridiani et orizontis, problema erit biceps. Sive ergo contactum meridionalem assumpserimus sive septemtrionalem, non mutabitur forma syllogismi. Ponatur ergo distitior a contactu meridionali, ideoque et propter ypothesim habuisse declinationem ab equatore meridianam. Ut breviter dicam et sine figuratione, quoniam vulgaris est, invenio arcum semidiurnum Solis g̃ 81 m̃ 34, et ideo Solem oportuit distare a meridiano per g̃ 135 m̃ 34 circumferentie paralleli sui. Sed ascensio recta Solis fuit g̃ 289 m̃ 51. | Posui enim Solem in g̃ 21 m̃ 31 54 (46)^{a}
Libre, quare ascensio recta medii celi fuit g̃ 154 m̃ 17; arcum autem semidiurnum stelle elicio g̃ 68 m̃ 17, unde ascensionem rectam respondentem puncto ecliptice, cum quo stella ipsa celum mediat, oportuit esse g̃ 242 m̃ 34. Punctus autem ecliptice huiusmodi erat finis 28^{i} minuti de primo gradu Virginis, cum quo videlicet stella celum mediare solet. Declinationem autem stelle meridianam prius inveni g̃ 20 m̃ 28. Ex puncto autem mediatoris celi et declinatione stelle planum est invenire locum eius verum in ecliptica cum latitudine sua. Hoc etiam in alio responso meo accepistis, quare nunc pretereundum censebam.

Sextum quesitum. Duo sunt circuli, quorum primus habet diametrum 60 pedum, secundus vero 68, qui secundus ponitur supra primum ita, quod diametro unius supra diametrum alterius constituta occupantur 50 pedes ex diametro primi circuli: queritur, quantum de superficie eius occupetur.

Simile est in 6ta almaiesti capitulo 7°, nisi quod in hoc supposito corda communis duobus circulis predictis non secat distantiam centrorum, quemadmodum in figura Ptolemei videtur, sed cadit extra triangulum, quem claudunt duo diametri circulorum cum distantia centrorum suorum. Invenio autem post multam numerationem superficiem occupatam ex primo circulo pedum superficialium 1808 minutorum 30 et secundorum 7 fere. Fregi enim pedem in 60 minuta et minutum in 60 secunda, ut facilior esset et planior computatio fractionum. Usus sum proportione circumferentie ad diametrum 1554 ad 497. Hoc enim est minor tripla sesquiseptima, maior autem tripla superpartiente decem septuagesimas primas. Non tamen hec est vera proportio, sed veritati propinqua satis.[1])

Iubetur *septima* angulum, qui est tertia pars duorum rectorum, dividi in tres equales. Sunt certi modi id faciendi, quorum unum adduco (Fig. 29). Sit angulus *bac*, qualis supponitur, duabus lineis *ab* et *ac* contentus, super cuius vertice *a* facto centro describo circulum *bcde* secundum quantitatem *ab*, in cuius circumferentia reperietur punctus *c*. Prolongo semidiametrum *ba*, donec futura diameter concurrat circumferentie circuli in *k*, supra quam ex centro *a* egrediatur orthogonalis *ad* semidiameter circuli. Intelligo deinde lineam rectam quandam terminari ad punctum *c* | indefinite quantitatis ex parte sinistra. Hanc lineam intelligo moveri circa punctum *c* immotum secando semidiametrum *ad* tamdiu, quod partio linee mote inter semidiametrum *ad* et circumferentiam circuli versus sinistram intercepta sit equalis semidiametro circuli *ad*. Sit ergo in hoc situ *ge* portio huiusmodi equalis ipsi *ad*, aut per modum Alhacen in quinto perspective sue, ubi punctum reflexionis in speculis sphericis determinare docet, a puncto *c* dato in circumferentia ducatur in circulo *bede* corda *eg*, cuius pars inter *ad* positione datam et circumferentiam circuli intercepta sit equalis semidiametro *ad*. Quo facto ex puncto *e* oriatur corda *eh* secans diametrum circuli *bk* orthogonaliter in puncto *l*, ductaque diametro circuli per *h* punctum, que sit *hm*, ipsa dividet angulum *bac* in duos partiales *bam* et *mac*, quorum alter, scilicet *bam*, alterius medietas



55(47)a Fig. 29.

1) Wie Regiomontan auf diese falsche Annahme gekommen ist, sehe man später in seinen Rechnungen.

est. Si ergo supra punctum *a* linee *am* constituerimus angulum equalem angulo *bam*, habebimus totum angulum *bac* divisum in tres equales. Sed redeo ad probationem huius. Cum uterque angulorum *ela* et *dal* sit rectus, similiter due linee *eh* et *ag* equedistantes, quarum summitatibus adiecte sunt due linee equales *ah* et *ge*, et uterque duorum angulorum *hag* et *egd* obtusus est, necessario due linee *ha* et *eg* sibi equedistabunt. Item arcus *eh* divisus erit per medietatem in *k*, et erit arcus *hk* equalis arcui *bm*, arcus vero *he* equalis arcui *mc* propter equidistantiam linearum *hm* et *ec*, quare angulus *cam* duplus erit angulo *mab*. Cetera facile concluduntur. Sed revera ex hoc nondum elicitur corda 20 graduum, nisi sciatur linea *ag*, quam secat *ce* ex semidiametro *ad*. Ipsa enim erit corda 40 graduum, que equalis est corde *eh*. Hinc corda 20 graduum cognoscitur, et tandem corda unius gradus cum reliquis adiutoriis. De hoc nunc satis.[1])

Octavum. Sunt tres socii, quorum quilibet per se habet denarios in marsubio. Primus et secundus habent 30; secundus et tertius habent 42; tertius autem et primus habent 54: queritur, quantum quilibet habuerit.

Multis modis hoc solvitur. Primus habuit 21, secundus 9, tertius 33.

Hec ad quesita vestra respondere breviter libuit. Quod autem dicitis, vobis placuisse problemata tabule mee, gratum habeo, et postquam completa erit, e vestigio dominationi vestre offeram. Tabula est unica, extensa secundum latus transversale ab uno gradu usque ad 90, et in latere descendente similiter ab uno gradu usque ad 90, ut videbitis. | 55 (47)[b]

Grandem ingeritis mihi libidinem videndi flores almagesti, quos compilastis, et alia opera vestra; utinam ea mihi esset conditio, ut ore potius quam calamo affari possem. Nihil quippe in mundo est, unde maior mihi iocunditas nasceretur. Quod autem pronunciatis, erroneum esse modum inveniendi declinationem stelle fixe per latitudinem, si quam habet, et declinationem veri loci eius in ecliptica, quemadmodum nonnulli operari solebant, et Albategni ipse precipit, bene philosophamini. Nisi enim stella ipsa fuerit in principio Cancri aut Capricorni, nunquam latitudo stelle et declinatio veri loci eius in ecliptica sunt in una circuli circumferentia, sed semper angulariter concurrunt, unde alterum alteri non licebit addere, ut unus arcus resultet, nec alterum ex altero demi. Non turbet nos sententia hoc pacto fieri iubentium, qui, etsi aliarum rerum doctissimi sint, in hoc

1) Diese Konstruktion ist genau diejenige, welche sich in der Ratdolt'schen Ausgabe des Euklides von 1482 findet. Da sie aber in den Handschriften der Campano'schen Übersetzung oder Bearbeitung fehlt, so ist es nicht nothwendig, dass Regiomontan dieselbe aus einer solchen kennen gelernt hat, wie Cantor in seinen Vorlesungen annahm. In dem Euklid-Manuskripte Regiomontan's in Nürnberg ist sie ebenfalls nicht enthalten.

tamen a veritate recedunt. Amor veritatis non cedat fame populari. Nemo demum nisi insanus viam certam sibi cognitam negligit, et viam per nebulas quasdam sibi monstratam amplectitur.

Iam more meo alia vobis mitto quesita, que mihi inciderunt respondenti interrogatis vestris.

1. Consideravit quidam altitudinem stelle unius g̃ 8 m̃ 36; deinde post parvum temporis notavit iterum altitudinem eius, quam invenit g̃ 13 m̃ 17; item tertio altitudinem eius invenit g̃ 25 m̃ 7. Duo autem arcus orizontis intercepti inter tres circulos altitudinum erant tanti: primus scilicet remotior a meridiano erat g̃ 10 m̃ 15, secundus vero g̃ 16 m̃ 43. Quero declinationem huius stelle fixe latitudinemque regionis, ubi facta est consideratio, itemque distantiam stelle a meridiano secundum gradus orizontis in prima consideratione.

2. In qnadam regione, dum in medio celi supra terram erant g̃ 7 m̃ 18 Geminorum, Sol distabat a meridiano versus orientem per g̃ 25 m̃ 13 de circumferentia orizontis. Angulus autem orientalis septemtrionalis, quem continebat circulus altitudinis Solis cum ecliptica, erat g̃ 125 m̃ 27. Quero locum Solis, altitudinem eius et distantiam eius a meridiano secundum equatorem, item latitudinem regionis, ubi facta est consideratio.

3. Stella quedam mediat celum cum 25 gradibus minutis 17 Leonis hoc pacto situata, quod arcus inter polum ecliptice septemtrionalem et stellam cum arcu inter polum mundi septemtrionalem et stellam coniunctim
56(48)[a] sunt equales semicircumferentie circuli magni. Quero | quanta sit declinatio huius stelle, quantaque latitudo, et in quo loco ecliptice sit secundum veritatem.

4. In quadam regione, dum in medio celi est 26[us] gradus Tauri completus, oritur quedam stella fixa in ecliptica existens, cuius distantia a contactu meridiani et orizontis meridionali est g̃ 129 m̃ 39: quero locum verum stelle, declinationem eius et latitudinem regionis.

5. Est quedam stella in principio Arietis latitudinem habens septemtrionalem; arcus autem paralleli eius interceptus inter stellam ipsam et eclipticam secundum successionem signorum procedendo est g̃ 75 m̃ 53: quero, quanta sit latitudo huius stelle.

6. Arcus ecliptice a principio Tauri sumens initium et citra principium Cancri terminatus equalis est ascensioni sue recte: quero, quantus sit arcus ille, et suppono pro voluntate maximam Solis declinationem 25 graduum.

7. Supposita item declinatione maxima g̃ 25 est arcus quidam ecliptice, qui coniunctus ascensioni sue recte facit summam g̃ 65 m̃ 16: quero, quantus sit ipse arcus ecliptice et quanta sua ascensio recta.

8. Item supposita maxima declinatione Solis 23 graduum exercitii

gratia, quero, quantus sit arcus ecliptice ab Ariete incipiens et citra Taurum terminatus, arcus inquam, cuius ad suam ascensionem rectam differentia maxima est possibilis.

9. Supposita declinatione Solis maxima g̃ 23 m̃ 28 est arcus ecliptice a principio Arietis incipiens et citra Taurum terminatus, qui quidem excedit ascensionem suam rectam in g̃ 2 m̃ 13: quero, quantus sit ille arcus ecliptice.

10. In eclipsi lunari futura hoc anno in aprili quero, quantum in principio eclipsis distet punctus contactus Lune et umbre ab altera duorum punctorum circumferentie Lune, supremo scilicet vel infimo, per que transit circulus altitudinis Lune in ipso eclipsis principio.

11. Item paulo post principium eclipsis, dum exlipsantur ex diametro Lune quatuor digiti et 37 minuta, quero, quanta sit portio spherica corporis lunaris immersa umbre. Et ut facilius fiat, pono umbram in loco transitus Lune sphericam, licet in veritate sit conoidalis. Semidiametrum autem huiusmodi sphere umbrose admitto eam, que ex tabulis trahitur.

12. In eadem eclipsi, dum eclipsantur 5 digiti superficiales, quero, quot digiti lineares eclipsantur. Digitum superficialem optime scitis esse duodenam partem superficiei vel circuli lunaris vel solaris, imaginando utrumque tanquam circulum.

13. In fine eiusdem eclipsis, imaginando circulum magnum transire per centra Lune et umbre, qui secabit circumferentiam orizontis veri in duobus punctis, quero distantiam alterius eorum punctorum a contactu meridiani et orizontis. Hic enim est punctus, ad quem vergit flexus tenebrarum in fine elipsis.

14. Duo simul considerant principium eclipsis lunaris, quorum uterque in loco suo notat altitudinem unius et eiusdem stelle fixe. Primus quidem reperit altitudinem eius g̃ 27 m̃ 13; secundus vero altitudinem eiusdem stelle g̃ 31 m̃ 29. Primus reperit distantiam huius stelle a meridiano suo g̃ 33 m̃ 14 secundum gradus orizontis; secundus autem distantiam huiusmodi a meridiano reperit g̃ 46 m̃ 23. Duo autem loca, ubi fiunt considerationes, distant a se 658 miliaribus, quorum 28800 sunt in toto ambitu terre: Quero altitudinem poli in utroque locorum, item declinationem huius stelle fixe considerate, et quantum duo ipsa loca considerationum differant secundum longitudinem ab occidente habitato.

15. Stella quedam fixa habens latitudinem septemtrionalem mediat celum cum g̃ 15 m̃ 26 Leonis, secundum veritatem autem est in 12 gradibus et 9 minutis Leonis. Arcus autem declinationis et arcus latitudinis in centro stelle concurrentes continent angulum 135 graduum et 20 minutorum: quero, quanta sit latitudo stelle huius, et quanta declinatio. Suppono declinationem maximam g̃ 26.

16. Item stella quedam mediat celum cum g̃ 7 m̃ 25 Virginis habens latitudinem septemtrionalem, cuius declinatio coniuncta latitudini sue facit summam g̃ 126 m̃ 17: quero locum huius stelle et latitudinem cum declinatione.

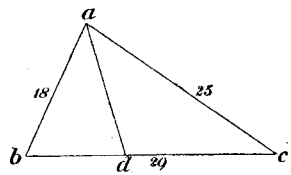


Fig. 30.

17. In triangulo abc (Fig. 30), cuius latus ab habet 18 pedes, ac pedes 25 et bc 29, produxi ex puncto a ad basim lineam ad hoc pacto, ut quadratum bd cum eo, quod fit ex da in ab, sit equale quadrato ab: quero quanta sit linea bd. Si dabitis lineam bd, dabo cordam unius gradus.[1])

240
114 · 87 · 39
97 · 56 · 3

18. Divisi 240 in tres numeros, quorum primum multiplicavi per 97, secundum per 56 et tertium per 3, productaque omnia collegi, et resultavit summa 16047: quero, quanti sint tres numeri partiales. Non admitto fractiones in hoc opere.[2])

19. Sint tres numeri quadrati inequales de medietate arithmetica,
57(49)[a] videlicet, quorum differentie sint equales, eorum autem radices quadrati | simul iuncte faciunt 214: quero, qui sint hi. Non admitto autem fractiones numerorum.[3])

20. Divisi 100 in duos inequales ita, quod radix quadrata minoris ducta in radicem cubicam maioris producat 25: Quero, qui sint huiusmodi numeri partiales. Admitto fractiones, admitto etiam numeros surdos, ut ita dicam, qualis est radix de 5.[4])

21. Tres numeri quadrati inequales coniuncti faciunt quadratum 4624, radices autem ipsorum coniuncte faciunt 116: quero, qui sint. Non admitto fractiones.[5])

22. In circulo sunt tres corde sibi conterminales, quarum una est 98347, proportio autem reliquarum duarum inter se est ut 5 ad 9. Quero, quanta sit utraque earum. Pono autem diametrum circuli 120000 perticas latum.

23. Item tres sunt corde conterminales, quarum una est 85639 par-

---

1) Vergl. hierzu Cantor, Vorlesungen II², S. 284.

2) Die Randglosse giebt die Lösung. Wie man sie fand, lehrt die 4. Abhandlung dieses Heftes. Die Gleichungen sind:

$$x + y + z = 240$$
$$97x + 56y + 3z = 16047.$$

3) Die Gleichungen sind:

$$x + y + z = 214; \quad x^2 - y^2 = y^2 - z^2.$$

4) D. h. $\sqrt{50 - x} \cdot \sqrt[3]{50 + x} = 25$.

5) $x^2 + y^2 + z^2 = 4624 = 68^2$
$x + y + z = 116$.

tium, differentia autem reliquarum duarum est 2579: quero, quanta sit utraque earum.

Sed nescio, quorsum evadit calamus, quem nisi restrinxero, carta deficiet. Alterum ex altero incidit, totque occurrunt pulcra problemata, ut incertus sim, que proponam, neque ab initio rebar, me tanta scripturum, presertim, ne tumultuose littere mee nimis equo obtunderent. Detis, obsecro, veniam calamo audaci et temerario. Ioanni enim scribenti veniam dari non opus est, cum et modestiorem videri sese velit, et omnibus in rebus libidini vestre obsequentissimum.

Multa (credite mihi) et iterum multa apud me habeo, que iudicio vestro submissa iri velim, si vacaret, que partim inventa sunt certissime, partim vero ancipiti pendunt et animum vehementer stimulant ad sui investigationem. Nam ut a suprema stellato orbe sermoni dem initium, qui hucusque materiam nostre suggessit conversationi, non possum non admirari socordiam astronomorum vulgarium nostre tempestatis, qui veluti mulieres credule, quicquid in libris sive tabularum sive canonum suorum offendunt, tanquam divinum quodpiam et immutabile acceptant; credunt scriptoribus et veritatem negligunt. Quid enim dicam de qualitate motus huius octave sphere, quam Ptolemeus noster clarissimus conclusit moveri in centum annis per unum gradum, Albategni vero post eum 743 annis in 66 annis fere per unum gradum. Declinationem maximam Solis hic reperit g̃ 23 m̃ 51 2̃ 20; ille vero g̃ 23 m̃ 35. Post eos Tebith | declinationem in- 57 (49)[b]
venit maximam g̃ 23 m̃ 33 fere. Novitate igitur huius rei perculsus cogitare cepit, unde huiusmodi mutatio nasceretur, post multasque conclusiones, cum vidit eclipticam octave sphere variam habere inclinationem ad equatorem, conclusit, ut multa pretermittam, octavam spheram moveri non super polis fixis, sed motu quodam vario, quem vocant trepidationis motum etc. Hanc imaginationem acceptavit etiam Arzachel, compositor tabularum Toletanarum, et plerisque modernis hodie magis placet, quam ea qualitas motus octave sphere, que ex modo operandi per tabulas Alfonsinas traditur. Ego vero, utra earum veritati propinquior sit, non satis comperio. Scio tamen, utramque earum (pace melius iudicantium dixerim) esse mendacem. Si enim positioni Tebith creditur, oportuit declinationem Solis maximam tempore Ptolemei fuisse g̃ 23 m̃ 41; ipse autem invenit eam g̃ 23 m̃ 51 fere. Errasset ergo in minutis 10, et ideo in acceptione distantie intra duos tropicos errasset in 20 minutis, quod non est verisimile tantum virum tam sensibiliter deceptum esse. Nam si sic, fuisset etiam deceptus in introitu Solis in Cancrum et inde excentricitatem Solis et cetera erronea concludisset. Item tempore nostro oporteret declinationem Solis maximam esse g̃ 24 m̃ 2. Nos autem (preceptor meus et ego) in-

strumentis reperimus eam g̃ 23 m̃ 28 fere. M. Paulum Florentinum[1]) et D. Baptistam de Albertis[2]) sepe audivi dicentes, se diligenter observasse et non reperisse maiorem g̃ 23 m̃ 30, que res etiam tabulas nostras, videlicet tabulam declinationis et ceteras, que supra eum fundantur, innovare persuadet. Argumentationes autem harum rerum alias, deo volente, videbitis certissimas. Quod si positione Alfonsine fidem habuerimus, cuius tabulis sive primis sive resolutis omnes moderni nostri utuntur, intelligite, que sequi oporteat. Primo enim ante omnia, maximam Solis declinationem tempore Albetegni oportuit fuisse g̃ 23 m̃ 45, quam tamen ipse diligens observator deprehendit g̃ 23 m̃ 35: error 10 minutorum, qui profecto sensibilis est. Tempore autem nostro declinatio Solis maxima esset g̃ 22 m̃ 47, quam instrumenta nostra prebent g̃ 23 m̃ 28: differentia 41 minutorum, error intollerabilis. Hoc fortasse non terreret quempiam, si solus ego rem hanc instrumento comperire tentassem, sed assunt viri doctissimi et fide digni Georgius[3]) bene memorie dominus preceptor meus, magister Paulus et D. Baptista supra memorati. Deinde concludo certissimis ratio-
58(50)[a] nibus distantiam augis Solis a capite Arietis octave sphere tempore | Ptolemei fuisse g̃ 43 m̃ 35. Hanc distantiam invariabilem esse oportet, si verum est, quod motus augis Solis motum octave sphere insequitur. Sed eam distantiam in tabulis Alfonsinis habent g̃ 71 m̃ 25. Est autem differentia inter hos numeros g̃ 27 m̃ 50, unde nonnumquam in numeratione argumenti Solis erraremus in g̃ 27 m̃ 50, quibus apud augem excentrici respondet fere unus gradus de equatione Solis. Et ideo in computatione motus Solis veri erraretur in gradu uno fere, quod, quantum sit inconveniens in iudiciis dandis, in eclipsibus et ceteris rebus, nemo ignorare debet. Preterea Sole existente in principio Arietis ecliptice fixe secundum computationem distabit ab equatore versus septemtrionem in gradibus fere 6. Quomodo igitur situm Solis in equatore computare poterimus? Sed de his hactenus.

Descendo ad spheras inferiores, Saturnum tamen et Iovem preterire libet, quod celi sui non tam inveterati sint (ut more quorundam loquar) quam Martis. Visus est Mars in celo, et computo differre per duos gradus per relationem ad stellas fixas et alias considerationes, nonnumquam differentia huiusmodi unius gradus et dimidii cernitur et quandoque multo minor. Quidam autem, imputantes hunc errorem radicibus mediorum mo-

1) Das ist Paolo dal Pozzo Toscanelli, geb. 1397, gest. 1482. Vergl. Boncompagni, *Bullettino* VII, 117.

2) Das ist der berühmte Baumeister Leon Battista Alberti 1404—1472, geb. zu Venedig, lebte er in Florenz. Vergl. Riccardi, Bibl. mathem. Italiana I, 17.

3) Natürlich Peurbach.

tuum, preter rationem defecerunt. Nam si in radicibus huiusmodi mediorum motuum tantummodo error esset, oporteret differentiam, que est inter locum computatum et locum verum, unicam invenire, quod non comperitur. Unde necessario estimandum est, eccentricitatem eius aut semidiametrum epicicli non prorsus recte inventas esse. Fieri tamen interea potest, ut revolutiones mediorum motuum aliquid erroris in tempore notabili immittant, sed et radices mediorum motuum etiam errorem ipsum augere, non potest negari. Longum tempus fluxit a Ptolemeo ad hunc diem, in quo medio tametsi Albategni et ceteri motus luminarium emendatiores reddiderint, reliquos tamen quinque erraticos intactos fere dimisere. Item si eccentricitas Martis est, quanta supponitur ab omnibus, et semidiameter epicicli similiter, sequitur arcum visualem maximam Martis ad arcum eius visualem minimam esse ut 52 ad unum fere. Credo ego, nemini unquam Martem tantum apparuisse aeris serenitate una et ceteris rebus eodem modo se habentibus. In Sole denique quomodo poterit esse certitudo computationis, si aliam declinationem eius maximam in tabulis scribimus, et aliam in celo instrumentis deprehendimus? Quod computi eclipsium mentiuntur, et in tempore durationis et quantitate partis eclipsate, itemque in principiis et finibus eclipsium, ideoque in veris applicationibus aut visibilibus, aut utrique luminarium imputabitur, aut Lune potissimum. Venerem denique | in celo tardiorem vidi, quam numeratio predixerat in tabulis, quartis 58 (50)[b]
unius gradus fere. Mendacium etiam in latitudinibus eius numerandis vitare est admodum difficile. Item stantibus fundamentis eccentricorum et epiciclorum oportet Veneris superficiem apud sensum quandoque apparere ut unum, alias autem ut 45, que res nemini aspicienti unquam innotuit. Item diameter eius visualis erit nonnunquam minuta 12 secunda 30, due scilicet quinte de diametro visuali Lune, quod quidem in celo nequaquam comprehenditur. Quid dicam de Mercurio, quem sepenumero apparere oportet in orizontibus nostris, si verum redderet tabula apparitionum et occultationum, que inter ceteras modernorum tabulas reperitur. Mercurius autem vel nunquam vel rarissime nobis apparet. Verum hoc inde procedit, quod tabula predicta non servit orizontibus nostris. Est enim composita a Ptolemeo in 10° capitulo 13^{e} dictionis ad medium quarti climatis, quo vehementius inscitia eorum admiranda venit, qui eam tabulis suis interserverunt tanquam omnibus climatibus usuventuram. In Luna postremo tanta, tamque crebra redundat differentia, ut et populares hoc divinum astrorum studium mordaci dente lacerare occipiant. Notavi equidem in anno 1461° eclipsim, que fuit in decembri, cuius finis in celo precedebat finem computatum per horam integram. Et ut finis ille in celo certior haberetur, accepi altitudines duarum stellarum Alhaioth et Aldebaran in

fine ipsius eclipsis, quatenus altera alteri testimonio esset. Alias etiam consideravi eclipses in tempore et quantitate partis eclipsate differentes multum a numeratione, de quibus alias latius dicendi locus erit. Quod si Luna habeat eccentrum et epiciclum, quemadmodum conclamatum est, oportebit, Lunam in certo situ quadruplo fere maiorem apparere quam in alio, rebus ceteris eodem modo se habentibus. De his iam satis.

Talibus rebus sepenumero vexor et deflere cogor segnitiem et frigiditatem nostre etatis. Profecto materia copiosa est volentibus hodie philosophari. Habemus ante oculos vestigia maiorum nostrorum, quo fit, ut cautius incedere possimus, modo ingenium huic rei accomodemus. Si ea mihi esset conditio, ut prope dominationem vestram vitam agere liceret, sperarem mille in huius modi rebus et solatia et fructus emoliri. Verum dominus meus Reverendissimus iturus est in Greciam in causa religionis christiane, ego autem ex dispositione sua in Italia remanebo. Vadant illi destructum Turcos, ego auxilio vestro et ceterorum amicorum celos reparare conabor. Pacem illi efficiant in rebus terrenis, nos curabimus rubiginem
59 (51)[a] celestium orbium abstergere eosque ad semitas regias redigere, | ceteris in quiete pulsis timoribus vita concedetur transigenda nobis ocium philosophantium gloriam parimet perpetuo duraturam, quod adeo facilius atque abundantius ambobus nobis eveniet, quo Ioannem vestrum obsequentem humanius, ut soletis, amplectemini. Dum per ocium poteritis litteris meis reddere vices, virtus vestra hortabitur. Nunc valete feliciter et me, ut cepistis, amare non desinatis.

Totus Vester Ioannes Germanus.

Ne autem fastidium pariant multiplicationes et divisiones numerorum per numeros, sive etiam radicum extractiones, satis erit, circa unumquodque quesitum modum operandi perstringere. Quis enim nisi rudis omnino operationes numerorum ignorat? Ut igitur labor vobis minuatur, hoc pacto deinceps alterum alteri respondere licebit. Ubi tamen absque numerorum usu responderi non poterit, utemur pro libito numeris, ut res ipsa postulat.

Zu diesen beiden Briefen, mit denen der uns erhaltene Briefwechsel Regiomontan's mit Bianchini schliesst, gehören folgende ausführliche Rechnungen Regiomontan's.

24 (16)[a], col. 1.

| Quesitum meum.

Est stella in g̃ 10 m̃ 25 Tauri latitudine carens, et alia in g̃ 27 m̃ 29 Tauri absque latitudine, tertia autem latitudinem habens septemtrionalem distat a prima per g̃ 6 m̃ 18, a secunda

autem per g̃ 20 m̃ 47: queritur locus verus huius stelle cum latitudine.

Sit portio equatoris *bg* (Fig. 31), portio ecliptice *bm*, *b* principium Arietis, *h* prima stella, *k* secunda, *l* tertia extra eclipticam versus septemtrionem, arcus *hl* $\overline{6} \cdot 18'$, arcus *lk* $\overline{20} \cdot 47'$, queritur locus stelle in *l* collocati. Habes in figura 1ª triangulum *hkl* trium notorum laterum, unde concludas cetera. Sed quo res expeditior habeatur, absumo triangulum *hkl* confusionis tollende gratia.[1])

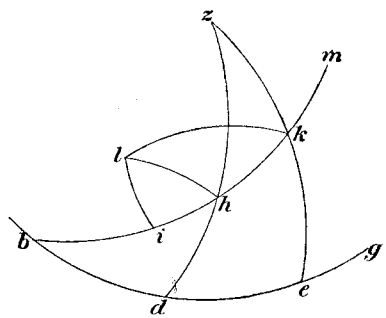


Fig. 31.

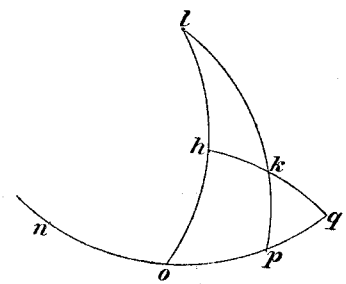


Fig. 32.

Supra polo *l* describatur circulus magnus in sphera (Fig. 32), cuius portio sit *nq*. Huic concurrat arcus *hk* prolongatus in puncto *q*.

$\overline{27} \cdot 29'$
$\underline{10 \cdot 25}$
$17 \cdot 4$ arcus *hk*,
$6 \cdot 18$ arcus *hl*,
$20 \cdot 17$ arcus *lk*.
$83 \cdot 42$ arcus *ho*; 59638 sinus arcus *ho*,
$69 \cdot 13$ arcus *kp*; 56096 sinus arcus *kp*.

Est autem proportio sinus *ho* ad sinum *kp* sicut sinus *hq* ad sinum *kq* (Fig. 33).

$\overline{17} \cdot 4'$
$8 \cdot 32$ arcus *hy*; 8903 sinus *hy*.
8903
$\underline{17806}$ corda *hk*.
59638
$\underline{56096}$
3542 linea *hv*.

1) Auch diese Aufgabe löst er, wie oben, nach Buch IV seiner Trigonometrie.

Est autem *hv* ad *vs* sicut *hk* ad *kx*.

3542 · 56096
17806

col. 2.

| 56096
17806
336576
448768
392672
56096
998845376

2112
357481
998845376
354222222
3544444
35555
333

| 2
8
2
0
0
0

282000 linea *kx*.

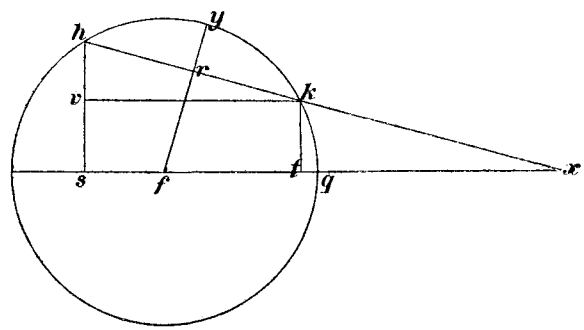


Fig. 33.

$\overline{8} \cdot 32'$
$8 \cdot 28$ complementum arcus *hy*; 59336 linea *fr*

282000
8903
290903 linea *rx*

col. 3.

| 59336
59336
356016
178008
178008
534024
296680
3520760896 quadratum *fr*;

290903
290903
872709
2618127
2618127
581806
84624555409 quadratum *rx*.
3520760896
88145316305 quadratum *fx*.

45		
11666		
1 577436	2	
141279548	9	
42569772241	6	
88145316305	8	col. 4.
4 8 2 6 8	9	
5 9 3 7	2	
5 9 3		
5 9		
5		

296893 linea *fx*.

296893 · 59336
60000 /

	1		
	116		
	1422		
	29193		
	372318	1	
59336	1139139	1	
60000	29433623	9	
3560160000	591237337	9	
	35601600000	1	21(16)[b], col. 1.
	29689333333		
	29689999		
	296888		
	2966		
	29		

11991 linea *fr*, ut *fx* est 60000, et est sinus arcus anguli *fxr*.

$\overline{11} \cdot 32'$ angulus *fxr* [1])

$78 \cdot 28$ angulus *rfx*, et tantus numeratur arcus *yq*

$8 \cdot 32$

$87 \cdot 0$ arcus *hq*

$69 \cdot 56$ arcus *kq*; 56358 sinus *kq*.

Sinus *kq* ad sinum *kp* sicut sinus totus ad sinum anguli *kqp*.

---

1) 11991 ist in der Tafel eher der Sinus von 11°31′; denn sin 11°32′ ist nach ihr = 11996, dagegen sin 11°31′ = 11992.

56358 · 56096
60000/

	1	
	8	
	146	
	5683	
	41791	
	931278	5
56906	54782328	9
60000	858218442	7
3365760000	3365760000	2
	563588888	1
	5635555	
	56333	
	566	
	5	

col. 2. | 59721 sinus anguli kqp; $\overline{84} \cdot 28'$ angulus kqp

$5 \cdot 31$ complementum anguli kqp

5768 sinus huius complementi.

Sinus complementi arcus kp ad sinum complementi anguli kqp sicut sinus totus ad sinum anguli pkq.

21290 · 5768
60000/

	111	
	5221	
	7432	
	13987	1
5768	13414255	6
60000	34608000 0	2
346080000	21299999	5
	212222	5
	2111	
	22	

16256 sinus anguli pkq sive lkh; $\overline{15} \cdot 43'$ angulus lkh.[1])

Nunc redeo ad primam figurationem, in qua demitto ex puncto l perpendicularem arcum li ad eclipticam.

Sinus totus ad sinum anguli lkh sive lki sicut sinus arcus lk ad sinum arcus li.

---

1) In der Tafel ist sin $15^0 43' = 16253$

```
60000 · 16256
21290/
     16256
     21290
   -------
   1463040
   32512
  16256
 32512
 -------
   441 |
 34699 |0240
  5768 |
```

| 5768 sinus arcus *li*; $\overline{5} \cdot 31'$ arcus *li*, et est latitudo septemtrionalis stelle quesita. col. 3.

$84 \cdot 29$ complementum arcus *li*

59722 sinus huius complementi

$\overline{15} \cdot 43'$ angulus *lkh*

$74 \cdot 17$ complementum anguli *lkh*

57757 sinus huius complementi.

Sinus complementi arcus *li* ad sinum complementi anguli *lki* sicut sinus arcus *lk* ad sinum arcus *ki*.

```
59722 · 57757
21290/

                  13 |
   21290          51 |
   57757          6662 |
  ------       1132747 |
  149030       3574579 | 2
 10645        45253972 | 0
 14903       1229646530 | 5
 14903        597222222 | 8
10645          5972222 | 9
----------      59777 |
1229646530        599 |
                    5 |
```

20590 sinus arcus *ki*; $\overline{20} \cdot 4'$ arcus *ki*[1])

$17 \cdot 4$ arcus *kh*

$3 \cdot 0$ arcus *hi*

| $40 \cdot 25$ arcus *bh* col. 4.

$37 \cdot 25$ arcus *bi*.

1) In der Tafel ist sin $20^0 5' = 20587$.

Igitur stelle tertie locus erit in 7 gradibus minutis 25 Tauri. Ipsa quoque latitudinem septemtrionalem habebit graduum 5 minutorum 31.

Probatio huius. In triangulo *lih* rectangulo duo latera *li* et *ih* cognite sunt, quero tertium *lh*, scilicet distantiam duarum stellarum *h* et *l*, que si eveniet, quantum nunc supposuimus, procul dubio bene actum est. Est autem proportio sinus totius ad sinum complementi arcus *hi* sicut sinus complementi arcus *li* ad sinum complementi arcus *lh*.

$\overline{3} \cdot 0'$ arcus *hi*

$87 \cdot 0$ complementum arcus *hi*; 59918 sinus huius complementi.

```
60000 · 59918
59722/
        59918
        59722
       119836
      119836
     419426
    539262
   299590
   ------------
     22
   357842 | 2796
    59640 |
```

59640 sinus complementi *lh*; $\overline{83} \cdot 43'$ complementum arcus *lh*

$6 \cdot 17$ arcus *lh*.

Hic supponebatur gradus 6 minuta 18, differentia in uno minuto, quam ingessit condicio numeratoris. Nam sicut non utitur sinibus integris sive precisis omnino, ita dividendus numerus non semper tollitur totus etc.

25(17)[a], col. 1.

| Interrogata Domini Ioannis de Blanchinis.

Tres sunt stelle, quarum due in eodem loco ecliptice dicuntur esse, prima tamen earum habet latitudinem septemtrionalem g̃ 3 m̃ 25; secunda latitudinem habet g̃ 28 m̃ 48. Tertia autem stella dictas sequens secundum successionem signorum est in g̃ 6 m̃ 15 Geminorum cum latitudine septemtrionali g̃ 12 m̃ 9; habet autem hec tertia distantiam a prima secundum arcum circuli magni per centra transeuntis g̃ 26 m̃ 40. Queritur distantia ipsius a secunda stella atque locus prime et secunde stellarum in ecliptica.

Respondeo (Fig. 34).

Arcus *dh* ecliptice; *a* prima stella, *b* secunda, *g* tertia stella; *z* polus

ecliptice; *ag* arcus continuatus occurrat ecliptice in *d* puncto; *n* centrum circuli, semidiameter *nm* orthogonaliter secat cordam *ag*. In prima figura arcus *bs* perpendiculariter descendit ad arcum *zg*. Hinc collige syllogismum.

| $\overline{3} \cdot 25'$ arcus *ae*; col. 2.
28 · 48 arcus *be*;
12 · 9 arcus *gh*.

Primo video possibilitatem suppositi hoc est, an quelibet duo latera trianguli *zag* coniuncti longiora sint tertio reliquo.

$\overline{86} \cdot 35'$ arcus *za*;
77 · 51 arcus *zg*;
26 · 40 arcus *ag*.

Bene stat.

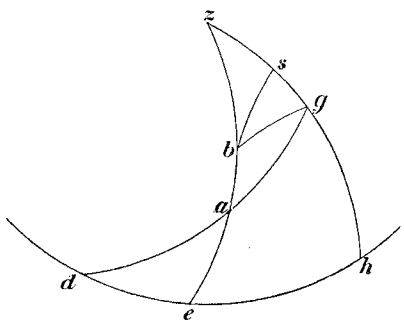


Fig. 34.

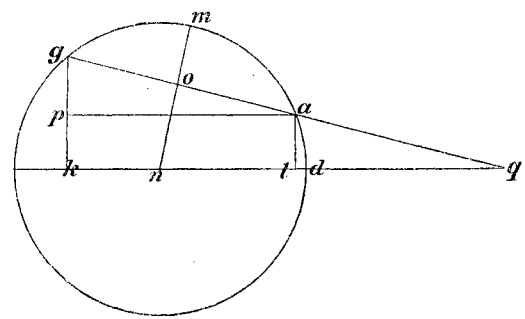


Fig. 35.

12628 sinus *gh* (Fig. 35)
3576 sinus *ae*
13 · 20′ dimidius *ag*; 13837 sinus arcus *am*,
27674 corda arcus *ag*
12628
3576
9052 linea *gp*, ut *al* est 3576

9052 · 3576
27674

| 27674
3576
166044
193718
138370
83022
98962224

| 57
2238
3959
44746
98962224
90522222
905555
9000
99

| 1
0
9
3
2

col. 3.

10933 linea *aq* ut *ag* est 27674.
13837
24770 linea *qo*

$\overline{13} \cdot 20'$

76 · 40 complementum arcus *am*; 58383 sinus huius complementi, et est linea *no*

col. 4.

| 24770	58383
24770	58383
1733900	175149
17339	467064
9908	175149
4954	467064
	291915
613552900 quadratum *qo*;	3408574689 quadratum *no*,
	613552900
	4022127589 quadratum *qn*.

11213	
15554	
4637611	6
4022127598	3
1 2 6 8 4	4
1 2 6 8	2
1 2 6	0
1 2	
1	

63420 linea *qn*.

63420 · 58383
60000

	239	
	2341	
	141537	
58383	362948	5
60000	351896 42	5
3502980000	3502980000 0	2
	63422222	3
	634444	4
	6333	
	66	

25 (17)[b], col. 1. 55235 linea *no*, ut *qn* est 60000, | et est sinus anguli *oqn*,

$\overline{67} \cdot 1'$ angulus oqn[1]), ut quatuor recti sunt 360,
$22 \cdot 59$ angulus qno, et tantus habetur arcus dm.
$13 \cdot 20$
$36 \cdot 19$ arcus dg,
$9 \cdot 39$ arcus da,
$3 \cdot 25$ arcus ae.
$86 \cdot 35'$ complementum arcus ae; 59893 sinus huius complementi
$9 \cdot 39$ arcus da
$80 \cdot 21$ complementum arcus da; 58151 sinus huius complementi.

Sinus complementi ae ad sinum complementi ad sicut sinus totus ad sinum complementi de.

59893 · 59151
60000

	3	
	4	
	3	
	44	
	89 3	
	154999	5
59151	2621479	9
60000	15347571	2
3549060000	159451345 2	5
	3549060000	6
	598933333	
	5989999	
	59888	
	599	
	5	

59257 sinus complementi arcus de; $\overline{80} \cdot 58'$ complementum de[2]),
$9 \cdot 2$ arcus de,
$12 \cdot 9$ arcus gh col. 2.
$77 \cdot 51$ complementum arcus gh.
58696 sinus huius complementi.
$36 \cdot 19$ arcus dg.
$53 \cdot 41$ complementum arcus dg.
48345 sinus huius complementi.

Sinus complementi gh ad sinum complementi gd sicut sinus totus ad sinum complementi dh.

1) In der Tafel ist sin $67^0 1' = 55237$.
2) In der Tafel ist sin $80^0 58' = 59256$.

58656 · 48345
60000 /

	14	
	356 4	
	61938	
	273146	
	325518	4
48345	1546131	9
60000	58646688	4
2900700000	290070000	5
	58656666	2
	5865555	
	58666	
	588	
	5	

49453 sinus complementi hd; $\overline{55} \cdot 31'$ complementum arcus hd[1]),
$34 \cdot 29$ arcus hd,
$9 \cdot 2$ arcus de
$25 \cdot 27$ arcus eh, et tantus est angulus bzg
$66 \cdot 15$
$25 \cdot 27$
$40 \cdot 48$ arcus a principio Arietis ad locum duarum primarum stellarum. Sunt igitur in $\overline{10} \cdot 48'$ Tauri.

col. 3. | Tandem pro arcu bg inveniendo.
$\overline{28} \cdot 48'$ arcus be
$61 \cdot 12$ arcus zb; 52578 sinus arcus zb
$25 \cdot 27$ angulus bzg; 25783 sinus anguli bzg sive bzs.

Sinus totus ad sinum anguli bzs sicut sinus arcus zb ad sinum arcus bs.

60000 · 25783
52578 /

52578	
25783	
157734	
420624	
368046	
262890	
105156	
13 23	
135561	8574
22593	

1) In der Tafel ist sin 58°31′ = 49457.

22594 sinus arcus bs; $\overline{22} \cdot 7'$ arcus bs.[1])

$\overline{22} \cdot 7'$ arcus bs.

67 · 53 complementum arcus bs; 55585 sinus huius complementi

28 · 48 arcus be sive complementum arcus zb; 28905 sinus huius complementi.

Sinus complementi bs ad sinum complementi bz sicut sinus totus ad sinum complementi zs.

```
55585 · 28905
60000/
                 11128
                 66769
                289955
28905          | 1734300000 | 3
     60000     |  555855555 | 1
1734300000     |   5588888  | 2
                   55555    | 0
                     555    | 0
                       5    |
```

col. 4.

31201 sinus complementi zs[2]); $\overline{31} \cdot 20'$ complementum zs.

58 · 40 arcus zs

12 · 9 arcus gh

$\overline{77} \cdot 51$ arcus zg.

58 · 40

$\overline{19} \cdot 11$ arcus sg

70 · 49 complementum arcus sg.

56668 sinus huius complementi

Sinus totus ad sinum complementi sg sicut sinus complementi bs ad sinum complementi bg.

```
60000 · 56668
55585/
      56668
      55585
     283340
    453344
   283340
  283340
 283340
 12541|
314989|0780
 52498|
```

1) Nach der Tafel ist sin 22°7′ = 22589.

2) Weshalb hier die letzte Ziffer erhöht ist, ist nicht einzusehen.

52498 sinus complementi bg; $\overline{61} \cdot 2'$ complementum arcus bg[1]),
$28 \cdot 58$ arcus bg.

26(18)[a], col. 1. | Tertia igitur stella habet distantiam a secunda $\overline{28} \cdot 58'$.

Hec de primo.

Secundum.

Divisi 100 per certum numerum, deinde divisi 100 per eundem numerum additis 8, et summa exeuntium fuit 40. Queritur quantitas primi divisoris.[2])

$$\frac{100}{1\ \text{ꝛ}} \qquad \frac{100}{1\ \text{ꝛ et } 8}$$

$$100\ \text{ꝛ et } 800$$
$$\underline{100\ \text{ꝛ}}$$
$$\frac{200\ \text{ꝛ et } 800}{1\ \text{ꝛ et } 8\ \text{ꝛ}} - 40$$

$$40\ \text{ꝛ et } 320\ \text{ꝛ} - 200\ \text{ꝛ et } 800$$
$$40\ \text{ꝛ et } 120\ \text{ꝛ} - 800$$
$$1\ \text{ꝛ et } 3\ \text{ꝛ} - 20$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} \text{ addo numerum } 20\frac{9}{4} - \frac{89}{4}$$

Radix quadrata de $\frac{89}{4}$ minus $\frac{3}{2}$ — 1 ꝛ

Primus ergo divisor fuit ℞ de $22\frac{1}{4}$ $\overline{\text{ꝛ}}$ $1\frac{1}{2}$.

---

1) sin 61°2′ ist in der Tafel = 52494.

2) In moderner Bezeichnung ist die Rechnung folgende:

$$\frac{100}{x} \qquad \frac{100}{x+8}$$

$$100x + 800$$
$$\underline{100x}$$
$$\frac{200x + 800}{x^2 + 8x} = 40$$

$$40x^2 + 320x = 200x + 800$$
$$40x^2 + 120x = 800$$
$$x^2 + 3x = 20$$

$$\frac{3}{2} \left| \frac{9}{4} \right. \text{ hierzu das von } x \text{ freie Glied, } 20\frac{9}{4} = \frac{89}{4}$$

$$\sqrt{\frac{89}{4}} - \frac{3}{2} = x, \text{ also war der erste Divisor } \sqrt{22\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}.$$

Tertium.

Quidam accessit ad campsorem cum 10 florenis et ipsos campsit in grossos. Ex summa autem grossorum accepit 60 grossos, quos in priori cambio mutavit in florenos. Quo facto reperit se habere ex grossis et florenis 80: queritur, quot grossi valuerint florenum.[1])

Flor.	grss
1	1 ℛ
10	10 ℛ
	10 ℛ $\overline{\text{ig}}$ 60
1 ℛ · 1	10 ℛ $\overline{\text{ig}}$ 60
10 ℛ $\overline{\text{ig}}$ 60	1 ℛ

1) Diese Rechnung lautet in unserer Bezeichnung:

1 Fl	x gr.
10 Fl	$10x$ gr.
	$10x - 60$ gr.

$$x : 1 = 10x - 60 : y. \qquad y = \frac{10x - 60}{x}.$$

Man addiert also $10x - 60$ und $\frac{10x - 60}{x}$

$$\frac{10x - 60}{1} + \frac{10x - 60}{x}$$

$$\begin{array}{r} 10x^2 - 60x \\ 10x - 60 \\ \hline 10x^2 + 10x - (60x + 60) \end{array}$$

$$\frac{10x^2 - (50x + 60)}{x} - \frac{80}{1}$$

$$80x = 10x^2 - (50x + 60)$$

$$130x + 60 = 10x^2$$

$$13x + 6 = x^2$$

$\frac{13}{2}$ aufs Quadrat $\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$, hierzu $6 = \frac{193}{4}$

$$\sqrt{\frac{193}{4}} + 6\frac{1}{2} = x.$$

Aus allen diesen Rechnungen ist klar, dass Regiomontan ein Gleichheitszeichen (einen längern horizontalen Strich) besass. Es ist wahrscheinlich, dass in obiger Art die Rechnungen damals überhaupt praktisch angeordnet wurden.

Colligo igitur 10 ℛ ℐ 60 cum $\frac{10\ ℛ\ ℐ\ 60}{1\ ℛ}$

col. 2. | $\frac{10\ ℛ\ ℐ\ 60}{1}$ $\frac{10\ ℛ\ ℐ\ 60}{1\ ℛ}$

10 ℭ ℐ 60 ℛ
10 ℛ ℐ 60

10 ℭ et 10 ℛ ℐ 60 ℛ et 60

$\frac{10\ ℭ\ ℐ\ 50\ ℛ \text{ et } 60}{1\ ℛ} - \frac{80}{1}$

80 ℛ — 10 ℭ ℐ 50 ℛ et 60
130 ℛ et 60 — 10 ℭ
13 ℛ et 6 — 1 ℭ

$\frac{13}{2}$ in se 13
13
39
13
$\frac{169}{4}$, huic addo 6 — $\frac{193}{4}$

Radix quadrata de $\frac{193}{4}$ et $6\frac{1}{2}$ — 1 ℛ.

26(18)[b], col. 1. | **Quartum quesitum.**

Quidam cum 100 ducatis in primo anno lucratur aliquid; deinde in secundo anno cum capitali et lucro primi anni lucratur proportionaliter, et ita continue usque 6 annos; in fine autem sex annorum colligit summam ex capitali primo et omnibus lucris 900 ducatorum: queritur lucrum primum.

100 · 1 ℛ
1 ℛ

$\frac{1\ ℭ}{100}$

Habebis in 6 annis rem, censum, cubum, censum de censu, censum de cubo et cubum de cubo equales numero. Labyrinthus maximus.[1])

Quintum.

Die sexta octobris proximi preteriti anni 1463 in Ferraria, ut ita dicam, visa est stella in orizonte orientali distare per

1) Es ist hieraus klar, weshalb wir oben (S. 256) die *radix cubica radicis cubicae* nicht gleich $\sqrt[9]{\ }$ sondern $= \sqrt[6]{\ }$ gesetzt haben.

ortum orizontis a contactu meridiani per g̃ 60 m̃ 30, et hoc per horas 3 equales minuta 36 ante ortum Solis. Queritur locus ipsius verus in ecliptica et latitudo eius.

| $\overline{21} \cdot 31'$ verus locus Solis ad meridiem sexti diei octobris. col. 2.

$\overline{8} \cdot 14' \cdot 5''$
$8 \cdot 36 \cdot 49$
$22 \cdot 44$
$31 \cdot$
$11 \cdot 22$
$8 \cdot 25 \cdot 27$ declinatio Solis meridionalis.

Pro arcu semidiurno (Fig. 36).

$\overline{44} \cdot 45'$	latitudo loci considerationis;	42241	sinus zb,
$45 \cdot 15$	arcus ab;	42611	sinus ab,
$8 \cdot 25$	arcus th;	8782	sinus th,
$81 \cdot 35$	arcus hz;	59354	sinus hz.

Composita:

42611 · 42241
8782 · 59354 x
60000 · *sinus te*

	3	
42241	51	
8782	294	
84482	32679	8
337928	54182717	7
295687	370960462	0
337928	42611111	5
370960462	426111	
	4266	
	42	

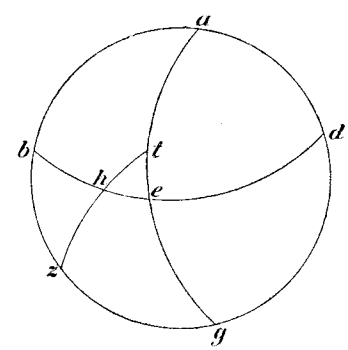


Fig. 36.

col. 3

8706 linea x.

59354 · 8706
60000

	34	
	4 584	
8706	1579288	8
60000	522360000	8
522360000	59354444	0
	593555	0
	5933	
	59	

8801 sinus arcus *te*; $\overline{8} \cdot 26'$ arcus *te*[1]),
$81 \cdot 34$ arcus *at* semidiurnus.

3 ha 36 mi[ta]
45
9
$54 \cdot 0$
$81 \cdot 34$
$135 \cdot 34$ distantia Solis a meridie, a medio celi in Solem computando.
$289 \cdot 51$ ascensio recta Solis
$135 \cdot 34$
$154 \cdot 17$ ascensio recta medii celi hora considerationis.

col. 4. | Nunc pro arcu semidiurno stelle. Quoniam autem meridianus occurrit orizonti in duobus punctis, potuit interrogator ab utroque punctorum sectionis arcum suum computare. Sed ego limito me, tanquam stella habeat declinationem meridianam, et arcus orizontis computatus sit a puncto *b*.

$\overline{60} \cdot 30'$ arcus *bh*
$29 \cdot 30$ arcus *he*; 29545 sinus *he*.

Concluditur autem, proportionem sinus totius ad sinum arcus *ab* esse tanquam sinus arcus *eh* ad sinum *th* declinationis stelle.

60000 · 42611
29545/
42611
29545
213055
170444
213055
383499
85222
412
123894|1995
20982

20982 sinus *th*; $\overline{20} \cdot 28'$ arcus *th*[2]), et est declinatio stelle in *h* orientis.
$69 \cdot 32$ complementum arcus *th*,
56213 sinus huius complementi
$60 \cdot 30$ complementum *eh*,
52221 sinus huius complementi.

1) Nach der Tafel ist sin $8^0 26' = 8800$.
2) In der Tafel ist sin $20^0 28' = 20980$.

| Sinus complementi *th* ad sinum complementi *he* sicut sinus totus ad sinum complementi *te*. 27 (19)[a], col. 1.

56213 · 52221
60000

	5	
	6	
	11	
	1535	
	2156	
	23997	5
52221	4654559	5
60000	371668862	7
3133260000	622715913	3
	3133260000	9
	562133333	
	5621111	
	52222	
	566	
	5	

55739 sinus complementi *te*; $\overline{68} \cdot 17'$ complementum *te*[1]),
21 · 43 arcus *et*.
68 · 17 arcus semidiurnus stelle, et est arcus *at*
154 · 17
88 · 17 ascensio recta puncti ecliptice, cum quo stella nostra celum mediat.
0 · 28 Virginis, huic respondet ascensio recta.

Igitur stella mediat celum in 28 minutis primi gradus Virginis, et habet declinationem meridianam $\overline{20} \cdot 28'$. Ex his autem constabit verus locus eius in ecliptica cum latitudine sua. In simili enim re alias responsum est.

| Sextum interrogatum. col. 2.

Duo sunt circuli, primus habens diametrum 60 pedum, secundus vero 68, qui secundus circulus supraponitur primo, diametro quidem super diametro, occupando de diametro primi 50 pedes: queritur, quantum de superficie seu area primi occupabitur (Fig. 37).

Primus circulus sit *abgd* supra centrum *e*, secundus *agh* super centro *z*, quorum due diametri sint in linea recta *bh*, circumferentie autem eorum

1) In der Tafel ist sin 68°17′ = 55741.

secent se in duobus punctis *a* et *g*. Ducatur corda eis communis *ag* secans necessario diametros orthogonaliter in puncto *k* etc[a].

60 linea *bd*; 30 linea *ed*;
50 linea *dl*; 34 linea *zl*;
64 aggregatum diametrorum.
50
14 linea *ez*, distantia scilicet centrorum.

	34		14
	34		14
	136	30	56
	102	30	14
col. 3.	1156 quadratum linee *za*;	900 quadratum *ea*;	196 quadratum *ez*

900
196
1096,

cum itaque quadratum *za* sit maius duabus quadratis linearum *ae* et *ez*, erit angulus *aez* obtusus, et ideo perpendicularis *ak* cadet extra triangulum *aez*.

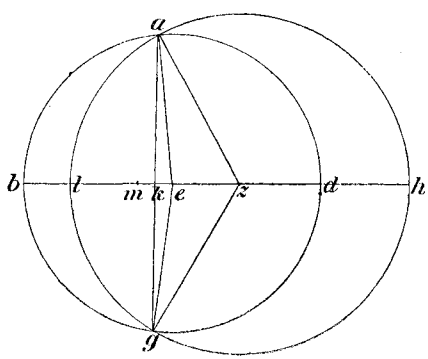


Fig. 37.

1156
900
256, quod fit ex *ez* in *zm*; est autem *km* posita equalis ipsa *ke*

3
114
256
144
1

$18\frac{2}{7}$

$18\frac{2}{7}$ linea *zm*
14
$4\frac{2}{7}$ linea *em*
$2\frac{1}{7}$ linea *ke* $\frac{15}{7}$.

col. 4.	15	49
	15	900
	75	44100
	15	225
	225	43875000000
	49 quadratum linee *ke*;	49000000 quadratum linee *ak*.

25	
1371	
225146	
13666873	2
294842441	0
43875000000	9
4 0 8 8 2	4
4 1 8 9	6
4 1 8	3
4 1	
4	

49000000	7
1 4	0
	0
	0

209464 Radix quadrata numeratoris

7000 radix quadrata denominatoris

$\frac{209464}{7000}$ fere linea *ak*.

Nunc quero angulum *aeb*

$$30 \cdot \frac{209464}{7000}$$ 27 (19)[b], col. 1.

60000

209464
60000

$\frac{12567840000}{7000}$, hic dividendus est per 30.

$\frac{12567840000}{210000}$, tanta est linea *ak*, ut *ea* est 60000.

1	
1112	5
27948	9
1256784	8
211111	4
2222	6

59846 linea *ak*, ut *ea* est sinus totus 60000

$\overline{85} \cdot 54'$ arcus *ab*, ut tota circumferentia circuli *abgd* est 360.

$$3\frac{1}{7} \cdot 3\frac{10}{71}$$

$$\frac{22}{7} \cdot \frac{221}{71}$$ [1])

142 1547
142

$$\frac{1562}{497} \cdot \frac{1547}{497}$$

1) Hier hat Regiomontan $3 \cdot 71 = 211$ statt 213 gesetzt, wodurch die falsche Behauptung entstanden ist, es sei π näherungsweise $= \frac{1554}{497}$.

Dum igitur semidiameter circuli est 497, semicircumferentia eius est minor 1562 et maior 1547.

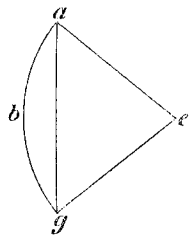


Fig. 38.

$$\begin{array}{r} 1562 \\ 1547 \\ \hline 15 \\ 1547 \\ \hline 1554. \end{array}$$

Dum ergo semidiameter est 497, circumferentia rationabiliter fere est 1554.

col. 2.

$$\begin{array}{r|l} & 497 \cdot 1554 \\ & 30 \\ \hline 3 & \\ 4 & \\ 69 & \\ 182 & \\ 12599 & \\ 46620 & \\ 4977 & \\ 49 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1554 \\ 30 \\ \hline 46620 \end{array}$$

$93\frac{57}{71}$ [1]) pedes, semicircumferentia circuli $abgd$.

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ 44 & \\ 621 & \\ 2130 & 37 \\ 577 & \\ 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ 30 \\ \hline 2790 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 71 \\ 30 \\ \hline 2130 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2130 \\ 37 \\ \hline 2167\frac{21}{57} \end{array}$$

area circuli $abgd$ [2])

$$180 \cdot \overline{89} \cdot 54'$$

$$2167\frac{21}{57}$$

Ut fiat facilius, reduco primum et secundum ad minuta.

10800′ primus,
5154′ secundus,

$$\begin{array}{r} 2167 \\ 57 \\ \hline 15169 \\ 10835 \\ 21 \\ \hline 123540 \end{array}$$

$\frac{123540}{57}$ tertius.

---

1) Im Manuskripte steht $\frac{71}{57}$.

2) Es müsste heissen $\begin{array}{r} 2790 \\ 37 \\ \hline 2827\frac{21}{57} \end{array}$, also ist auch das Folgende unrichtig.

col. 3.

| 123540
5154
494160
61770
12354
61770
636725160 hic dividendus est per 10800
57

10800
57
75600
540
615600 denominator.

1	
29	
261	
3854	
211777	1
636725316|0	0
66560000	3
615666	4
6155	
61	

$1034\frac{541}{1710}$ sector *abge* (Fig. 38)

$\frac{209464}{7000}$ linea *ak*; $2\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}$ linea *ke*

209464
5
1047320 numerator; 14000 denominator.

$\frac{1047320}{14000}$ area trianguli *eag*

1	
2	
361	
| 1047320	74 pedes superficiales.
140000	
1400	

col. 4.

$74\frac{283}{350}$ area trianguli *eag*.

1034
74
960

$959\frac{67}{350}$ et $\frac{541}{1710}$ portio *abg*, et sunt pedes superficiales quadrati.

$$\begin{array}{r} 2167 \\ 959 \\ \hline 1208 \\ \hline \end{array}$$

$1207\frac{238}{350}$ [1]) $1206\frac{21}{57}$ et $\frac{238}{350}$ et $\frac{1169}{1710}$ portio *adg*.

Nunc pro portione *alg*.

$$34 \cdot \frac{209464}{7000}$$

$$60000 /$$

$$\begin{array}{r} 209464 \\ 60000 \\ \hline 12567840000 \\ \hline 7000 \end{array}, \text{ hic dividendus est per 34.}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ 7000 \\ \hline 259000 \end{array}$$ [2]) $\frac{12567840000}{259000}$ linea *ak*, ut *za* est 60000.

28 (20)[a], col. 1.

$$\begin{array}{r|l} 1\ 11 & \\ 2\ 23 & \\ 26162 & 4 \\ 4235264 & 8 \\ 12567840 & 5 \\ 2599999 & 2 \\ 25555 & 4 \\ 222 & \end{array}$$

48524 linea *ak*, ut *za* est 60000.

$\overline{53} \cdot 58'$ arcus *al* [3]), ut tota circumferentia circuli *algh* est 360.

Habet autem se quadratum semidiametri circuli ad aream circuli, sicut sector circuli ad semicircumferentiam eius.

$$497 \cdot 1554 \qquad \begin{array}{r} 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array} \text{ quadratum semidiametri } za.$$

$$1156 /$$

$$\begin{array}{r} 1554 \\ 1156 \\ \hline 9324 \\ 7770 \\ 1554 \\ 1554 \\ \hline 1796424 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 22 & \\ 1766 & \\ 36129 & 3 \\ 525256 & 6 \\ 1796424 & 1 \\ 497777 & 4 \\ 4999 & \\ 44 & \end{array}$$

1) Muss hier und im Folgenden $\frac{283}{350}$ heissen.

2) Hier hat Regiomontan statt mit 34, mit 37 multipliciert.

3) Nach der Tafel ist $\sin 53^0 58' = 48520$.

| $3614\frac{38}{71}$ area circuli *algh*. col. 2.

$180 \cdot \overline{53} \cdot 58'$

$3614\frac{38}{71}$

$$\begin{array}{r} 3614 \\ 71 \\ \hline 3614 \\ 25298 \\ 38 \\ \hline \frac{256632}{71} \end{array}$$

tertius.

10800′ primus,
3238 secundus,

$$\begin{array}{r} 256632 \\ 3238 \\ \hline 2053056 \\ 769896 \\ 513264 \\ 769896 \\ \hline \frac{830974416}{71} \end{array}$$

hic dividendus est per 10800

$$\begin{array}{r} 10800 \\ 71 \\ \hline 10800 \\ 756 \\ \hline 766800 \end{array}$$

denominator

5	
273	
385	
64192	1
830974416	0
766800000	8 pedes.
7668000	3
76688	
766	

$1083\frac{11042}{15975}$ area sectoris *algz*.

$$\begin{array}{r} 14 \\ 2\frac{1}{7} \\ \hline 16\frac{1}{7} \end{array} \cdot \frac{113}{7}$$ linea *zk*,

| $\frac{209464}{7000}$ linea *ak*. col. 3.

$$\begin{array}{r} 209464 \\ 113 \\ \hline 628392 \\ 209464 \\ 209464 \\ \hline 23669432 \end{array}$$ numerator; 49000 denominator.

$$\begin{array}{r|l} 412 & \\ 7842 & \\ 23669432 & 4 \\ 4900000 & 8 \text{ pedes} \\ 49000 & 3 \\ 490 & \end{array} \qquad 483\frac{2432}{49000} \text{ area trianguli } zag$$

$$\begin{array}{r} 1083\frac{11042}{15975} \\ 483 \\ \hline 599\frac{46568}{49000} \end{array} \text{ et } \frac{11042}{15975} \text{ area portionis } alg$$

1805 pedes integri superficiales cum $\frac{21}{57}$ et $\frac{283}{350}$ [1]) et $\frac{1169}{1710}$ et $\frac{46568}{49000}$ et $\frac{11042}{15975}$ unius pedis, tanta igitur est area superficiei, quam occupat secundus circulus de primo. Et hoc de sexto interrogato sufficiat, nam fractiones ad unum denominatorem convertere magis laboriosum est quam subtile.

col. 4. | Redeo ad sextum. Quia rusticum videtur, pronuntiare tot et tam varias fractiones cum pedibus integris, reducam eas ad minutias phisicas, constituendo pedem unum 60 minuta etc.

$$\frac{21}{57} \cdot \begin{array}{r|l} 126 & \\ 1260 & 22', \\ 577 & \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & \\ 360 & 6''; \\ 57 & \end{array} \quad 22'\ 6'' \text{ prima fractio,}$$

28(20)[b], col. 1. | $$\frac{283}{350} \cdot \begin{array}{r|l} 21 & \\ 45 & \\ 10980 & 48', \\ 3500 & \\ 35 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & \\ 10800 & 31''; \\ 3500 & \\ 35 & \end{array} \quad 48'\,31'' \text{ secunda fractio,}$$

$$\frac{1169}{1710} \cdot \begin{array}{r|l} 1 & \\ 3273 & \\ 70140 & 41', \\ 17100 & \\ 171 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & \\ 1800 & 1''; \\ 1710 & \end{array} \quad 41'\ 1'' \text{ tertia fractio,}$$

1) Hier ist der obige Schreibfehler wieder berichtigt.

$\frac{46568}{49000}$ ·	6 341 279408|0 49000 490	57′,	158 6480 4900	1″;	57′ 1″ quarta fractio,
$\frac{11042}{15975}$ ·	75 35 226745 662520 159755 1597	41′,	5 164 1532 23434 452700 159755 1597	28″;	41′28″ quinta fractio col. 2.

3 pedes 30′ 7″

$$\frac{1805}{1808} \cdot 30 \cdot 7$$

Igitur area superficiei occupata ex primo circulo est pedes 1808 minuta 30 secunda 7 fere.

28(20)[a], col. 4.

| Septimum.

Querit angulum datum dividi in tres equales.

Hec in quantitatibus continuis efficietur, in numeris autem quo pacto absolvatur, non est inventum.

Octavum.

Tres socii sunt, et quilibet per se habet denarios in marsupio. Duo primi absque tertio habent ducatos 30; duo etiam secundi absque primo habent ducatos 42; sed duo alii absque secundo habent 54: queritur, quot quilibet per se habeat.[1])

$$1\ \text{ꝛ},\quad 39\ \overline{\text{ꝯ}}\ 1\ \text{ꝛ},\quad 54\ \overline{\text{ꝯ}}\ 1\ \text{ꝛ}$$
$$84\ \overline{\text{ꝯ}}\ 2\ \text{ꝛ} - 42$$
$$42 - 2\ \text{ꝛ}$$
$$21 - 1\ \text{ꝛ}$$

Primus 21, secundus 9, tertius 33.

---

1) In modernen Zeichen:

Hat der Erste x, so hat der Zweite $30 - x$, und wegen der dritten Bedingung der Dritte $54 - x$. Also der Zweite und Dritte zusammen

$$84 - 2x = 42$$
$$42 = 2x$$
$$21 = x.$$

Also hat der Erste 21, der Zweite 9, der Dritte 33.

Wie schon gesagt, ist damit der Briefwechsel mit Giovanni Bianchini, soweit er uns erhalten ist, zu Ende, und ebenfalls die auf ihn bezüglichen Rechnungen des Regiomontan-Manuskriptes. Dasselbe enthält jedoch noch zwei weitere Briefe Regiomontan's an Jacob von Speier und die Antwort des letztern auf das erste dieser Schreiben. Endlich findet sich aus späterer Zeit noch ein längerer Brief Regiomontan's an Christian Roder, Prof. der Mathematik zu Erfurt, angeheftet. Eine Antwort auf denselben ist nicht erhalten. Ich lasse jetzt wieder die drei Briefe der Correspondenz mit Jacobus Spirensis und die darauf bezüglichen Rechnungen der Nürnberger Handschrift folgen. Endlich wird der Brief an Roder den Schluss bilden.

VI.

Regiomontan an Jacob von Speier.

Ioannes Germanus ad Iacobum de Spira, astronomum d̃ni Federici Comitis Urbinatum.

Multa me hortantur, doctissime Vir, ac vehementer instigant ad familiaritatem inter nos conflandam et amicitie perennis felicia constituere primordia. Patriam enim in primis habemus communem, Alamanniam: lares paternos haud nimium distantes, que res unica, presertim peregrinis nobis, animos colligare sufficiet. Servimus demum principibus sibi amicissimis, inter quos quanta et quam vera alternaque exstat observantia, minime te latere arbitror. Cui quero plus favet divus ille Bessarion, dominus meus Reverendissimus, quam Umbrorum principibus Federico et Octaviano? Quos inter mortales maiora quispiam benivolentie reperiet indicia? Dominis igitur tantopere sese colentibus equum videtur, ut et servitores in unum nos consentiamus. Accedit preterea, quod potissimi facio momenti, studiorum similitudo, radix videlicet omnis amicitie. Mihi equidem doctrinas
59(51)b quadruviales | mediocriter forsitan advenisse putabit quispiam, tibi autem egregie perspectas esse facile persuadetur. Non enim satis dici potest, quanta et quam digna testimonia in tuam prestantiam confluant, presertim in astronomicis et arithmeticis, quibus adeo vigilanter incubuisti, ut dives stipendium a principe tuo suscipere merueris. Quod profecto haud mediocriter eruditionis tue habetur indicium, si quidem paucos hac nostra tempestate huiuscemodi studiis deditos veneratur vulgus: paucissimis autem ex hisce doctrinis questum fieri comperimus. Tuam denique excellentiam Babtista de Albertis[1]), vir optimus, sepenumero mihi predicavit, Petrus

1) Es ist das der berühmte Baumeister und Mathematiker Leone Battista

ANTONINI[1]) quoque, homo ille primanus domini mei R^mi, crebrum super ea re affert testimonium, cui quantum et credam et debeam, non facile dixerim, quod ad notitiam tuam capessendam me induxerit. PETRUS insuper DE CASTELLODURANTE[2]), ille tuus socius, qui non cessat, urbanitatem et virtutes tuas declamare, nuperrime miros quosdam effectus tuos commemorans in tuum amorem me prorsus coniecit. Sed quod alienis monitoribus tantopere credo? Vidi equidem hisce oculis quasdam nativitatum figuras tuo calculo erectas, in quibus ardorem tuum ac summam in nostris studiis vigilantiam aperte demonstrabas. Tanta enim libido certitudinis consequende te invasit, ut ad tertia usque numerationem tuam extenderis. Eas nativitatum figuras advexit mihi dominus IOANNES BABTISTA, nam antehac duas, non quidem meo calculo, sed CONRADINI mei erectas, priusquam percussione mea examinarentur, ipse acceperat. Placuere mihi supra modum tanta solertie tue vestigia et veritatis inquisitio. Nunc igitur, ne pluribus equo obtundaris, cedo queso votis meis; fac, littere mee efficaces apud te inveniantur; IOANNEM GERMANUM gregi amicorum tuorum adnumerare velis. Quod lingua non potest, intervallo corporum prohibente, calamus supplex impetret. Nolim expectes, | usque ad cenam voceris meam, quatenus de 60(52)a
amicitia in conviviis, ut assolet, ineunda tecum disseratur: frigescerent enim prius epule, quam Romam ex Urbino venires. Si muneribus forsitan primicias consuetudinis nostre firmandas arbitraberis, munera non deerunt, nisi maiorum exempla parvi facias. ARCHIMEDEM DOSITHEO problemata geometrica misisse liquet, ERATOSTHENEM PTOLEMEO regi duplationem cubi tamquam grande quoddam munus prestitisse, EUTOCIUS ASCALONITA commemorat. Talia erunt dona nostra philosophica, quidem non popularia. Ceterum si convivio gaudeas, fasianos, perdices calamo nostro non ex cella epularie depromemus. Vegetes demum vini haud longe aberunt. Ubi autem epularum sacietas nos reperit, cytharedum atque tibicinem, ut ad choros ducendos modulentur, extemplo accersemus. Quod si tandem deambulare (ut iubent medici) parumper libeat, sive Solis claritudinem contemplari, sive iacula emittere, facultas nobis dabitur. Hec est, IACOBE optime, cena nostra, in qua posthac crebrius letabimur. Ad huiuscemodi cenam vicissim me invites velim. Sed quousque in hoc convivio morabor? Dabis, spero, veniam nimium iocanti mihi, ad id enim dies presentes DIONISII te hortabuntur. Ceteri epularum luxurie hoc tempore carnisprivii corpus affligunt suum, nos vero philosophico certamine animos nostros exercebimus. Sat

ALBERTI. Von ihm ist bei seinen Lebzeiten nichts veröffentlicht. Erst 1843—1849 ist aus den Manuskripten manches der Vergessenheit entrissen worden.

1) Völlig unbekannt.

2) *Castellodurante* im Kirchenstaat gelegen.

iocorum iniecisse videor, ad serium deinceps hora iubet descendere. Vide igitur hec problemata varia, et quidnam circa ea sentias, quatenus tuis me litteris reddito certiorem.

1. Reperi in libro quodam vetusto interrogationem cuiusdam factam de filio suo, cuius figura habebat gradus 16 minuta 37 Tauri in ascendente, cuspis autem quinte domus, scilicet filiorum, erat in 7 g̃ et 18mi^{tis} Vir-
60(52)^{b} ginis. Relique | autem domus non erat notate. Volendo autem figuram talem complere, oportuit habere latitudinem regionis, ubi facta est interrogatio. Quero igitur, quanta fuerit latitudo eius regionis, deinde que fuerint initia reliquorum domorum.

2. Roma habet longitudinem ab occidente habitato g̃ 35 m̃ 25, et latitudinem ab equatore g̃ 42, Erfordia vero longitudinem habet g̃ 27 et latitudinem g̃ 51. Quero, possitne his duabus civitatibus idem esse ascendens pro eodem instanti, et si videbitur possibile, quid sit illud ascendens. Atsi plura esse possint, que sint illa. Cum autem dixeram, possitne esse idem ascendens pro eodem instanti etc., ne contradictione implicite videar incidisse (nihil enim in instanti ascendere perhibetur), aliter et brevius quero, possitne idem punctus ecliptice pro eodem instanti esse in orizonte Romanorum et simul in orizonte Erfordensium? Et si possibile visum fuerit, quis sit ille. Quod si duo talia fuerint puncta, que sint illa.

3. Stella quedam fixa habens secundum longitudinem g̃ 13 m̃ 25 Geminorum, latitudinem autem septemtrionalem g̃ 8, in quedam regione occidit cum gradibus 23 minutis 14 Geminorum: quero latitudinem huius regionis.

(3^{a}.) In regione habente latitudinem 45 graduum et 24 mi^{torum} natus quidam habuit in medio celi supra terram 14^{m} gradum Aquarii completum, Solem autem in principio Arietis, et Martem in fine quinti decimi gradus Tauri absque latitudine: quero, quanta sit directio Solis ad Martem. Voco autem directionem arcum equatoris, qui cum arcu ecliptice inter duos significatores comprehenso pertransit circulum magnum, in quo iacet significator dirigendus. Volo dicere circulum magnum per centrum Solis duoque puncta sectionum orizontis et meridiani incedentem. Non enim latet te, quod dirigere quempiam significatorem directione saltem directa non est aliud, nisi movere spheram donec ad situm similem ei, in quo significator ipse dirigendus, constituebatar, quemadmodum trahitur ex verbis Ptolemei in tertio quadripartiti capitulo undecimo, ubi dixit: „Nec contingit etiam, ut respectu horum duorum (scilicet orizontis et meridiani) sit una eius positio, nisi cum fuerit prope loca, que sunt supra semicirculum ex circulis per locum communem circuli medii celi et circuli orizontis transeuntibus“ etc^{a}. Super quibus verbis Hali com-

mentator: „Oportet", inquit, „nos petere | in toto hileg medietatem 61 (53)[a]
circuli in quo moratur supra terram, et quod accipiamus atazir secundum ascensiones medietatis huius circuli" etc[a]. Unde Archidiaconus in tractatu directionem docens officio sphere solide directiones significatorum numerare, semicirculum ipsi instrumento adaptare iubet in duabus intersectionibus meridiani et orizontis. Sive igitur feceris directionem per utrumlibet modorum Ptolemei, sive per modum Alchabicii, qui a secundo modo Ptolemei non est alienus, sive per tabulas directionum (omnes enim ex eodem ferme manant fonte), non habebis directiones rationi philosophice respondentes, que secundum semicirculos predictos eliciuntur. Item in eadem nativitate quesituri particulares conditiones patris iubemur, constituere locum Solis pro ascendente, si nativitas diurna fuerit, et insuper totam patris figuram elicere, quod haudquaquam absolvemus, nisi circulum, in quo iacet Sol ipse, tanquam orizontem obliquum constituerimus, circulum, inquam, per duas intersectiones meridiani et orizontis incedentem. Ita enim Hali super capitulo quinto tertii quadripartiti monet. Quero itaque ex prescripta nativitate diurna filii primogeniti initium octave domus in figura patris, cui ascendentem tribuimus locum Solis. Sed de his latius disserendum, ubi litteris meis responderis.

4. In anno currente, quando Sol in principio Arietis secundum calculum usitatum constituetur, quero, quantus sit arcus ecliptice inter locum eius verum et circulum equatoris comprehensus, quantaque sit ipsius Solis ab equinoctiali declinatio.

Quid rides, Iacobe humanissime? An mirum tibi videtur subiectum huius interrogationis? Tranquille, velim, legas scripta Ioannis tui, qui, nisi fundamenta tabularum Alfonsi fluctuent, demonstrabit, posthac Solem distare ab ipso equatore gradibus sex fere in revolutione anni mundi hoc nostro tempore.

5. Pono Saturnum in gradibus 10 minutis 15 Arietis, Iovem in gradibus 23 minutis 38 Leonis, Martem vero in g̃ 17 m̃ 25 Virginis secundum cursus videlicet medios. Quero, an unquam coniungentur, et si ita, post quantum tempus ab instanti situum predictorum precise conveniunt, aut quando proximo fuerint coniuncti. Motum autem Saturni medium in die suppono minutorum duorum, | et secundi unius, Iovis minutorum 4 61 (53)[b]
secundorum 59, Martis vero minutorum 31 secundorum 27.

6. Divisi numerum quendam per 23, et facta divisione relinquebantur 12; item divisi eundem per 17, manseruntque in residuo 7; deinde iterum eundem divisi per 10, et relictae fuerunt 3: quero, quis fuerit numerus ille divisus.[1])

1) Das ist das Restproblem oder die Regula *Ta ien* der Chinesen. Eine ähnliche Aufgabe hat Bianchini gelöst, vergl. S. 237.

7. Invenias quatuor numeros quadratos, qui simul iuncti, quadratum conficiant numerum. Quatuor autem cubicos invenire, qui congregati cubicum numerum efficiant, non postulo; id enim difficilius multo existit.

Hec fuerunt tanquam colloquia, ut moris est, ante cenam; iam autem fasiani et perdices offerentur, sed famem fortasse tuam non explebunt.

8. Emi 240 aves denariis 16047. Erant autem aves ipse trium specierum, fasiani videlicet, perdices et columbe. Fasianus quilibet emebatur 97 denariis, perdix queque 56 denariis et columba tribus denariis: quero, quot de unoquoque genere aves fuerint.[1])

9. Quidam emit 15 ducatis aliquot brachia panni; deinde proportionaliter aliquot ducatis emit 27 brachia panni. Numerus autem ducatorum, quos exposuit, cum numero brachiorum emptorum simul efficiebant 100: quero, quot ducatos exposuerit, quotque brachia panni emerit.

Nunc ad musicam.

10. Invenias tres numeros quadratos in medietate armonica colligatos, ita videlicet, ut maximus ad minimum eam habeat proportionem, quam habet differentia maximi et medii ad differentiam medii et minimi.

11. Cordam quandam longitudinis quinque pedum divisi in tres partes, quarum prima ad secundam sonuit semitonium minus, tertia autem ad ipsam secundam sonuit duos tonos cum semitonio maiore: quero, quanta fuerit unaqueque trium cordarum partialium.

(**11**[a].) Est canna quedam sive fistula columnalis, cuius longitudo 12 pedum, latitudo autem, scilicet diameter orificii, habet unum palmum. Facturus sum aliam fistulam, que ad predictam sonabit consonantiam diapente vocatam, cuius fistule longitudo vigecupla sit latitudine sue: quero, quanta erit longitudo illius secunde fistule, et quanta latitudo. Pedem autem ex quatuor palmis geometricis constare supponatur.

62(54)[a] **12.** Trianguli cuiusdam area 70 pedes superficiales complectitur, | cuius tria latera sunt in proportionibus horum numerorum $5 \cdot 8 \cdot 12$: quero quantitatem diametri circuli sibi inscriptibilis.

(**12**[a].) In principio eclipsis lunaris future hoc anno quero, quantum distabit punctus contactus Lune et umbre secundum visum a supremo puncto limbi lunaris. Supremum autem punctum limbi lunaris accipe eum punctum in limbo ipso, qui polo orizontis est vicinissimus.

(**12**[b].) Item Luna conum umbrosum ingressa dum ex diametro eius visuali quinque digiti lineales eclipsabuntur, quero, quanta erit portio

---

1) In Gleichungsform umgesetzt:

$$x + y + z = 240$$
$$97x + 56y + 3z = 16047.$$

lunaris corporis umbre immersa respectu totius corporis Lune, atque, ut expeditius id fiat, umbram in loco transitus Lune, tanquam sphericam subicio. Semidiametrum tamen eius eam, que ex tabulis colligitur, admittam.

13. Sole habente altitudinem 35 graduum vertex iridis supra orizontem elevabatur gradibus 7. Pes autem eius iridis a loco aspicientis distabat passibus ducentis: quero, quanta fuerit portio iridis respectu totius circonferentie.

(**13ª.**) Lumen Solis altitudinem habentis ♅ 37 incidit per quandam fenestram circularem ad pavimentum quoddam equedistans orizonti; erat autem fenestra in superficie ad orizontem erecta. Diameter fenestre 5 pedes complectebatur, centrum autem eius a pavimento distabat 28 pedibus: quero, quanta fuerit superficies pavimenti illuminata.

14. Divisi lineam *ab* quinque pedum (Fig. 39) in *c* puncto secundum proportionem habentem medium et duo extrema, maiori parte existente *ac*, fecique lineam ipsam carastonem[1]) (dico libram inequalium brachiorum), cuius suspensorium ex *c* puncto divisionis, ex punctis autem *a* et *b* suspendi duo corpora regularia, icocedron videlicet ex puncto *b*, duodecedron autem ex puncto *a*, ita ut eque ponderarent, volo dicere, ut linea *ab* equedistaret orizonti: quero proportionem duarum spherarum ipsis corporibus dictis circumscriptibilium.

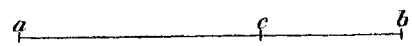


Fig. 39.

15. Est vas quoddam habens formam coni truncati, cuius fundum habet diametrum sex pedum, orificium autem habet diametrum 10 pedum, latus vero 9 pedes complectitur. Huic vasi inmitto vinum aliquantum hoc pacto, ut inclinato vase superficies vini ex una quidem parte occurrat circumferentie fundi non secando eam, ex alia autem parte, scilicet propinquissima orificio vasis, distet ab ipso orificio duobus pedibus: quero, que sit proportio huius vini respectu totius corpulentie, quam vas ipsum comprehendere solet | (Fig. 40). 62(54)ᵇ

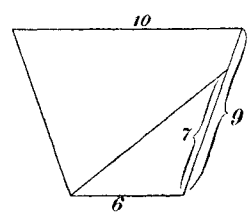


Fig. 40.

(**15ª.**) Resumpto hoc vase commodavi cuidam 20 talia vasa vini. Tempore autem fluente vas illud sive igne sive quapiam negligentia perditur. Ille alius volens mihi restituere mutuatum non habet simile vas, sed alium quoddam concavum concavitate spherica, equales sunt parapsides,

1) Regiomontan dürfte also den *liber carastonis* des Thabit ben Corrah gekannt haben.

cuius margo quidem habet diametrum 5 pedum, profunditas autem duos pedes complectitur: quero, quot vasa talia mihi reddenda sint. Profunditatem autem huius secundi vasis voco lineam a centro marginis perpendiculariter erectam et ad superficiem concavam vasis terminatam.

(15[b].) Vas quoddam columnale plenum vini habet longitudinem 26 palmorum, latitudinem autem 8 palmorum. Emittitur vinum aliquantum ita, ut residuum habeat profunditatem 3 palmorum et 4 quintarum unius palmi: quero, quot urne restant in vase. Urnam autem suppono vasculum quoddam columnale, cuius longitudo habeat 3 palmos et $\frac{2}{3}$ unius palmi, latitudo vero 1 palmum et $\frac{5}{6}$ unius palmi. Qui autem virgam visoriam ad portiones vasorum inveniendas effecerit, haud mediocre commodum modernis afferet mensoribus.

(15[c].) Sunt tres bombarde, quarum prima habet diametrum orificii sui 3 palmorum, secunda vero et tertia habent diametros orificiorum suorum coniunctim sumptas 8 palmorum. Tres autem lapides spherici, quos iaciunt bombarde ipse, sunt continue proportionabiles habentes simul 200 libras in pondere. Quero, quot libras unaqueque bombardarum proiiciat.

16. Proiecturus lapidem ex bombarda ad certum locum ascendi arcem, et cum quadrante magno per fenestram quandam perspexi terminum ad quem, abscinditque filum quadrantis 25 gradus de limbo quadrantis. Deinde aliquantum descendi in arce et ex alia fenestra perspexi terminum eundem filo perpendiculi 18 gradus absumente. Distantia autem duarum fenestrarum, unde perspexi terminum predictum, 7 passus complectebatur. Quero, quot passibus distiterat locus perspectus ab altera duarum fenestrarum arcis memorate.

Sed quo ruit calamus? Nimium forsitan fatigaberis, vir optime, legendo tantas litteras. Finem igitur statuendo epistole hoc unum obsecro,
63(55)[a] ut quamprimum apud me sint littere tue docture, quid | de rebus illis sentias. Hac enim lege mutua inter nos fiduciam et conflabimus et in dies augebimus, neque absque multo fructu, nisi me fallit opinio, id futurum esse arbitror. Nam, si quid digni apud me fuerit, tibi commune fiat, si vero nihil appareat, quod tibi adiicere possim, id lucro tibi erit, excellere videlicet hominem studiis mathematicis omnibus apprime affectum. Postremo oratum te velim, ut magnifico et generoso Domino Octaviano servitorem suum Ioannem commendes quam devotissime, qui profecto litteras nunc accepisset meas, nisi indignum me putassem, cuius ineptiis tantus princeps obtunderetur. Magnificientie igitur sue obsequentissimum me offerat oratio tua. Vale. Ex Roma, die 15 februarii anno 1465°.

VII.

| Jacob von Speier an Regiomontan. 64(56)[a]

Epistolam tuam accepi, vir doctissime, que ad me iocos, grata munera et tuam erga me singularem benevolentiam attulit. Laudo et doctrinam et tuam dicendi elegantiam, quam nuper mihi manifestasti. Quod autem me cupias et diligas, recte quidem facis, cum a me summopere ameris, quod ita nos facere plurime cause persuadent. Nam, ut ipse scribis, principibus, patria, studio atque moribus convenimus. Et si antea humanitate et doctrina tua amori in te meo addi non potuisset, tamen hiis tuis litteris cumulus accessit non parvus. Itaque tibi gratias ago, meque totum tibi trado. Vocasti preterea me ad cenam phasianis, avibus et vinis mirifice ornatam. Pro tanto beneficio quid tibi retribuam, nescio, qui montium cacumina et aridas arenas incolem. Careo enim istis delicatis cibis, quibus tu vesceris. Hic celum et astra non in se tantum perspecta, sed eorum effectus considero. Huc, si licuerit, ad convivium aliquando accedes, nam per te fructus boni aderunt. Hiis enim doctrinis, quas petis, hic prorsus caremus, ex quo scito, nec mea problemata proponi posse, nec tua dissolvi. Sed ut amicitie causa aliquid scribam, reliquiis quibusdam tecum agam. Sed prius, velim, scias, me illud unum admirare solere, quod me post cenam animi gratia ad Solis splendorem ducturum aiebas, ut phisici dicunt. Ipsi enim post medicinas confortantia adducunt, tu vero, pace tua dixerim, ordine perverso post maximam cenam bellum indicis, deinde infers. Nobis ergo amicissimis certare | non licet, sed tamen inter nos ante cenam, amice, 60(56)[b]
colloquemur.

Dedisti figuram interrogationis tue, que 16 graduum et 17 minutum in ascendente habebat, et in cuspide filiorum 18 minutum septimi gradus Virginis, et cuspides ceteras cum latitudine regionis petisti.

Accipe ergo pro singulis cuspidibus: In ascendente gradum 16 minutum 37 Thauri; in loco substantie g̃ 12 m̃ 32 2̃ 31 Geminorum; in loco fratrum g̃ 7 m̃ 18 2̃ 20 Cancri; in angulo terre gradum 2 m̃ 51 2̃ 49 Leonis; in cuspide filiorum gradum 6 minutum 18 Virginis, in cuspide infirmitatum gradum 12 m̃ 7 Libre. Et hec in regione, in qua polus supra circulum emisperii flectitur gradibus 30 m̃ 14 2̃ 45 fere.

Preterea eundem punctum ecliptice duobus orizontibus pro eodem instanti inesse nego. Punctum vero ecliptice motum ab orizonte Romanorum ad orizontem Erfordie in spatio 33 minutorum et 40 secundorum hore quendam arcum describere affirmo, duobus dico punctis orizontibus infixis terminatum, que puncta ad idem instans semper diversa intelligo.

Stellam fixam, quam in 24 gradu Geminorum occidere ymaginatus es,

post principium sexti climatis fieri existimo. Hoc autem a me diligentius
65(57)[a] non exponitur propter librorum penuriam, ut dixi superius. |

Solem vero, quemadmodum contra communem observationem equinoctii ab equatore 6 gradibus distantem te demonstraturum dicis. Quando in me risum vaticinatus es, non adhuc intelligo, et ne diebus abstinentie in risum te adducam.

Solem et ipsius umbram cum puncto contactus circumferentie Lune, distantiam quoque puncti limbi Lune cenith propinquissimo nunc non determino, unum efficaces rationes tuas magnopere desidero, presertim cum fuerint experientia confirmate, quam pro iudice habebimus.

Honus de trium superiorum coniunctione, quod dedisti, accepi. Erunt itaque hec tres linee a sitibus per te ordinati propius coadunande post annos 1709 menses 2 dies 24 horas 15 m̃ 54 2̃ 36 3̃ 24 4̃ 14 et 5̃ 6 in 26 gradu signi Geminorum, et hec colligenda ea minima, que ex casu tuo crescere valebunt. Annum tamen Persicum habeas, et mensem pro diebus 30 nota.

Quatuor etiam numeros quadratos a me queris constituentes unum quadratum. Ubi $1 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 100$ coniunctim capias, et 121 ex 11 quadratum habebis. Vel melius $4 \cdot 16 \cdot 49 \cdot 100$ aggrega et 169 reperies.

Pannum, quo cenam nostram ornari voluisti, mensuravi, et proportione bona 64 brachia cum $\frac{2}{7}$ reperi, cuius pretium 35 ducatorum et $\frac{5}{7}$ unius recte duxi.

Velatas aviculas, quas pro cena mihi obtulisti, 114 fasiani valde
65(57)[b] pingues inveni, perdices 87, columbas 39. |

Preterea vas vini nimis effusum, quod mittis, placere non potuit, maxime nobis sepe conviventibus, et vasa adeo vacua non bene vina conservant. Extraxi autem ex vase columpnali tua urnas $19\frac{53713}{73205}$ unius.

Habes a me satis, vir optime, et dabis veniam, si post cenam paulisper acquiescam. Interim Lucianum tibi adducam, quem hinc abesse scito. Ille enim superficierum ac distantiarum mensurationibus, conicorumque corporum ponderabilium variis proportionibus caput suum tota die obtundit. Ego autem, ut tibi auscultem et morem geram, refectionem, quam voluisti, ad te mitto, non Dionysii, sed tamquam quadragesime fercula existimanda. Hanc ne despicias, rogo, sed, quid de ea senseas, me certiorem faciendum curabis.

Katholica fides nostra Iesum Christum dominum nostrum non solum deum, sed et verum hominem universis credendum instituit, qui quidem, ut verus propheta sub humanitatis habitu, per coniunctionem superiorum astrorum lege a remotis gentibus cognitus est, per coniunctionem dico magnam ipsius nativitatem proxime precedentem, ut docet Albumasar et

pericia omnium sapientum. Quero demonstrationem anni, quo nasci debebat virtute coniunctionis predicte, annum quoque, quo mundo sua doctrina primum apparere naturaliter potuit, et lex, quam dedit, quomodo causis astronomicis ipsis gentibus suasibilis sit et aliorum legibus preferenda.

Dominum Iehsum Christum natum dominica decembris 24 hora 11 | 66(58)[v]
minuto 20 post meridiem astronomice et katholice sane tenemus: quero constellationem specificam influentem Domino Iehsu tam acerbam mortem, nec non speciem ipsius mortis, cum et ipse elementis ceterumque causis corpore subici voluerit tamquam alter homo possibilis.

Scribitur a divo Dyonisio, qui Areopagita dictus est, in epistola, quam ad Pollicarpum, discipulum beati Pauli dederat, tempore cuiusdam eclipsis Solis miraculose facto in passione domini Iehsu Christi ipsum tunc equasse Lunam, quam per calculum suum eodem tempore in signo sibi opposito reperit; ipsam quoque Lunam hora passionis et eclipsis ab angulo plenitudinis cecidisse dicit gradibus 4 ♏ 26 ♈ 28. Quamvis Lunam Solem eclipsare vere viderint, tamen ipsam nocte sequanti loco debito restitutam recitat. Ecclesia etiam Christum passum circa oppositionem luminarium singulis annis commemorat et in anno etatis sue 34° mortuum fuisse describit. Quero, quotta dies erat mensis sacre passionis sue, et que dies septimane esse potuit, Iovisne an Veneris vel sabbati, salvo loco Lune a beato Dyonisio invento et salvis nominibus dierum quibus quottidie utimur.

Anno currente 1425 facta est superiorum coniunctio mutate triplicitatis. Quero tempus precisum coniunctionis vere atque ipsius significatum. Si hiis, quia stellis promissus est, sit natus, an si ipsum adhuc expectamus. Dic tempus, sub qua lege apparebit, et si miraculorum patratione extolletur, locum insuper nativitatis sue. Hec omnia demonstrative indicabis.

Quoniam subtilis et excellens arithmetica es, tibi aliquid amplius laboris imponere non verebor. Quero tempus vere coniunctionis trium superiorum per consuetudinem tabularum ad meridianum urbis. Volo dicere, quando proxime coniungentur.

Hec sunt, que ad te scribere volui. Que si maxima aut parva, nec te digna videbuntur, michi ignoscas rogo, et amor, quo maxime coniuncti sumus, abs te veniam postulabit. Quod me scripturum persuades, quodque idem te facturum dicas, mirum in modum placet. Ex tuis autem scriptis scio, me non parvum fructum capturum. Ex meis vero quid hauseris? Benivolentia certe undique scaturiet, alium fructum, quem pollicear, nescio. Te magnifico domino Octaviano diligentissime commendavi, nec illum a tuis litteris alienum facies. Amat enim doctos et tui consimiles. Ꝑmo

domino tuo tamquam devotissimum servulum me humilime comendabis.
66(58)b leer. Vale, meque, ut facis, ame. Ex Urbino 6a Aprilis 1465.

Tibi deditissimus

67(59)a leer. IACOBUS SPIRENSIS. |

67(59)b | Spectato ac doctissimo viro
Dño IOANNI GERMANO Astronomo
peritissimo amico precipuo.

Rome [1])

VIII.

Regiomontan an Jacob von Speier.

68(60)a | 1465: Respondisti nuper, vir optime, litteris meis non minus docte quam eleganter, votique mei me compotem reddidisti. Quamquam enim multitudine nimia problematum te aggressus sum, perinde ac si eruditionem meam ostentare voluerim, non tamen alio ferebar nisi ad benivolentiam tuam capessendam, quatenus amicitia inita alter alteri volupe esset assiduis conversationibus intercedentibus. Hec erat meta, cuius attingende gratia cursum institui meum, quam pro sententia nactus sum. Quod autem tot generibus problematum te incitaverim, inde evenit, ut certior fierem, quibusnam studiis potissimum exercearis. Igitur ex litteris tuis astrorum studio te oblectari perdidici, non tamen motus eorum, figuras, magnitudines, distantias et cetera huiusmodi, verum etiam, et id quidem ardentissime, influxus eorum ac effectus in elementis et elementatis contemplando, quo rectius mihi videtur, non tanta posthac rerum varietate ludere, sed protinus ad hoc unum divinum studium duntaxat animos nostros apellere. Nemo
68(60)b enim nisi doctissimus atque libris multivariis stipatissimus tantis | et tam diversis rebus abunde respondebit. Iam, ne prolixo defatigeris apparatu, ad exercitia nostra veniendum censeo, neque egre laturum te arbitror, si prius problemata, quibus respondisti, parumper retractavero: ita tua mihi persuadet facilitas.

Primum problema habebat gradus 16 minuta 37 in ascendente, cuspis autem quinte domus erat in 7 gradibus et 18 minutis Virginis, id est, quemadmodum tu accepisti, in cuspide quinte domus erant gradus 6 et minuta 18 completi Virginis. Dedisti loco substantie gradus 12 minuta 32 ♃ 31 Geminorum, Loco fratrum ☿ 7 ☽ 18 ♃ 50 Cancri. Altitudinem autem poli septemtrionalis ☿ 30 ☽ 14 ♃ 45 fere. Ego autem per figuram

1) Das giebt DE MURR als Überschrift des Briefes.

sectoris officio tabularum sinuum ac ascensionum rectarum, ut assolet, in loco substantie reperio g̃ 12 m̃ 35 Geminorum, in loco fratrum g̃ 7 m̃ 26 Cancri, in quarta domo g̃ 2 m̃ 48 Leonis, in sexta g̃ 12 m̃ 5 Libre. Altitudinem autem poli g̃ 27 m̃ 26. In minutis itaque, ne dixerim secundis, dissonamus. Si dicas, satis esse gradus veros attigisse, cui ergo ad secunda etiam numeranda processisti? Sed de hac re non est tutum disserere, nisi una essemus, ut alter alterius modum notare posset, quare missa istec faciamus.

Duobus demum orizontibus Rome et Erfordie eundem punctum inesse negas ecliptice pro eodem instanti propter diversas longitudines earum urbium gradibus 8 minutis 25 scilicet differentis. Si rationem secteris, nisi me fallit animus, confiteberis, non modo in memoratis duobus orizontibus pro eodem instanti idem punctum ecliptice repertum iri, verum etiam in omnibus aliis duobus aut quotlibet inter duos tropicos se secantibus, aut quorum poli sunt in eodem circulo magno circulum ecliptice ad rectos angulos secante, quemadmodum in secundo libro problematum Almaiesti aperte demonstravi. Verumtamen si dicte urbes sola differrent longitudine, procederet sententia tua. Ut autem definitius me intelligas, nuncio duas urbes predictas in omni revolutione primi mobilis bis communicare in ascendente et descendente. Nam punctus terminans g̃ 7 et mi[ta] 49 fere Geminorum | pro eodem instanti in eodem orizonte existit, similiter finis 22 gra- 69 (61)[a]
duum et 11 minutorum Tauri. Si habes tabulas ascensionum obliquarum ad has duas latitudines factas, id experieris. Accipe enim ascensionem obliquam a puncto visuali numeratam ad g̃ 7 et m̃ 49 Geminorum, hoc quidem ad Romam. Hec ascensio obliqua erit equalis ascensioni recte medii celi ad Romam inchoando ascensiones rectas apud principium Capricorni. Cum autem meridiani dictarum urbium distent a se per g̃ 8 m̃ 25, et Roma ponatur orientalior Erfordia, subtrahe ab ascensione recta prefata g̃ 8 m̃ 25, et relinquetur ascensio recta medii celi ad Erfordiam, que quidem equalis est ascensione oblique ascendentis ibidem. Cetera patent.

Recte deinceps ad tertium respondisti interrogatum, id videlicet, fieri post principium sexti climatis, quamvis non diffinias precise librorum penuria id intercipiente. Latitudo quidem regionis quesita est g̃ 45 m̃ 35 fere, inventio autem admodum difficilis. In ea tamen re absolvenda sola sinuum tabula mihi sufficit. Verum meminisse oportuit figure sectoris, neque ipsa prorsus satisfecit, quinimo ad librum triangulorum spheralium nondum editum confugere cogebar.

Inauditum tibi videtur, Solem oportere distare ab ipso equatore sex fere gradibus, dum in principio Arietis secundum computationem Alfonsinam putatur. Non est illud vulgare negotium, neque facile demonstrabitur nisi

habenti perfectam speculationem motus octave sphere. Hanc rem et alias plurimas conscribere propediem accipiam, quibus fallacia iudiciorum nostrorum plerumque imputari potest. Videmur profecto longe a maioribus nostris degenerare, qui, ubi priscorum scripta philosophorum perdidicere, suas quoque sententias ac observationes adiicere studuerunt, et quidem, vigilantissime, quatenus ars ipsa continuis augeretur additamentis. Nos autem contra neque libros in hac arte precipuos legimus, neque si celum numerationi respondeat, aliquando exploramus, verum instar mulierum cre-
69(61)[b] dularium tabulis illis Alfonsinis et earum filiabus adheremus | tanquam divinis et numquam passuris detrimentum aliquid. Sed de his posterius.

Videbaris mihi movere risum, Iacobe optime, si circa problemata Solis ac umbre cum puncto contactus in eclipsi lunari aliquid anutiares, quasi ridicule fuerint res ille, quibus nimirum haudquaquam satisfacies, nisi prius Apollonium divinum de elementis conicis, Ptolemeum in sexto magne compositionis sue perspexeris. Neque id satis erit; primum enim Gebri Hispalensis vidisse oportebit aut tertium Menelai de sphericis, sive librum triangulorum spheralium nove traditionis.[1])

Dicis insuper, tres superiores coniunctum iri secundum medios cursus post annos Persicos 1709 menses 2 dies 24 horas 15 m̆ 54 ♀̆ 36 3ª 24 ♃̆ 14 ♄̆ 6 in 26. gradu Geminorum etc., computando tempus illud ab instanti posito. Tempus tuum valet annos ecclesie sive Romanorum 1708 dies 22 horas 15 minuta 54 cum ceteris fractionibus. Invenio igitur Saturnum in hoc tempore pervenisse ad gradus 27 mi^ta 50 ♀̆ 47 Arietis, Iovem vero ad ğ 14 m̆ 6 ♀̆ 17 Virginis, Martem quoque ad gradus 27 m̆ 28 2ª 28 Scorpionis. Quomodo itaque coniuncti sunt in 26 gradu Geminorum?

Reddidisti preterea quatuor numeros quadratos, quales petebam. Difficulter tamen quispiam decem huiusmodi societates numerorum quadratorum inveniet, videlicet quadraginta quadratos diversos, quorum quaterni collecti quadratum efficient numerum, nisi artem id parandi calleat, quam ego petivi. Quis enim tam iners, qui longa discussione tales quatuor quadratos numeros forte non offenderet.

Sed parcum me suspicares, amice, dum 35 ducatis et $\frac{5}{7}$ unius me expendisse commemoras. Cum enim in prima emptione expendantur 15 ducati, oportebit secundum te, in secunda emptione expositos esse residuos, scilicet $20\frac{2}{7}$, quibus empta sunt 27 brachia. Unde et secundum regulam quatuor quantitatum proportionalium pro 15 ducatis habebuntur brachia $19\frac{137}{142}$,

---

1) Auch hier scheint Regiomontan auf das Verhältnis seiner Trigonometrie zu Geber anzuspielen.

eritque numerus ducatorum et brachiorum omnium $82\frac{249}{994}$, minor scilicet quam 100. Per artem autem rei et census, quem vocant algebram, brachia empta 15 ducatis inveniuntur 29 dempta radice quadrata | de 436, ducati 70(62)[a]
autem, quibus emebantur 27 brachia fuerunt 29 et radix quadrata de 436, intelligendo radicem quadratam, ut moris est loqui in hac arte. Nam numerus ille 436 non est quadratus.

Numeros avium recte computasti. Vas autem conicum tantopere evacuatum tibi postea placebit, ubi vinum in eo contentum gustaberis. Non enim vulgare est, sed malvaticum. Laudandus demum esset pincerna, qui ex 17 urnis in veritate facere posset 19 et aliquid amplius. Equidem secundum rationem prismatum et portionum circuli non invenio nisi 17 urnas extractas et minutiam quandam exiguam.

Hec libuit circa prefatas interrogationes recensere, non, ita me deus amet, animo arrogandi, sed potius, ne more quorundam fecisse me putes, qui gravissima ceteris onera imponunt, ipsi autem neque ferre neque solvere possunt. Hinc etiam plane doceberis, quam libens in huiusmodi rebus exercear. Non possum autem Luciano tuo absenti non misereri, qui in superficierum ac distantiarum mensurationibus ceterisque rebus caput suum tota die obtundit. Dure videtur esse cervicis, cui tales res videntur difficiles, que potius anime consolationem afferunt et ad res secretissimas pandunt iter. Ubi ergo domum redierit, Ioannem Germanum cognoscat; spero enim, ne cerebrum deinde conterat suum, medelis salubribus obvenire.

Nunc tuis interrogatis, vir optime, respondere iubeor. Id autem satis docte fieri prohibet penuria librorum et ab urbe remotio. Amenitas etiam loci nunc me tenet incolam, quo segnius id fiat, occasio est, in balneis Viterbiensium, et si nunquam laver, segetes tamen virides et prata ceteraque periocunda spectacu la oculos plerumque aficiunt ac animum a speculationibus solitis dimovent.

Queris demonstrationem anni, quo nasci debuit salvator noster virtute coniunctionis magne adventum suum predicentis ac significantis, anni demum, quo doctrinam suam mundo primam apparere oportuit, et legis sue quo pacto causis astronomicis precognosci potuerit. Largius solito vocabulum demonstrationis | accipere videris, nam in arte iudiciorum nulle sunt 70(62)[b]
proprie demonstrationes. Demonstrationem fortasse vocas cognitionem per experientias aut testimonia virorum sapientum habitam. Igitur non tam difficile est quam dispendiosum, ad hoc interrogatum respondere. Tempus enim huiuscemodi coniunctionis novicii etiam tabularum tractatores invenire sciunt, iudicium autem abunde consumabit, qui Albumazarem de coniunctionibus magnis vidit tractatu primo differentia secunda aut tertia, si recte memini.

Cuius etiam summas cum aliis collegit Ioannes Eschuide[1]) in summa Anglicana. Item Messahalah in epistola sua de coniunctionibus magnis. Sed luculentior omnibus est Antonius de Monte Ulmi[2]), qui in particula secunda sententiam Albumazaris secutus rem hanc egregie prosequitur. Que videlicet coniunctio magna triplicitatem mutans adventum prophete significet; de natura eius; de operatione; de tempore adventus et effectus eius; de signis corporis; de loco, unde egredietur; de adversaturis doctrine sue et ceteris. Has demum res retractat in particula quarta. Id eo firmius memini, quod in eo loco, quotquot vidi exemplaria, deficiunt. Si tractatus ille revolutionum apud te integer est, velim mihi communis fiat. Petrus denique Cameracensis[3]) in de legibus et sectis huic interrogato tuo satisfaciet. His contentus sis, queso, ne rem iam dudum, quoad potuit, elaboratum totiens transcribere oporteat.

Queris insuper, que causa tam acerbam mortem salvatori nostro adtribuit, quamvis gentilis et a religione christiana alienus videatur sermo ille. Hec res ex duabus radicibus pendere dinoscitur: ex coniunctione videlicet magna tantum prophetam significante, et ex nativitate eiusdem. Quoad primam, videlicet generalem radicem, supra memorata resumenda erunt, ad secundam autem radicem firmandam, scilicet nativitatem eius calculandam, dico, tabulas modernas haudquaquam sufficere. Nam si per eas locum Lune quesiverimus ad tempus dicte nativitatis, reperiemus eum differentem a loco, quem reddunt tabule Ptolemei in tribus gradibus et amplius. In Sole etiam diversitas apparebit, tametsi minor quam in Luna. Preterea declinatio Solis maxima tempore Ptolemei, atque idcirco tempore nativitatis Christi a declinatione Solis maxima in tabulis modernorum
71(63)[a] scripta in 20 ferme minutis differt, que res, | in ascensionibus obliquis ac aliis huiusmodi diversitatem ingerere potest. Cur autem Ptolemei in hac re meminerim, hinc est, quod ipse post Christum 140 annis tabulas suas construxit, ut ex primo capitulo tertii Almagesti trahitur, neque alius propinquior nativitate Christi motus astrorum consideravit. Non tamen idcirco stupendus est, quo pacto id evenire possit, ut in motibus corporum celestium tanta varietas et incertitudo occurrat. Fragilitate enim hominis per instrumenta motus astrorum observantis, non ex rei ipsius considerate

1) Es ist das der oben erwähnte Johannes Ashenton oder Johannes Anglicanus.

2) Wenn Riccardi diesen Antonio da Monte Olmi in die erste Hälfte des XVI. Jahrhunderts setzt, nach Santini, *Picenorum mathem. elogia* p. 55, so müssen beide irren, denn es geht hieraus unzweifelhaft hervor, dass er um das Jahr 1465 schon sein Buch *de iudiciis nativitatum* geschrieben haben muss, das 1540 bei Petrejus in Nürnberg gedruckt wurde.

3) Das ist Petrus de Alliaco, der Kardinal.

natura id accidit. Facto igitur fundamento huiusmodi, quod propter absentiam tabularum dictarum efficere nunc nequeo, nihil reliqui est, quod difficile putari possit, si prius quidem PTOLEMEUM in quadripartiti sui capitulo octavo, deinde vero alios de qualitate mortis nati disserentes consuluerimus.

Diem passionis salutifere dico fuisse feriam secundam. Anno enim 34° etatis salvatoris nostri equinoctium vernale fuerat vigesima secunda die Martii, oppositio autem vera luminarium eodem anno proxime secuta equinoctium fuit completis 10 diebus Aprilis horis 23 et minutis 21 fere, diebus non equatis, videlicet die undecima Aprilis currente, qui fuit feria secunda. Fuit enim *b* littera dominicalis. Hec quidem secundum tabulas modernas, nam per tabulas PTOLEMEI invenietur tempus illud minus adeo, quod ab ipso instanti oppositionis luminarium ad instans medietatis eclipsis Luna potuerit percurrere 4 gradus fere. Quod autem equinoctii consideratio huic serviat proposito, manifestum existit. Iudeis enim precipiebatur in exodo, ut quarta decima die mensis primi pasca celebraretur. Primus autem mensis habebatur, cuius plenilunium in ipso erat equinoctio aut statim post ipsum equinoctium.

Anno CHRISTI 1425° fuit coniunctio duorum ponderosorum completis diebus 30 horis 20 minutis 53 Augusti ad meridianum Viennensium. Locus verus planetarum terminavit gradus 12 minuta 31 secunda 11 Scorpionis. Hec tamen coniunctio non mutavit triplicitatem, quemadmodum proposuisti, sed fuit quarta ab ea, que triplicitatem innovavit, anno scilicet Christi 1365 currente diebus 29 horis 16 minutis 15 completis. Locus autem verus planetarum tunc fuit in gradibus 7 minutis 16 secundis 47 completis Scorpionis. Coniunctio, de qua querebas, cum non erit magna, non perhibetur significare adventum prophete. Si tamen talis esset, qualem proponebas, iudicii consumatio ex prememoratis scriptoribus haberetur. | 71 (63)b

Queris tandem tempus coniunctionis vere proxime trium superiorum secundum consuetudinem tabularum. Onus grave admodum meis imposuisti humeris, siquidem haud facile est investigare tempus medie coniunctionis eorum; plurimum enim interest, veluti nosti, inter hoc et illud. Credo, si quis ALFONSI tabulis aut aliis etiam resolutis usurus huiusmodi tempus numerare pergeret, aut fortuito quesitum numeret, aut etas sibi nequaquam sua sufficeret. Si quis tamen curiosus videri mallet quam prudens per tabulas IOANNIS BLANCHINI, quam brevius fieri posset, id exequeretur, querendo primo aliquas coniunctiones veras duorum ponderosorum in locis eorum veris ad tempora huiusmodi coniunctionum, sive cum elongationibus veris a Sole; deinde computando cursus Martis veros sive elongationes eius a Sole ad predicta tempora. Quod si aliquando conincidentiam locorum

verorum sive elongationum a Sole inveniret, metam attigisse videretur. Si vero non, alie posteriores coniunctiones vere duorum ponderosorum querenda essent, ut prius. Sed insanire potius quam astronomice exerceri videretur, quisquis tam incerto negotio animum appelleret.

Habes tandem, vir optime, quicquid impresentiarum tuis interrogatis reddere libuit, neque veniam apud te habitum iri me ambigo, si remisse nimium ac diminute responderim penuria librorum conditioneque loci id persuadentibus. Quis enim meminisse posset omnia preceptorum ad iudicia proferenda necessaria? Vidi neminem. Atqui iactis bonis fundamentis numerorum, nemo, ideoma saltem latinum callens, iudicium complere trepidabit. Nam si talem offendet constellationem, tale scriptum efferet iudicium, si aliam, aliud. Quo verius nihil videtur in astronomia quadruviali ingenium demonstrare, quam iudiciali. Hec enim non nisi magno et excellenti ingenio viris attingenda probetur, illam vero populares et rudes quique lacerare audent. Sed ne certamen novum ineamus, de his rebus modum sermonis statuo, longe enim comodius voce quam litteris definiuntur. Si quando conveniendi dabitur facultas, de his atque aliis plurimis opere precium disseremus. Interea tamen huc apud me crebro fac sint littere, ne amor fausto ceptus auspicio refrigescat. Materiam ad me scribendi tibi
72 (64)[a] non defuturum arbitror, ubi LUCIANUM | tuum reducem feceris. Et si novis problematibus lacessere permittes, accipe subscripta. Quod si solutio nonnunquam perdifficilis videatur, modum dumtaxat solvendi annotabis, non enim instar puerorum ad par vel impar pro fortuna ludentium, verum modo philosophantium doctrinas regulares amplectentium invicem exercebimur.

Quidam antiqui duodecim domos celi distinguebant per circulos magnos transeuntes per duas intersectiones meridiani et orizontis et per puncta dividentia equatorem in duodecim partes equales, quorum punctorum duo quidem sunt in meridiano et duo in orizonte. Ponatur igitur principium Leonis in orientali portione orizontis: quero initia domorum reliquarum in regione habente latitudinem graduum 26. Utrum autem modus ille domos distinguendi acceptandus sit an non, posterius diserendum censeo.

Cum sit possibile gradus signi ascendentis et gradus signi in medio celi existentis equales esse numero, utrum angulorum assimiliabis vero loco planete victoris in loco coniunctionis vel oppositionis proximo precedentis nativitatem. Verbi gratia sit finis sexti gradus Piscium in meridiano et finis sexti gradus Cancri in orizonte. Vellem quoque scire latitudinem regionis, in qua casus ille soleat evenire.

Venus ponatur percurrisse vero motu suo 2 gradus et minuta 25 Arietis habens latitudinem septemtrionalem g̃ 6 et m̃ 17: quero, in quo puncto ecliptice terminetur linea recta radiationis sue trigona. Volo dicere, ducendo

lineam rectam a loco vero Veneris secundum longitudinem et latitudinem ad eclipticam, que linea sit equalis lateri trianguli equilateri circumscripti ab ecliptica: quero quis punctus ecliptice terminat hanc lineam. Similiter possem proponere de aliis radiationibus. Quantum autem, nisi me fallit opinio, modus ille radiationum conferret, se in usum sumeretur, silentio nunc preteribimus.

Sed iam calamus arcendus est, ne tumultuariis litteris magis gaudere videatur, quam aliquid frugi proferre. Dabis ergo pro mansuetudine tua veniam, et domino Octaviano suum servitorem Ioannem commendabis. Vale feliciter. Apud Balneas Viterbienses, die (sic)

Tuus totus Io. Germanus.

Auf diese drei Briefe beziehen sich folgende Rechnungen des Nürnberger Manuskriptes.

| **Circa problemata missa Iacobo Spirensi, astronomo Comitis Urbini.** 28(20)[b], col. 3.

Primum problema supposuit in ascendente ♍ 16 ♏ 37, cuspidem autem quinte domus in ♍ 7 ♏ 18 Virginis. Queruntur cuspides reliquarum domorum cum latitudine regionis, ubi talis figura incidebat.

Cuspis undecime erat in $\overline{7} \cdot 18'$ Piscium

$69 \cdot 2$ ascensio recta cuspidis undecime

$134 \cdot 8$ ascensio recta ascendentis.

$65 \cdot 6$ differentia dictarum ascensionum et illud est quadruplum hore inequalis diurne puncti orientalis ecliptice.

$\overline{32} \cdot 33'$

$97 \cdot 39$ arcus semidiurnus ascensionis

$134 \cdot 8$

$36 \cdot 29$ ascensio recta medii celi,

$\overline{4} \cdot 9'$ Aquarii medium celum.

$69 \cdot 2$

$32 \cdot 33$

$101 \cdot 35$ ascensio recta cuspidis duodecime

$\overline{12} \cdot 36'$ Arietis cuspis duodecime domus.

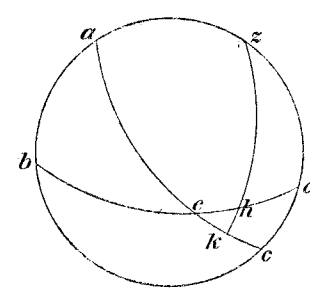


Fig. 41.

$\overline{7} \cdot 39'$ arcus *ek* (Fig. 41)

$16 \cdot 53$ arcus *hk*, supponendo Solis declinationem maximam

$23 \cdot 33 \cdot 30$.

Coniuncta

$ec \cdot ck$
$ed \cdot dk$
$hz \cdot zk$

col. 4. | $\overline{7} \cdot 39'$
$82 \cdot 21$ arcus kc; 59466 sinus kc;
$16 \cdot 53$
$73 \cdot 7$ arcus hz; 57414 sinus hz.

```
60000 · 59466
57414/
       59466
       57414
      237864
      59466
     237864
    416262
   297330
   ------------
     5
   341418 | 0924
    56903 |
```

56903 sinus hd; $\overline{71} \cdot 31'$ arcus hd [1])
$18 \cdot 29$ arcus eh; 19022 sinus eh
7987 sinus ek

```
19022 · 7987
57414/
                  6
                 32
        57414   314826
         7987  72127474
        ------ 458565618 |  2
       401898            |  4
      459312             |  1 [2])
     516726              |  0
    401898               |  7
    ----------
    458565618
```

29 (21)[a], col. 1.

1) In der Tafel ist sin $71^0 31' = 56905$.

2) Hier hatte sich Regiomontan zuerst verrechnet. Er erhielt 24106 als Quotient und 11286 als Rest.

24107 sinus zd; $\overline{23} \cdot 41'$ arcus zd [1]), et est elevatio poli septemtrionalis in regione, ubi supra memorata figura erecta fuit. Iacobus autem reddidit $\overline{30} \cdot 14' \cdot 45''$.

| Ad prosequendum problema primum missum Iacobo suppono altitudinem poli $\overline{23} \cdot 41'$, et quero arcum semidiurnum ad $\overline{16} \cdot 37'$ Tauri. 29(21)b, col. 2.

$\overline{16} \cdot 42' \cdot 25''$
$15 \cdot 59 \cdot 45$
$17 \cdot 20$
$37 \cdot$
$8 \cdot 40$
$1 \cdot 59$
2 pars proportionalis a.
$10 \cdot 41$
$16 \cdot 53 \cdot 6$ declinatio puncti ecliptice supra memorati

$23 \cdot 41$ arcus zd;	24101 sinus arcus zd [2]);	secundus.
$66 \cdot 19$ complementum zd;	54947 sinus dc;	primus.
$83 \cdot 6 \cdot 54$ arcus zh;	57414 sinus zh;	quartus.
	17426 sinus hk;	tertius.
	60000 sinus totus;	quintus.

	2	
	13	
24101	284	
17426	396	
144606	4281	
48202	9892	7
96404	323969	6
168707	4541122	4
24101	61655845	3
419984026	419984026	
	54947777	
	549444	
	5499	
	54	

1) In der Tafel ist sin $23^0 41' = 24101$.

2) An dieser spätern Stelle hat also Regiomontan den Sinus aus seiner Tafel entnommen, und nicht den früher errechneten benutzt.

col. 3.

7643	1
60000	64
458580000	17
	1 463
	54174
	132928
	1668361
	159712482
	458580000
	57414444
	574111
	5744
	57

7 9 8 7

7987 sinus *ek*; $\overline{7} \cdot 39'$ arcus *ek*

97 · 39	arcus semidiurnus quesitus.
32 · 33	duplum hore diurne ascendentis, scilicet $\overline{16} \cdot 37'$ Tauri.
134 · 8	ascensio reta ascendentis.
27 · 27	duplum hore nocturne
161 · 35	ascensio recta secunde domus
189 · 2	„ „ tertie domus
216 · 29	„ „ quarte domus
32 · 33	
249 · 2	„ „ quinte domus
281 · 35	„ „ sexte domus.

2ª: $\overline{13} \cdot 2'$ ♊; 3ª: $\overline{8} \cdot 18'$ ♋; 4ª: $\overline{4} \cdot 9'$ ♌; 5ª: $\overline{7} \cdot 18'$ ♍.

Sed Iacobus intellexit g̃ 16 m̃ 37 completa in ascendente, in cuspide autem domus filiorum accepit 6 gradus completos et 18 minuta. Fortasse hoc fecit diversitatem. Videbo igitur.

col. 4.

$\overline{68} \cdot 5'$	ascensio recta cuspidis undecime,
134 · 8	ascensio recta ascendentis.
66 · 3	differentia duarum ascensionum, et est quadruplum hore diurne ascendentis.
33 · 1	duplum hore diurne ascendentis,
26 · 59	duplum hore nocturne.
134 · 8	
161 · 7	ascensio recta secunde domus,
188 · 6	„ „ tertie domus,
215 · 5	„ „ quarte domus,
33 · 1	
248 · 6	„ „ quinte domus,
281 · 6	„ „ sexte domus.

2ª: $\overline{7} \cdot 21'$ ♊; 3ª: $\overline{7} \cdot 26'$ ♋; 4ª: $\overline{2} \cdot 48'$ ♃; 5ª: $\overline{6} \cdot 18'$ ♍; 6ª: $\overline{12} \cdot 5'$ ♎
Cuspides itaque domorum satis appropinquant veritati.

$\overline{66} \cdot 3'$
$33 \cdot 1$
$\overline{99} \cdot 4$ arcus diurnus ascendentis.
$9 \cdot 4$ arcus *ek*
$80 \cdot 56$ arcus *kc*

60000 primus,
59250 secundus,
57414 tertius,

57414
59250
2870700
114828
516726
287070
4531 | 9500
340177
56696

| 56696 sinus *hd*; $\overline{70} \cdot 54'$ arcus *hd* [1]); 30 (22)ª col. 1.
$19 \cdot 6$ arcus *eh*; 19633 sinus *eh*; primus
17426 secundus
60000 tertius

5
1 34
31875
55926
362147 | 5
6312598 | 3
594911455 | 2
1045560000 | 5
196333333 | 5
1963333
19666
199
1

17426
60000
1045560000

53255 sinus *dc*; $\overline{62} \cdot 34'$ arcus *dc* [2]);
$27 \cdot 26$ arcus *zd*, et est altitudo poli quesita.
Iacobus autem reddidit $\overline{30} \cdot 14' \cdot 45''$.

1) sin 70°54′ ist = 56697 in Regiomontan's Tafeln.
2) Hier ist in der Tafel sin 62°34′ = 53253

29 (21)[a], noch col. 1. | Problema quintum decimum supposuit vas columnale longitudinis 26 palmorum et latitudinis 8 palmorum. Emittatur unum denar., residuum habeat profunditatem 3 palmorum et $\frac{4}{5}$ unius, Urna supponitur habere longitudinem $3\frac{2}{3}$ palmorum, latitudinem vero $1\frac{5}{6}$ palmorum, queritur, quantum vini restat in vase.

8
8
16
26
96
32
416 prima totius vasis

col. 2. $\frac{11}{6}$. 11 11 11 11 121 36 $\frac{121}{36}$ $\frac{11}{3}$ | 121 11 121 121 1331

$\frac{1331}{108}$ prisma urne unius.

$\frac{416}{1} \cdot \frac{1331}{108}$

416	1	
108	4	
3328	15995	33
416	44928	
44928	133	

$33\frac{1005}{1331}$ urne, capacitas totius vasis.

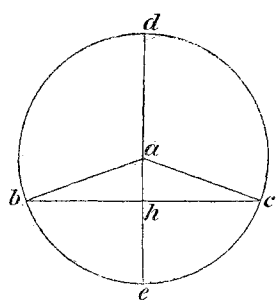


Fig. 42.

Sit *de* latitudo vasis columnalis, et *eh* profunditas vini residui (Fig. 42).

$4 \cdot 60000$

$\frac{1}{5}$

12000	3000
4	

3000 linea *ah*, ut *ae* est 60000.

$\overline{2} \cdot 52'$ complementum arcus be[1])

$87 \cdot 8$ arcus be; 59925 linea bh, ut ae est 60000,

| 120000 linea de col. 3.

14400000000 quadratum circumscriptibile circulo bec

```
 14400000000          1 1          | 1
 14400000000        1 2243   2     | 1
-----------        1426428326 4    | 3
158400000000      158400000000     | 1
                  144444444444     | 4
                  111111111111     | 2
                                   | 8
                                   | 5
                                   | 7
                                   | 1
                                   | 4
```

11314285714 area circuli prescripti.

Sed in mentem venit modus facilior per tabulam portionum circulorum.[2])

```
 5405913441
 5280419620
 ----------
  125493821 tertius
      60 · 8.

  125493821
          8
 ----------
  44113   2|
 100395056 8
  16732509|

 5405913441
   16732509
 ----------
 5422645950 portio bec

5657130000 area semicirculi
5422645950
----------
 234484050
        17
----------
1641388350
234484050
----------
3986228850 dividendus.
```

1) sin $2^0 52'$ ist in der Tafel = 3001.

2) Regiomontan muss also eine Tafel der Kreisabschnitte besessen haben.

$$\frac{3986228850}{5657130000},$$

igitur ex vase extracte sunt 17 urne et minutia parva quedam. Iacobus reddidit 19 urnas et $\frac{5}{7}$ fere unius.

col. 4. | Circa problema aliud de coniunctione media trium superiorum etc[a].

```
  1709
   365
  ----
  8545
 10254
 5127
 ------
 623785
     60
     24
 ------
 623869 dies, quos dedit Iacobus
```

```
   365
     4
 ------
 1460 · 1461
```

```
  134   |
 13122  |
 269442 | 4          427
 623869 | 2            4
 146111 | 7         ----
  1466  |           1708 anni equales.
   14   |
```

1708 anni. 0 menses. 22 dies. 15 hore. 54 m̃. 36 2̃. 24 3̃. 14 4̃. 6 5̃.

```
11 · 24 · 40′· 56″
 9 · 14 · 16 · 39
 3 ·  7 · 52 · 39
        44 · 13
         1 · 15
              5
 0 · 10 · 15
 ------------
 0 · 27 · 50 · 47 medius motus Saturni ad hoc tempus Iacobi
```

$4 \cdot \overline{2} \cdot 10' \cdot 14''$
$0 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 10$
$8 \cdot 2 \cdot 53 \cdot 51$
$1 \cdot 49 \cdot 44$
$3 \cdot 7$
$4 \cdot 23 \cdot 38 \cdot 11$

$5 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 17$ medius motus Iovis

29 (21)[b], col. 1.

$8 \cdot \overline{15} \cdot 48' \cdot 12''$
$2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 4$
$3 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 35$
$11 \cdot 31 \cdot 46$
$19 \cdot 39$
$1 \cdot 11$
$5 \cdot 17 \cdot 25 \cdot 1$

$7 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 28$ medius motus Martis ad tempus Iacobi

Igitur in hoc tempore dato non coniunguntur, sed plurimum a se distabunt.

Circa nonum problema de panno et ducatis.

Quidam emit 15 ducatis aliquot brachia panni; deinde proportionaliter aliquot ducatis emit 27 brachia panni. Numerus autem ducatorum, quos exposuit, cum numero brachiorum emptorum simul efficiebant 100: quero, quot ducatos exposuerit, quotque brachia panni emerit.[1])

---

1) Der Gang der Rechnung ist in moderner Bezeichnung folgender:

Die für 15 Dukaten gekauften Ellen seien x, dann bleibt für die Zahl der Dukaten, welche 27 Ellen kosten, $100 - (15 + 27 + x)$ übrig, das ist

$$58 - x.$$

Nun muss sich verhalten $15 : x = (58 - x) : 27$, und es ergiebt sich die Gleichung

$$58x - x^2 = 405$$
$$58x = x^2 + 405.$$

Es ist $29^2 - 405 = 436$, also

$$x = 29 - \sqrt{436} \sim 8{,}1.$$

Es ist also, wie Regiomontan andeutet, die wirkliche Ellenzahl 35,1 ungefähr das, was Jacobus Spirensis als Anzahl der Dukaten angiebt. Hätte Regiomontan den zweiten Werth von x benutzt, den er also wohl nicht kannte, nämlich $x = 49{,}9$, so hätte er 76,9 Ellen und 23,1 Dukaten erhalten.

ducati 1 ℛ 27 100
15 15 42
0 27 brachia 42 58

58 ꝝ 1 ℛ 58 ꝝ 1 ℛ

27
15 58 ℛ ꝝ 1 ⅆ — 405
135 58 ℛ — 1 ⅆ et 405
27 29.
405

29
29
216
58
841
405
436 ℞ de hoc.

29 ꝝ ℞ quadrata de 436 est valor rei

436 | 20
4

Valor ergo rei minor est quam 9 et maior quam 8. Iacobus reddidit $64\frac{2}{7}$ brachia panni et ducatos $35\frac{5}{7}$. Si ex numero brachiorum fecisset ducatos, propius ad verum venisset.

30 (22)[b], col. 2. | Iterum circa problema de ducatis et pannis.

Iacobus reddidit 64 brachia et $\frac{2}{7}$ panni, ducatos autem $35\frac{5}{7}$

col. 3.

15 0 | $35\frac{2}{7}$
0 27 15
$20\frac{2}{7} \cdot 27.$

Igitur $20\frac{2}{7}$ ducatis empta sunt 27 · brachia.

$20\frac{2}{7} \cdot 27.$
15

27
15
135
27
405 dividendus

$\frac{142}{7}$

13	
55	
1417	19 brachia
2835	
1422	
14	

Igitur 15 ducatis empta sunt $19\frac{137}{142}$ brachia

19		959
27	$\frac{137}{142} \cdot \frac{2}{7}$	284
20		1243
15		994
81		249

$82\frac{249}{994}$ brachia et ducati.

| Circa problema meum tertium. 30 (22)[a], col. 1.

Stella fixa supponitur habere $\overline{13} \cdot 25'$ Geminorum cum latitudine septemtrionali octo graduum, que stella in regione quadam occidit cum $\overline{23} \cdot 14'$ Geminorum: queritur latitudo regionis.

| Sit meridianus *abcd*, sub quo medietas orizontis occidentalis *bcd*, et col. 2. medietas ecliptice *aec*, ita quod punctus *e* sit in orizonte, scilicet finis graduum 23 et minutorum 14 de Geminis. Stella fixa sit in *h*; polus mundi borealis sit *z*, productoque arcu *zhk* usque ad eclipticam stella predicta solebit mediare celum in puncto *k*. Si itaque arcus *hk* notus esset cum arcu *ke* et angulo *ekh*, reliqua omnia paterent etc. (Fig. 43). Primo igitur inveniam punctum ecliptice, cum quo ipsa stella mediat celum.

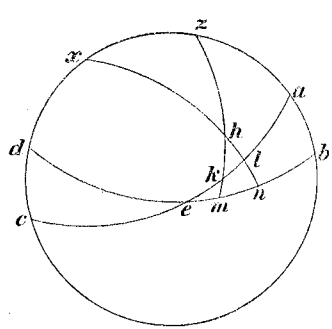


Fig. 43.

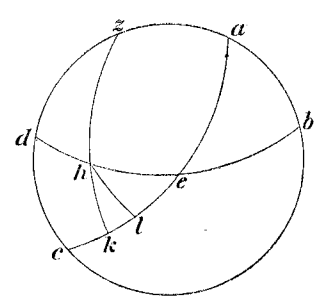


Fig. 44.

Sit in secunda figura *abcd* (Fig. 44) colurus distinguens solstitia; *bed* medietas equatoris, et *aec* medietas ecliptice; *e* principium Arietis et *a*

principium Cancri; z polus mundi borealis, et x polus ecliptice borealis, stella memorata in puncto h etc.

73 · 25′ arcus ed
74 · 43 arcus en
22 · 35 · 38
22 · 42 · 36
6 · 58
43
5 · 1
22 · 40 · 39 arcus ln
8
30 · 40 · 39 arcus hn; 30613 sinus hn; tertius,
59 · 19 · 21 complementum arcus hn; 55361 sinus arcus xn; primus,
23 · 33 · 30
col. 3. | 66 · 26 · 30 arcus xd; 54999 sinus xd; secundus.

55361 · 54999
30613

	4	
54999	5 6	
30613	1157	
164997	2273635	3
54999	134859975	6
329994	1683684387	4
164997	553611111	1
1683684387	5536666	2
	55333	
	555	
	5	

30412 sinus hm; 30 · 27′ arcus hm, et est declinatio stelle septemtrionalis. [1])
59 · 33 arcus zh; 51724 sinus zh; primus.
30 · 40 · 39
59 · 19 · 21 complementum arcus hn;
51603 sinus complementi hn; secundus
60000 tertius.

1) Dieser Sinus ist in der Tafel = 30407.

51724 · 51603
60000

	5 3	
	139	
	648	
	434991	
	545343	5
51603	1968868	9
60000	541964824	8
3096180000	3096180000	5
	517244444	9
	5172222	
	51777	
	511	
	5	

| 59860 sinus complementi *mn*; $\overline{86}$ · 5′ complementum *mn* col. 4.
3 · 55 arcus *mn*
74 · 43
70 · 48 arcus *em*.

$\overline{12}$ · 18′ Geminorum, cum quo mediat celum stella predicta.

$\overline{12}$ · 18′
13 · 25
1 · 7 arcus *kl* in prima figura
22 · 20 · 29
22 · 28 · 17
7 · 48
18 ·
2 · 6
14
2 · 20
22 · 22 · 49 arcus *km* in secunda figura
30 · 27
8 · 4 arcus *hk* in secunda figura sive etiam in prima.

8422 sinus *hk*, primus
8050 sinus *hl*, secundus
60000 tertius

8422 · 8050
60000

	1	
	8	
	24967	
	35129	
	592352	5
8050	114964	7
60000	62966422	3
483000000	483000000	4
	84222222	9
	842222	
	8444	
	84	
	8	

57350 sinus anguli *hkl* in prima figura.[1])

30 (22)[b], col. 1. | $\overline{72} \cdot 54'$ angulus *hkl* in prima figura.
23 · 14
12 · 18
10 · 56 arcus *ke* in prima figura,
1 · 7
9 · 49 arcus *le* in prima figura,
80 · 11 complementum arcus *le*; 59121 sinus complementi *le*, secundus.
82 · 0 complementum *hl* in prima figura; 59416 sinus complementi *hl*, tertius.
60000 primus.

60000 · 59121
59416

59416	
59121	
59416	
118832	
59416	
534744	
297080	
3 3	
351273	3336
58545	

58546 sinus complementi arcus *he* in prima figura.[2])

1) Dieser Sinus ist in der Tafel = 57348.
2) Hier ist in der Tafel der Sinus = 58547.

$\overline{77} \cdot 22'$ complementum arcus *he*
$12 \cdot 38$ arcus *he* in prima figura.

Pro angulo *ehk*.

13123 sinus arcus *he* in prima figura, primus
57350 sinus anguli *hkl* in prima figura, secundus
11380 sinus arcus *ke* in prima figura, tertius.

13123 · 57350
11380

	1	
	13	
	42	
57350	539	
11380	126469	
4588000	3981926	4
17205	12774237	9
5735	238826914	7
5735	652643000	3
652643000	131233333	2
	1312222	
	13111	
	133	
	1	

col. 2.

49733 sinus anguli *ehk* in prima figura.[1])

Iam pro arcu *zd*.

$\overline{30} \cdot 27'$
$59 \cdot 33$ complementum dicte declinationis, et est arcus *hz*;
51724 sinus huius complementi.

60000 · 49733
51724

51724
49733
155172
155172
362068
465516
206896
1541
257238 | 9692
42873

42873 sinus arcus *zd* in prima figura.
$\overline{45} \cdot 36'$ arcus *zd*[2]), et est altitudo poli borealis quesita.

1) Nach seiner Tafel wäre der Winkel *ehk* = 58°59′.
2) In Regiomontan's Tafel ist sin 45°36′ = 42868.

Damit ist aus der Zeit des italienischen Aufenthaltes Regiomontan's der erhaltene Briefwechsel beendigt. Der Sammlung, welche jedenfalls von Regiomontan selbst bewirkt ist, ist dann aber aus dem Jahre 1471 von Nürnberg aus geschrieben noch ein Brief an den Professor in Erfurt Christian Roder eingeheftet, welchen wir zum Schlusse noch zum Abdrucke bringen.

IX.

Regiomontan an Christian Roder.

xps

76 (68)[a] | Ioannes de Regiomonte mgro Christiano, mathematicarum prestantissimo S. D. P.

Si miraris, vir egregie, inopinas hasce litteras ab homineque ignoto datas, que ad scribendum me impulerit causam paucis accipe. Nuper apud Dominum meum regem et proceres Hungarie mihi moranti, afferebatur predictionis quiddam ad annum superiorem ex Italia allate, in quibus tam crebram quam manifestam cernere erat discrepantiam, ut quasi ex composito autoris sibi invicem contradixisse viderentur, ab eventu autem rerum omnes pariter aberrantes. Illi vero principes subattoniti, quamvis antea miro quodam astronomici studii tenerentur amore, cum tamen universalem pene animadverterent fallaciam, dubitabundi rogare ceperunt pro suo quisque ingenio, undenam tantus tamque communis error profluat; culpandane sit ars ipsa, an potius professorum incuria, quid quod prisci astrologi, si creditur historicis, ad unguem semper futura pronunciasse perhibentur. Tales pene innumeras mihi questiunculas obiecerunt viri illi augusti ac astronomiam probe callentes. Ego autem ex improviso respondere coactus, postquam mores atque doctrinam astrologorum in Italia iam pridem mihi notorum exposui, huiuscemodi erroris causam codicibus inpixi vel minus bene traductis, vel indocte expositis, vel alio id genus vicio labefactis. Motus denique stellarum nostra tempestate observationibus non satis esse compertos, quod et exemplis plurimis confirmavi non modo propriis, verum etiam alienis, et iis quidem virorum nobilium. Hanc denique fallaciam non solum in quinque retrogradis, sed etiam in luminaribus ipsis animadverti defectu eorum aliter per calculum et aliter per inspectionem apparente, et ne fides recentioribus testimoniis negaretur, Albategnium introduxi, qui utriusque lunaris defectus aliter in celo deprehendit, quam per numeros Ptolemaicos eliciebantur, quod et Ptolemeo ipsi obtingit inspectiones suas ad numeros Hipparchicos conferenti. Hinc sequi oportere, quod neque revolutiones sive mundane sive genitales per tabulas nostras deprehendi

possint, nec stelle in domiciliis celi opportune sisti. Hoc presertim attento, quod nec domus ipse, quod apte ab universis distinguitur astronomis, quibus certe preteritis aut minus caute apertis iudicium omne astrologicum incertum fore. Hec atque alia multa succincte et per transitum quendam coram ipsis recensui, ut autem hanc nobilissimam ab iniuriis inperitorum vindicarem. Finis autem totius colloquii nostri eo tendebat, ut, nisi motus stellarum denuo investigarentur, vel saltem emendatius agnoscerentur, quemadmodum prisci fecere philosophi, PTOLEMEUSque ipse omnium princeps sepenumero id fieri subhortatur, non posse durare hanc artem, sed in dies laceratum iri, ac tandem preceps evanescere. Cumque insinuarem me iam dudum | resarciendi astronomie fundamenta quedam iactasse, sed hanc pro- 76 (68)[b]
viciam unico homini nimis duram et pene impossibilem esse, oportere quidem complurium observatorum adminiculo et frequenti siderum inspectione, hanc labem, quoad eius fieri potest, expurgari, illi contra iam non causam morbi, sed medelam queritantes sciscitabantur, ubinam talium studiosi rerum offendi possent. Respondi ego, plurimos quidem passim astronomie sciolos apparere, qui vero artem hanc ceterasque mathematicas eximie calleat, presertim in Germania, preter unum magistrum CHRISTIANUM ERFORDIENSEM extare neminem. Hoc pacto respondere me iussit officium. Multa equidem de tua excellentia cum ex aliis plerisque omnibus Erfordia venientibus, tum ex fratre AQUINO[1]) volupe intellexi, neque defuit testimonium IOANNIS KELLER, conterranei mei, qui non modo doctrinam tuam, sed et mores et vite integritatem apprime laudare solitus est. Quare tuas virtutes coram proceribus recensenti mihi mox imperatum est, ut ope tua ad ceptum iam pridem negotium fruerer. Itaque, vir doctissime, sive famam tuam preclaram ampliare velis, sive exercitio mathematicarum primarum oblectari libeat, sive etiam discipulis tuis haud mediocre commodum exhibere, pande, queso, fores benivolentie tue atque humanitatis: novum et, nisi me fallit opinio, haud ingratum olim futurum amicum recipe IOANNEM, qui multorum principum domestica familiaritate posthabita patrono contentus unico ad urbem Norembergam concessit, quo vicinior tibi factus tecum commodius ac tempestivius philosophari queat. Sinamus ceteros bellorum domare rabiem, nos autem more nostro militemus non quidem equestri, ut assolet, certamine, verum potius librorum assidua evolutione; arma nostra sunto non cestus, non pila, neque arietes aut balliste, sed radii HIPPARCHII atque PTOLEMEICI, quos iam ex ere calaminato spectabiles ingentes atque ad celi contemplationem accomodatissimos extruxi; armillis denique et aliis id

1) Dieser Mann, auch AQUINAS DACUS genannt, reiste um die Mitte des 15. Jahrhunderts in Deutschland und lehrte gegen Bezahlung die Algebra.

genus astronomicis machinis res agetur. Huic bello acerrimo te affore velim sive ducem optimum sive comilitonem. Expugnandi enim sunt errores veritatis, hostes, quibus non modo sideralis disciplina, verum etiam omnes prorsus mathematice squalent, ut illustratis olim tamen tam preclaris artibus libri novi atque emendatissimi et quod fieri potest incorruptibiles exoriebantur. Cuius quidem negotii arduissimi onus iam humeris incumbit meis. Conor equidem opere pretium omnia mathematicarum volumina a
77 (69)[a] pressili | conscribere littera, ne mendosa deinceps exemplaria lectores quamvis acutissimos obtundant. Non enim ignoras, quod tenui vicio, et ut ita loquar, unius plerumque elementi transpositione longa et alias clara demonstratio interturbari soleat. Nulli profecto codices hoc scribendi munere magis egent quam mathematici, quippe qui ob penuriam nominum elementis singulariis ad res quasque significandas utuntur, atque idcirco corruptioni magne obnoxii redduntur. Quid de abacis dicam astronomicis? Ubi si character unicus vel pretereatur, vel transponatur, vel quomodolibet vicietur, totam labefacturi paginam necesse est. Longum est enarrare, qui per singulas mathematicas loci sint exscribrandi et nonnumquam radicitus evellendi. Adeo enim omnes oblitterate sunt et per secula multa falsis exposiunculis atque fallacibus interpretamentis obrute, ut ne vocabulum suum quidem satis tueri possint. Nempe a discendo, si originem respicimus Grecam, nuncupate quomodo ullam prebebunt disciplinam, si tot tantisque mendis opplete suspicionem pariant, nihil prorsus sibi veritatis inesse? Nolim nimis diem terere in astrologia predictionaria, quamvis ea ad te scribendarum occasionem dederit litterarum, que quam fluxa sit ac fragilis, quamque autores sui invicem discrepent, et, quod turpissimum est, multi sibi ipsis minime constant, propediem in publicum dabitur. Sed de quadruviali minus suspecta pudet profecto fateri, quam lacera sit et caduca. Nam, ut insigniores eius notas omittam, brevitatis gratia, hoc unum magis dolendum quam accipiendum censeo, quod hodie astronomi vulgo egregii vocitantur, qui calculos motuum celestium utcunque promere didicerunt, in tugurio non in celo astronomiam soliti, et siquidem absque errore id facerent, aliquanto tolerabilior esset eorum fastus. Sed illi creduli nimis Alfonsinium abacum quasi celo lapsum venerantur, cum tamen nusquam appareant rationes sue, cur pleraque immutaverit, quodque celo stellati duplicem motum per tabulas suas expresserit, quod solarem excentricitatem atque alia plura inverterent. Facile respondebit computator, quod observationibus astronomius innixus sit, ostendetur vel nullis vel perquam paucis inspectionibus usum esse, quinimo ex serie numerorum suorum atque exercitio plurima deducuntur inconvenientia, que non solum Ptolemeo et Albategnio ac aliis vetustioribus, sed et hodiernis repugnant experimentis, et

quidem manifeste adeo, ut vix absque pudore coram doctis recensere possint. Sepe equidem patrocinium huius viri contra nonnullos adversarios sumpsi, qui Persicas tabulas aut Toletanas | sive alias iamdiu explosas illustrare 77 (69)[b]
et pro certioribus redintegrare conabantur. Ubi vero *neque* has *neque* illas satis roboratas esse animadverti, veritati potius studendum censui quam infirmis quibuslibet inventoribus allucinandum. Ceterum ille Alfonsine multas pepererunt filias matris utrique contagio laborantes, quas nescio, si compellare liceat sine malivolentia quorundam adeo tabulatoris primi auctoritas plerisque omnibus irrepsit. Hec, eximie vir, non per invidiam ita me deus amet, commemoro; non enim me fugit erratis quidem monitu Aristotelico veniam dari oportere, bene autem inventis multam habendam esse gratiam.[1]) Verum commiseratione quadam inductus paucula meditationum mearum initia aperire libuit, ut ope tua rectior olim numerandi formula astronomie studiosis tradatur. Quocirca, si quasdam stellarum inspectiones motuumque celestium observationes aut utriusque luminaris defectus aliquando litteris mandasti, fac, queso, mihi communes fiant. Illis enim ad meas collatis aliquid spero, quod emendandis supputationibus astronomicis conducat, elicietur. Quod si meas quoque vicissim cupis evestigio tibi impertiar, quas in studio Viennensi una cum preceptore meo conscripsi, quas Rome in domo domini Niceni Cardinalis, quasque Patavii ac demum in regno Hungarie et nuperrime in urbe Nurenberga feci et deinceps facturus sum. Eam enim mihi delegi domum perpetuum, tum propter commoditatem instrumentorum et maxime astronomicorum, quibus tote sideralis innitur disciplina, tum propter universalem conversationem facilius habendam cum studiosis viris ubicumque vitam degentibus, quod locus ille perinde quasi centrum Europe propter excursum mercatorum habeatur. Quod autem ex te nunc desidero, ab aliis quoque celi spectatoribus ac generalibus studiis omnibus, quantum fieri potest, exposcam, ut congestis variis ac certis observationibus numeri tabulares meliusculi reddantur. Quo facto, si deus aspirabit, planetarum ephemerides, vocant almanach, ad triginta vel plures annos charactere pressili pro amicis universis componam. Nam, etsi universe arti instaurande etatem nostram dubitemus suffecturam, conandum tamen est pro viribus, ut aliquid saltem veritati propinquius investigetur, ne vitam inerti silentio transegisse criminentur.

Habes iam, ut arbitror, cuius rei gratia ad te | litteras dederim, quam- 78 (70)[a]
vis et alie compluscule scribendi occasiones non defuerint. Quid enim de astronomia ceterisque mediis scientiis mirum est, si nonnunquam claudicant,

---

1) Auf dieselbe Stelle des Aristoteles bezieht sich Coppernicus in seinem Briefe an Wapowski gegen Werner.

cum binis singule pedibus altero quidem recto altero autem contorto gradiantur? Extremarum enim scientiarum altera plerumque incerti aliquid afferre solet. Nam ipse enim primarie mathematice purgamento haud mediocri egere videtur. Ita vorax etas omnia penitus attenuat, ut indubitabilis veritas, et cui primum certitudinis gradum peripateticorum antistes tribuit, ab opinionibus falsisque interpretamentis contaminentur. Et ut ex ipso quasi vestibulo geometrie quedam promantur libamenta, quid dices de principio, quod de recta quavis linea duabus incidente assumitur? Nonne illud longe obscurius et ab intellectu remotius est quam vigesima nona primi elementorum Euclidis conclusio, cuius gratia principium illud premittitur? Quem scrupulum et Campanus animadvertens hoc principium inter petitiones stolide collocavit, quamvis Graeci inter communes scientias ordinarint.[1]). Sed Arabes nonnulli a ministerio demonstrationis penitus reiecerunt hoc proloquium, aliter quidem equidistantes lineas diffiniendo. Pudet profecto recensere labores Campani, quibus frustra stabilire tentat principia quinti elementorum voluminis, quippe qui diuturno studio ac magno verborum involucro irretitus postremoque fessus atque desperabundus eadem semper recidiva laborat, idem scilicet per se ipsum diffiniendo. Nam quid tantem aliud pretendit diffinitio sexta secundum mentem eius, quam quod quantitates incontinue proportionales sunt, quarum prime et tertie equemultiplices itemque secunde et quarte equemultiplices, si conferantur, eodem ordine, quo submultiplices proponuntur, incontinue proportionales sunt? Illud enim significat similitudo additionis aut minuitionis vel equationis, quam ipse insinuat. Undecime autem diffinitionis expositio quam ridicula sit, facile quispiam intelliget, qui proportionalitates irrationalis denominationis penitus exortas duplicare, triplicare aut quantumlibet multiplicare didicit. Porro principium decimi voluminis quomodo constabit, si sesquitertia proportio infinities etiam coacervata sesquialteram neque superare potest, neque etiam attingere? Quod si proportiones minoris equali-
78 (70)[b] tatis non | sunt de eodem genere quantitatis, quomodo altera ex alteris componi poterit? Si autem a genere quantitatis omnes prorsus excludende sunt proportiones, nulla omnino erit proportionum proportio, et ideo fabulas narrabunt, quicumque septimi physicorum regulas de velocitate motuum traditas subtiliter exponere conantur. Omnis etiam ferme calculationum in Italia celebratarum corruet argutia. Nugari videbuntur postremo quicunque de proportionum proportionibus disserere quidpiam tentant. Audire velim, quis primam undecimi demonstret, postquam secundam cum tredecima

1) Bekanntlich irrt hier Regiomontan, da im echten Euklid der fragliche Satz die fünfte Petition bildet.

primi, cuius succursu prima undecimi fulcire debet, lineas suas in eadem planicie supponat, tales autem consideratas lineas, que in figura prima sunt, in eodem plano non nisi per secundam constare potest. Sed quid in elementis illis puerilibus diem terimus, cum in abstrusiori geometria principes etiam artis sese falso reprehendere videantur. MENELAUS quidem THEODOSIUM emendaturus suo se gladio iugulat. NICOLAUS autem CUSENSIS cardinalis, geometra ridiculus, ARCHIMEDISque emulus, quantas ostendabundus nostra tempestate invexit nugas? Quippe qui plurimos quadrabilis circuli modos edidit frivolos penitus et non nisi LULLIANIS quibusdam suasiunculis initentes.[1])

Paucula hec de lapsu mathematicarum perstrinxisse satis est, postquam ab initio de huiuscemodi rebus scribere haudquaquam instituerim. Ubi autem pari voto reciprocam inter nos benivolentiam agitare cepimus, non pigebit meditationes meas altiores forsitan amico detegere. Quod si conversationis formula placet, qua in Italia usus sum ad IOANNEM BLANCHINUM, senem in numeris exercitatissimum, aliosque viros gravissimos, libenter tecum eo colloquii genere disseram. Mos erat alternis invicem problematum tentamentis oblectari, quando | veras audire et reddere voces negabatur. 79 (71)[a]
Hunc itaque iucundum et reciprocum acuendi ingenii stimulum, e quo suscipiamus animo, et quando per otium poteris, de me quoque per argutias suas periculum facito. Sic enim, nisi me fallit opinio, in plerisque exculpemus abstrusis rebus. Ut autem supputationis tollatur fastidium, satis erit circa unumquodque problema breviusculam ratiocinandi seriem adnotasse. Non enim ad unguem cuncta exprimi poterunt, presertim ubi malignitas linearum irrationalium obstiterit.

Ab astronomicis igitur principium fiat.

a. Anno presenti 1465, quando Sol in capite Arietis reperiebatur, per calculum vulgatum queritur, quantus fuerit arcus eclipticae inter locum eius verum et circulum equinoctialem comprehensus, quantaque fuerit ipsius Solis ab equinoctiali declinatio. Quod rides, vir humane? An mirum aut impossibile tibi videtur subiectum problematis? Tranquille velim accipias monimenta IOANNIS tui, qui profecto ex fundamentis Alfonsinis deducet, Solem tunc ab Arietis initio distare sex ferme gradibus, atque ideo declinatione non penitus caruisse. Cum autem illud spectet ad iudicia annua, quomodo vitabit errorem astrologus, si caput anni, radicem predictionis sue, prorsus ignoraverit?[2])

---

1) Das bezieht sich sicherlich auf die Arbeiten des RAIMUNDUS LULLUS *de quadratura et triangulatura circuli*, welche ich in der Münchner Hof- und Staatsbibliothek aufgefunden habe.

2) Siehe dieselbe Aufgabe oben (S. 295) in dem Briefe an JACOB VON SPEIER mit ähnlicher Bemerkung.

b. Si octavus Piscium gradus fuerit in cardine regionis, octavus autem Cancri horoscopii dignitatem tenuerit in genitura hominis cuiuspiam, utrum horum angulorum assimiliabis loco planete sextum Tauri gradum possidentis, qui scilicet in coitu aut opposito luminarium proximo genituram precedente ceteros potestatum altitudine vicit? Vocant Arabici animodar. Quod si ab huiuscemodi rebus incertis atque inextricabilibus abhorres, fragilem penitus iudiciariam ratus astrologiam, dic, queso, latitudinem habitationis, ubi octavo Cancri gradu exorto octavus Piscium in meridiano reperiatur. Id enim astronomie quadruvialis opificium est. Suppono autem exercitii gratia maximam Solis declinationem 24 graduum.

c. Urbs Roma longitudinem habet ab occidente graduum 35 et latitudinem ab equinoctiali 42 graduum, Erfordia vero longitudinem 27 graduum latitudinemque 51 (hos quidem numeros exempli gratia sumo, sive recti sint sive ambigui): quero, possitne idem ecliptice punctus reperiri
79(71)[b] simul in utriusque urbis orizonte. Et si possibile est, quis | sit ille. Quod si duo talia puncta offendi possint, que sint ille. Soluto autem problemate haud dubium erit, duas habitationes, immo innumeras tam longitudine quam latitudine diversas in ascendente quopiam communicare. Que res quantopere in iudiciis perspicienda sit, facile quisque decernet.[1])

d. Stella quedam fixa secundum longitudinem quidem zodiaci obtinens gradus 13 minutas 15 Geminorum, latitudinem autem borealem 8 graduum in quadam habitatione occidit cum gradibus 23 Geminorum: queritur latitudo illius habitationis.

e. Si duarum stellarum latitudine carentium altera quidem in fine decimi gradus Tauri fuerit; altera autem in fine vigesimi quinti eiusdem signi, tercia vero distet a prima quidem undecim, a secunda autem 17 gradibus: queritur latitudo huius tertie stelle ab ecliptica locusque eius verus per longitudinem zodiaci.[2])

f. Arcus ecliptice 20 graduum de quarta vernali equalis est ascensione sue recte: quero, principium talis arcus quantum distet a capite Arietis. Suppono exercitii gratia maximam Solis obliquationem 24 graduum. De obliqua autem ascensione silendum censeo, quoniam, si talis quepiam ponatur equalis suo arcui ecliptice, profundiore opus erit inquisitione.

g. Pono Saturnum in gradibus 10 Arietis, Iovem in gradibus 23 Leonis, Martem vero in gradibus 17 Virginis per medios motus suos. Quero, an unquam coniungentur illi tres, et si ita, in quanto tempore ab instanti situum positorum convenient. Quod si non est possibile omnes tres simul iungi, queritur, quando minimis distabunt intervallis. Motus autem Saturni

1) Auch diese Aufgabe siehe oben S. 294.

2) Eine ähnliche Aufgabe siehe S. 219, No. 1.

medius in die supponatur esse due prime minute et una secunda, Iovis 4′59″, Martis vero 31′27″, quemadmodum in tabulis statuuntur. De vero autem earum conventu ne verbum quidem fecero, quoniam labor immensus est.[1])

De astronomicis hactenus. Nunc ad geometricos ludos descendamus.

h. In triangulo *abc*, cuius angulus *b* rectus est, ab *a* vertice ad basim *bc* demissa est recta *ad* hoc pacto, ut, quod sub duabus *da* et *ac* continetur rectangulum, una cum quadrato linee *dc* equale sit quadrato *ac*: quero, quanta sit *dc* linea. Suppono autem *ab* latus 24 pedum, *bc* septem et *ac* 25 (Fig. 45).[2])

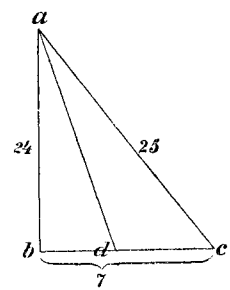


Fig. 45

i. Circulus quispiam diametrum habet 100 pedum, cui inscriptus est quadrangulus rectilineus habens latera in proportionibus horum numerorum 4 · 7 · 13 · 19: queritur, quanta sit area huius quadranguli. Item quero centrum gravitatis eiusdem | quadranguli. Voco autem centrum gravitatis cuiuspiam superficiei plane secundum Archimedem illud punctum, ex quo suspensa superficies equedistat orizonti. De superficiebus enim naturalibus hec sunt accipienda, que ponderis capaces exstant.[3]) 80(72)ᵃ

k. Duo circuli equales in eodem plano constitutie se secant, quorum utriusque diameter est 50 pedum, corda autem communis est 26 pedum: quero aream et angulum utriusque lunule. Item, quot huiuscemodi anguli lunares spatium repleant superficiale, si modo replere queant. Si enim non, queritur maxima multitudo talium angulorum a quatuor rectis deficientium.

l. Viginti quidam anguli lunares replent locum superficiale: quero, proportionem lunule ad ovalem, id est superficiem communem duobus circulis sese secantibus. Circulos autem ipsos pono equales.

m. Est quedam planicies ad orizontem et meridianam inclinata, cuius inclinatio ad orientem et septemtrionem vergit. Ad orizontem quidem inclinatio 40 gradus complectitur, ad meridianum autem 57: queritur longitudo umbre, quam proiicit scioterus sive gnomo aut stilus tripedalis ad planiciem ipsam perpendiculariter infixus, Sole habente altitudinem meridianam 60 graduum. Item quero angulum inclinationis huiuscemodi planiciei cum equinoctiali circulo, si qua est talis declinatio in regione, cuius latitudo est 51 graduum.

---

1) Siehe oben S. 295, No. 5.

2) In etwas anderer Form schon oben gegeben. Vergl. S. 262, No. 16.

3) Siehe oben S. 219, No. 3 und die Ausführung der Auflösung in dem Briefe an Bianchini vorn.

hibere poteris, ut inventarium bibliothecae illius ad me quam citius mittas, que plurimis abundat mathematicis codicibus, cuique, ut accepi, tu prefectus es.[1]) Hoc enim firmum erit pignus future consuetudinis nostre, pro qua re et ego missurum me polliceor opera, si que apud me fuerunt tibi placitura. Presertim si appetes illud novum de primo mobili quod nuperrime patrono meo regi Pannoniarum dedicavi, cuius quidem fructum ad te mittam, quam primum litteras tuas suscepero.[2]) Que si meis angustiores erunt, nihil refert, nam et ego ab initio litteram non codicillum ad te scribere destinavi; sed amoris impetus filum orationis longius produxit.

Ceterum si in studio vestro amplissimo alii sunt viri mathematicarum studiosi, fac, queso, mihi innotescant meamque in amicos beneficentiam experiantur. Suscita, queso, ingenia frigidiuscula, ut unanimi ac solerti inquisitione artes nostras dignissimas et propediem, nisi amplius suffulte fuerint, occubituras, quod fieri potest, erigamus. Mea quidem nihil refert in hoc negotio tam arduo tamque ampliter profuturo sive ministrum aut discipulum alius quispiam me substituat, sive hortatorem sectetur, modo reipublice litterarie aliquid commodi accedat. Et ne premia certationis desint, preter coronam quadruvialem, preter laudes uberrimas, quas coram
82(74)[b] primoribus viris impiger ego et sedulus preco decantare | solebo, munus etiam aureum, quam equidem exhibeo, decrevi. Cuicumque etenim sex certa, non dico que, prescriptorum problematum solventi pro singulis bona fide binos aureos hungaricos me daturum polliceor.

Vale feliciter (ex Nuremberga, die 4 Iulii anno Christi 1471).[3])

---

1) Es ist das die berühmte Amplonianische Bibliothek, welche zu jener Zeit schon im Besitze der Universität Erfurt sich befand. Ihr Bibliothekar war also damals, d. i. 1476, Christian Roder.

2) Da es durch diese Stelle, wie schon öfter hervorgehoben ist, nicht unwahrscheinlich wurde, dass schon 1471 die *Tabula primi mobilis* gedruckt vorgelegen, und, wenn Roder zustimmend geantwortet hätte, ihm ein Exemplar einer solchen Ausgabe zugekommen wäre, bat ich Herrn Professor Stange in Erfurt, den derzeitigen Vorsteher der Amploniana, nachzusehen, ob nicht ein Exemplar einer solchen Ausgabe sich etwa dort erhalten habe. Die freundlichst sofort angestellten Nachsuchungen haben auch hier leider ein negatives Ergebnis gehabt.

3) Bei de Murr steht das schon vor dem letzten Absatze, also nach *produxit* und vor *Ceterum si.*

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN. BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XIII. HEFT.

URKUNDEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM MITTELALTER UND DER RENAISSANCE.

HERAUSGEGEBEN VON

MAXIMILIAN CURTZE.

IN ZWEI THEILEN. ZWEITER THEIL.

MIT 117 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Die Ausgabe dieser Urkunden in zwei Theilen gestattet mir, hier einige nachträgliche Bemerkungen zum ersten Theile hinzuzufügen.

Zu S. 195: Von den im Briefwechsel Regiomontan's erwähnten Persönlichkeiten lehrte Pietro Buono Avogario von 1467 bis 1506 als Docent der Astronomie an der Universität Ferrara, in der ersten Zeit mit Giovanni Bianchini zusammen. Er war aber, wie aus *Bullettino Boncompagni* VII, 339—342 sich ergiebt, schon seit 1456 in Ferrara, seiner Vaterstadt, schriftstellerisch thätig. Zur Zeit des Aufenthaltes Regiomontan's in Italien war er also etwa mit diesem gleichaltrig.

Zu S. 264: Paolo dal Pozzo Toscanelli aus Florenz gebürtig starb daselbst im Jahre 1482 im Alter von 85 Jahren. In der ersten Ausgabe der Trigonometrie Regiomontan's, Nürnberg 1533, findet sich auf S. 10—15 der besonders paginierten zweiten Abtheilung ein *Dialogus inter Cardinalem Sancti Petri: episcopum Brixinensem* (d. i. Nicolaus von Cusa) *et Paulum physicum Florentinum de circuli quadratura*, und auf S. 29 ein Dedikationsschreiben Regiomontan's an ihn: *Ioannes Germanus Paulo Florentino Artium et medicinae doctori celebratissimo ac mathematicorum praestantissimo S. P. D.*

Zu S. 295: Regiomontan schrieb auch eine eigene Schrift: *de directionibus contra Archidiaconum Parmensem*, die in der Aufzählung seiner Schriften bei Doppelmair S. 19 erwähnt wird. Wer dieser Archidiaconus gewesen, war mir nicht möglich zu bestimmen.

Zu S. 306: Dass bei Riccardi die Angabe, Antonio da Monte Olmi habe am Anfange des XVI. Jahrhunderts gelebt, wohl auf einem Druckfehler (XVI statt XV) beruht, folgt schon daraus, dass Regiomontan zu dessen Abhandlung *de iudiciis nativitatum* einen Kommentar geliefert hat, der sowohl in der Ausgabe dieser Schrift von 1540 abgedruckt ist, als er sich auch handschriftlich, vielleicht sogar in der Originalhandschrift Regiomontan's, in der Wiener Hofbibliothek erhalten hat. Vergl. *Codex Vindobonensis Palatinus 5335*, Blatt 61^{r}—96^{r}: Antonius de Montulmo, *de iudiciis nativitatum cum commentario Iohannis de Regiomonte.*

Das sind die Bemerkungen, welche ich hier einzufügen mir erlaube.

Thorn, im März 1902.

M. Curtze.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite.
Vorwort	III
III. Die „Practica Geometriae" des Leonardo Mainardi aus Cremona (78 Fig.)	337—415
Einleitung	339—341
Primus Tractatus / *Erster Traktat*	342—379
Prima pars / *Erster Theil*	346—365
Secunda pars / *Zweiter Theil*	364—371
Tertia pars / *Dritter Theil*	370—379
Secundus Tractatus / *Zweiter Traktat*	378—393
Prima pars / *Erster Theil*	378—387
Secunda pars / *Zweiter Theil*	388—393
Tertius Tractatus / *Dritter Traktat*	392—415
Weitere Aufgaben der Göttinger Handschrift (10 Fig.)	416—433
Specimen der Sinustafeln Leonardo's	434
IV. Die „Algebra" des Initius Algebras ad Ylem Geometram magistrum suum (29 Fig.)	435—609
Einleitung	437—448
Prologus in Algebram	449—450
Initii Algebrae, viri clarissimi, ad summum mathematicum eo tempore geometren Ylem prologus	450—467
Primus liber: De octo aequationibus et demonstrationibus earundem	498—499
Secundus liber: De quantitatibus additis et diminutis sive pregnantibus	499—523
Tertius liber: De numeris rationalibus communicantibus atque surdis trium tractatuum	523—607
Primus tractatus de hauriendis lateribus numerorum rationalium	523—545
Secundus tractatus de communicantibus numeris	545—573
Tertius tractatus de numeris surdis	574—607
Quartus liber: De binomiis atque recisis, simul et omnium irrationalium numerorum, quorum sunt tredecim	607—609
Namensverzeichnis	610—611
Sachregister über Heft XII und XIII der Abhandlungen	612—627

III.

DIE „PRACTICA GEOMETRIAE“ DES LEONARDO MAINARDI AUS CREMONA.

Die Artis Metrice Practice Compilatio des Leonardo Mainardi da Cremona.

Einleitung.

Von dieser Abhandlung fand ich den Text im *Codex Philos. 46* der Universitätsbibliothek zu Göttingen, wo sie in italienischer Sprache und zwar in Venetianischem Dialekte abgefasst ist. Fürst Boncompagni besass zwei Handschriften desselben Werkes mit lateinischem Texte, welche in der zweiten Ausgabe des Verzeichnisses durch Enrico Narducci die Nummern 302 und 303 tragen. Die Handschrift *Cod. philos. 46 Götting.* konnte ich in der hiesigen Gymnasialbibliothek benutzen, die beiden Handschriften Boncompagni's durfte ich durch die Güte ihres derzeitigen Besitzers, des Herrn Antiquariatsbuchhändlers Halle in München in meiner Wohnung einsehen und mit dem Wortlaute der italienischen Ausgabe vergleichen. Diesem Herren sowohl als der Verwaltung der Königl. Universitätsbibliothek zu Göttingen sage ich für ihre grosse Liberalität hierdurch meinen ganz ergebensten Dank.

Der *Codex Philos. 46 Götting.* ist eine Foliohandschrift von 50 Blättern, von denen Blatt 42—47 und 49—50 unbeschrieben, und deshalb wohl bei der Zählung der Blätter nicht mit eingerechnet sind, so dass das Blatt 48 die Nummer 42 erhalten hat. Auf dem untern Rande des ersten Blattes steht die Notiz: *„Ex Bibliotheca G. W. Zapff Aug. Vindel. 1784“*, auf dem letzten die weitere: *„Nassete Zuan vigenzo del 1502 adj 18 zugno de sabato a hore 9.“* Gebunden ist er in Holzdeckel mit gepresstem Lederrücken. Die Handschrift stammt aus dem Jahre 1488 und enthält:

Blatt 1^r—29^r unsere Abhandlung.
„ 29^v—30^v eine *Tabula Sinus* für den Durchmesser 120.
„ 31^r—32^r eine *Tabula Sinus* für das Verhältnis 22 : 7.
„ 32^v—34^r eine *Tabula Sollis(!)*, d. h. Tafel der Tageslängen für die einzelnen Tage des Jahres.
„ 34^v ist leer.
„ 35^r—41^v eine Reihe von weiteren geometrischen Aufgaben und Notizen, welche auf
„ 48^r und ^{v}, das mit 42 bezeichnet ist, fortgesetzt werden.

Von den *Codices Boncompagni* ist No. 302 die ältere, jedoch ist die Angabe des Katalogs, sie stamme aus dem 14. Jahrhundert, nicht richtig, da der Verfasser erst in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts gelebt hat. Es ist eine Pergamenthandschrift von 31 Blättern, welche mit einem

Vor- und einem Nachblatt zusammengebunden sind. Sie beginnt erst auf Blatt 3[r] mit den Worten

„*Leonardi Cremonensis artis metrice practice compilatio. Primus tractatus.*“

Diese Abhandlung schliesst Blatt 27[r]: „*Quae vero sit proportio, alibi dixi demonstrativa conclusione fere. Deo Gratias. Amen.*“

Auf Blatt 28[a]—29[b] folgen dann dieselben beiden Sinustafeln wie in *Cod. Philos. 46 Götting.*

Der *Codex Boncompagni 303* ist dagegen eine Papierhandschrift von 24 Blatt aus dem 15. Jahrhundert. Sie beginnt sofort auf Blate 1[r] wie *Cod. Bonc. 302.* Darüber aber steht die Bemerkung:

„*Leonardi Maynardi Astronomi et Physici, ac Mathematici Opus. Florebat sub anno 1488. Franciscus Arisius in Cremona Litterata fol. 347 Tomo p°.*“

Am Fussende derselben Seite hat dieselbe Hand den Besitztitel verzeichnet:

„*I. C. Io̅his de Sitonis à Scotia Ml̅sis*“,

was auf der Innenseite des hintern Einbandes nochmals wiederholt ist. Aus einer Bemerkung auf Blatt 15[r]

„Virgo Maria | Mater Dei | Ora pro nobis | peccatoribus | Adi 20 Noue[e] 1655 | Bonifacio Aliprandi Ioseffo Aliprandi.“

geht hervor, dass die Handschrift um die Mitte des 17. Jahrhunderts in dem Besitze der beiden Genannten gewesen ist. Nach dem Kataloge gehörte sie vor Boncompagni dem Advokaten Cav. Carlo Morbio in Mailand.

Die Handschrift enthält einzig und allein den Text der *Artis metrice practice compilatio* ohne die Sinustafeln.

Das oben angezogene Werk des Arisius hat den Titel:

„Cremona Literata seu in Cremonensis doctrinis et literariis dignitatibus eminentiores chronologicae adnotationes auctore Francisco Arisio nobilissimae patriae suae ordinum conservatore. Tomus Primus. Parmae MDCCII, typis Alberti Pazzoni et Pauli Montii.“

Es ist die einzige Quelle für das Leben unseres Verfassers, weshalb ich die ihn betreffende Stelle auf S. 347 vollständig mittheile.

„LXXXVIII [1])

Leonardus Maynardus Insignis Astronomus, Physicus et Mathematicus, cuius opusculum M. S. Mediolani servatur, mihi indicatum ab eruditissimo Viro Lazaro Augstino Cotta I. C. amico meo nequaquam satis laudato, cui est initium:

Leonardi Cremonensis Artis Metricae Practice compilatio. Artem Metricam seu Mensurativam occasione quadam prospiciens, cum a multis viderim

1) D. h. 1488. Ich verdanke die Abschrift dieser Notiz der Freundlichkeit des Herrn Antonio Favaro in Padua, der sie mir auf meine Bitte in der dortigen Bibliothek kopierte.

expositam diversis regulis, et figuris, ut compendiose habeatur, deliberavi hac summula praestingere, corrigendo aliqua ab aliis non bene posita, quam quippe tripartior juxta triplam mensurae rationem, videlicet longitudinem, latitudinem et corporeitatem.

Haec est Auctoris Idea, distincta tribus Tract. scilicet

De Mensura Longitudinis,
Latitudinis,
Corporum.

In margine opusculi permultae exstant delineatae figurae Mathematicae et Geometricae.

M. Hieronymus Vida in Act. 2 Orationum adversus Papienses, ubi loquitur de Mathematicis, sic habet. Fuit ante Blasium Leonardus Maynardus, qui suo tempore non tantum inter nostros, sed etiam inter omnes in iis studiis tenuit principatum.

Cavitell. Annal. sub anno 1496."

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die Boncompagni'sche Handschrift 303 diejenige ist, welche hier von Arisius erwähnt wird.

Im Folgenden werde ich den italienischen Text der *Artis metricae practicae compilatio* zum Abdrucke bringen, unter Hinweis an den betreffenden Stellen, wenn der lateinische Text Abweichungen von dem italienischen bietet. Wie man es bei deutschen Texten gewohnt ist, habe ich auch bei diesem italienischen mich genau an den Wortlaut und die Orthographie der einzigen bekannten Handschrift gehalten. Von der *Tabula sinus* gebe ich jedesmal nur die zehn ersten und letzten Zeilen, da aus ihnen die Art der Anordnung und der Berechnung vollständig zu ersehen ist.

Die auf den folgenden Blättern des Manuskripts enthaltenen weiteren geometrischen Bemerkungen habe ich, da sie auch von Interesse sein dürften, ebenfalls zum Abdrucke gebracht. Jedenfalls sind sie von derselben Hand, welche den Text des Leonardo geschrieben hat, jedoch ebenso sicher nicht von dem Verfasser des italienischen Textes. Die Verschiedenheit der Sprache lässt das nicht zu. Dass der italienische Text die Übersetzung des lateinischen ist, nicht umgekehrt, ist mir nicht zweifelhaft, aber der italienische bildet eine verbesserte Ausgabe desselben, wie ich an den betreffenden Stellen in den Anmerkungen nachweisen werde, und deshalb verdient er den Vorzug vor dem lateinischen.

Auch hier habe ich eine deutsche Übersetzung beizugeben um so mehr für nöthig gehalten, als der italienische Text durch den benutzten Dialekt sowohl als die zum Theil sehr veraltete Ausdrucksweise dem Verständnis Hindernisse in den Weg legt.

Leonardi Cremonensis Artis Metrice Practice Compilatio.

Primus Tractatus.

Ben che molti habieno esposita larte metricha ouero mesurativa in diuerse regule, Io me ho deliberato de redurla in picholo volumen, acio che compendiosamente la se possa auere. De la qual arte ne fazo tre parte secondo le tre razone de la mesura, cioe longeza, largeza et corporeitade.[1])

In la longeza sie alteza, profonditade et extensione in longo, doue sia el piano.

La prima se chiama *altimetria,* cioe mesura de alteze.

La seconda *profundimetria,* cioe mesura de profundita.

La terza *planimetria* ouero *longimetria.*

In largeza sie la *superficie.*

E in la corporeitade ouero profonditade sie el *corpo.*

In prima aduncha de la mesura de la longeza, la quale a le tre parte preditte. E perche queste tre parte de la mesura de la longeza possono fir fatte con lo astrolabio, con lo quadrante, ouero con le verge, ouero con le spechi, nomma farsi la profondita de la valle, la quale non insegno a
1v fir fatte con li spechi, impercio de lo | gnomone de lo astrolabio e del quadrante, el quale sie scala de altimetria, primamente e da fir ditto. Unda e da sapere, che lo lado de lo gnomone ouero de lo quadrante in lo astrolabio, el quale comenza da la linea de mezo el celo, ouero de la meza notte, sie lo lado de la *ombra dritta,* e lo lado, el quale incommenza de la linea de lorizon, sie lo lado de *ombra versa.* Ma in de lo quadrante

1) In der lateinischen Fassung lautet die Einleitung folgendermaassen: Artem metricam seu mensurativam occasione quadam prospitiens cum a multis viderim expositam diversis regulis et figuris, ut compendiose habeatur, deliberavi hac summula perstringere, corrigendo aliqua ab aliis non bene posita. Quam quippe tripartior iuxta triplam mensure rationem, videlicet longitudinem, latitudinem et corporeitatem.

Des Leonardo von Cremona Abhandlung über praktische Feldmesskunst.

Erster Traktat.

Obschon viele die Feldmessung oder die Kunst des Messens in verschiedenen Regeln auseinandergesetzt haben, habe ich mich doch entschlossen sie in einem kleinen Bande zusammenzuziehen, damit sie in kompendiöser Form zu haben sei. Ich werde diese Kunst in drei Theilen abhandeln nach den drei Arten des Messens, das ist nach der Länge, Breite und Körperlichkeit.

Zur Länge gehört die Höhe, die Tiefe und die Ausdehnung in der Länge in der Ebene.

Die erste Art heisst *Altimetrie,* das heisst die Messung der Höhe.

Die zweite *Profundimetrie,* das heisst Tiefenmessung.

Die dritte *Planimetrie* oder Längenmessung.

Zur Breite gehört die *Fläche.*

Und zur Körperlichkeit oder der Tiefe gehört der *Körper.*

Zunächst also von der Längenmessung, welche die genannten drei Theile besitzt. Da man nun diese drei Arten der Längenmessung sowohl mit dem Astrolabium und dem Quadrate ausführen kann, als mit Messstangen, oder mit Spiegeln — ausser letzteres bei der Tiefe von Thälern, denn von dieser lehre ich nicht, dass sie mit Spiegeln gefunden werden kann —, so wird zunächst von dem Gnomon des Astrolabs und des Quadranten, das ist von der Scala altimetriae, die Rede sein müssen. Es ist also zunächst zu merken, dass diejenige Seite des Gnomon oder des Quadrates auf dem Astrolab, welche von der Mittellinie des Himmels oder der Mitternacht beginnt, die Seite des *rechten Schattens*[2]) und diejenige Seite, die von dem Horizonte ihren Aufang nimmt, die Seite des *verkehrten Schattens*[3]) ist. Beim Quadranten aber ist diejenige Seite, welche an dem

2) D. i. die Cotangente. 3) Die Tangente

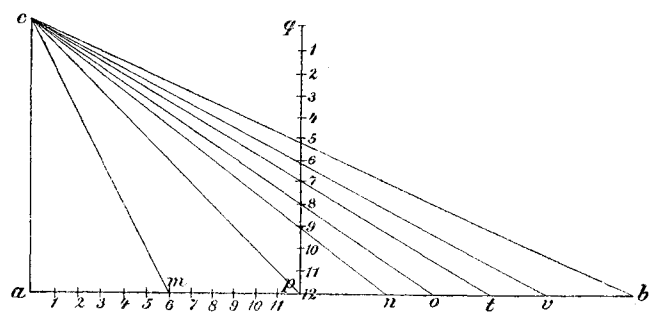
lo lado, el quale acomenza dal lado, doue sono le tauolete, si lo lado de lombra drita, e lo altro lado de ombra versa.

Anchora sapi, che doy lade de gnomone si se diuideno per 12 parte ciascaduna per si, si che el numero duodenario de tutti doy li ladi si fenisse in lo angulo, in del quale i se conzongono, e ciascaduna parte de quelle 12 parte se chiama *ponto de ombra.*

Ma e la *ombra dritta* propriamente la ombra, la quale fa la cosa drizada perpendicularmente sopra lorizon ouero sopra la faza de la terra. Como se *ab* sia orizon ouero pianura de la terra, et *ac* sia la torre, el sole sia *d*, exempli gratia sera *af* ombra drita. La *ombra versa* e quella, la qual fa la cosa ficada perpendicularmente ouero dritamente in la cosa drizada sopra lorizon. Como se in la prima figura la linea *gc* ficada in
2r la linea *ac*, fa | la ombra *ch*, la quale fi dito ombra versa.

E qui sie una regula, che, quanto la ombra drita e maiore, tanto la ombra versa e minore, e le conuerso. Ma perche la ombra drita ouero versa tolta in questo modo non serue al proposito del mesurare, inpercio dechiaro altramente queste ombre.

Adunque in del proposito non propriamente sie la ombra drita la longeza minore ouero equale a la quantitade de la cosa da fir mesuranda, si como he in la seconda figura la linea *ap* equale a la linea *ac* da fir



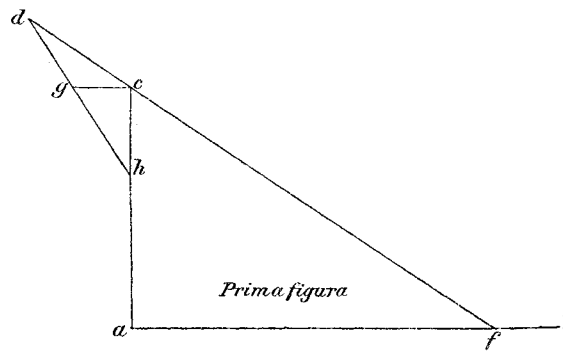
2a figura.

mesuranda, che fi dita ombra drita de la cosa *ac*. Ma la ombra versa sia la longeza maiore cha la quantitade de la cossa da fir mesuranda, si como la linea *ab*, la quale sia ombra versa. Per la ombra drita se sta distante da quela cosa mancho cha la sua alteza ouero tanto; per la ombra versa se sta distante piu. Ele etiandio da notare, che la ombra versa, auegnadio che la sia, como ho ditta, la linea *ab*, niente de meno fi significada per

Rande beginnt, in welchem die Absehen sich befinden, die Seite des *rechten Schattens,* und die andere die Seite des *verkehrten Schattens.*

Ferner ist zu wissen, dass die beiden Seiten des Gnomon jede für sich in 12 Theile getheilt sind, so dass die Zahl 12 auf beiden Seiten in der Ecke sich befindet, in der diese zusammenkommen. Jeder dieser zwölf Theile heisst ein *Punkt des Schattens.*

In eigentlicher Bedeutung ist der *rechte Schatten* derjenige Schatten, den ein auf dem Horizonte oder der Oberfläche der Erde senkrecht errichteter Gegenstand wirft. Wenn etwa *ab* der Horizont oder die Oberfläche der Erde bezeichnet, *ac* den Thurm und *d* die Sonne, so ist z. B. *af* der rechte Schatten. Der *verkehrte Schatten* ist dagegen derjenige, welchen ein Gegenstand wirft, der senkrecht oder unter rechten Winkeln in einem andern Gegenstand befestigt ist, welcher selbst auf der Horizontalebene errichtet ist. Wie wenn in der ersten Figur die Gerade *gc*, die in der Geraden *ac* befestigt ist, den Schatten *ch* bewirkt, der dann der verkehrte Schatten genannt wird.



1a figura.

Hierbei gilt es nun als Regel, dass, je grösser der rechte Schatten erscheint, um so viel kleiner der verkehrte Schatten ist, und umgekehrt. Da aber der rechte oder der verkehrte Schatten, wenn sie in der angegebenen Weise genommen werden, für Zwecke des Messens nicht gebraucht werden können, werde ich die dazu benutzten Schatten anderweitig erklären.

Zu diesem Zwecke ist also der rechte Schatten uneigentlich die Länge, welche kleiner oder gleich der Grösse des Gegenstandes ist, welcher gemessen werden soll, wie z. B. in der zweiten Figur die Gerade *ap* gleich der zu messenden Geraden *ac* diejenige ist, welche der rechte Schatten des Gegenstandes genannt wird. Der verkehrte Schatten aber ist die Länge grösser als die Ausdehnung des zu messenden Gegenstandes, wie etwa die Gerade *ab*, welche den verkehrten Schatten darstellt. Bei dem rechten Schatten steht man also dem Gegenstande näher, als seine Höhe ist, oder gleich weit ab; bei dem verkehrten Schatten steht man weiter ab. Weiter ist zu bemerken, dass, obgleich der verkehrte Schatten, wie ich sagte, die Gerade *ab* ist, er nichts desto weniger durch die Gerade *qp*, die gleich *ap*

la linea *pq* equale ad *ap* et ha *ac*, equidistante *ac*. Ma la linea *pq*, percio che ela fi messa 144[1]), quando e la si diuide per li soy ponti equiualente, cioe chi valeno tanto, come le parte de la linea *ab*, li quali sono *ap*, si como se hae la linea *pq* a le sue parte, cosi la ombra terminata
2v in la linea *ab* se a a la linea *ac*. Ma la linea visuale | ouero razo del sole termina queste ombre, si come le linee *cm*, *cp*, *cn*, *co*, *ct*, *cv*. Adunque le ombre de questo modo non se chiameno propriamente ombre, ma se chiameno distancie de la cossa, auegnadio che altramente se faceno le ombre, si como he, quando lo solle luce, e che la ombra se buta in sul piano.

Presuposito e premeso questo io seruaro questo ordine. Cioe in praticha de ciascheduna concluxione io usaro primamente lo astrolabio ouero lo quadrante, secondariamente le verge, terciamente li speghi.

Ma primamente de la altimetria, secundariamente de la profundimetria, terciamente de la planimetria.

Primamente de la cossa accensibile, secondariamente de la cosa inacensibile.

In tutte doe, quando tu usaray lo quadrante, tiene lo angulo suo, in del quale e lo chiodo, verso sumitade de la alteza e laltra tauoletta verso
3r lo ochio, et in le altre mesure per lo contrario. |

Prima conclusio. A volere mesurare una alteza de una torre, ouero di alcuna altra cosa acensibile, cioe ala quale se posse andare, apreso la quale cossa sia uno medesimo piano, onda he coluy, che vole mesurare, prima el te conuene vedere la cima de quella alteza, che tu voy mesurare, per quelle doy buse de la alidada de lo astrolabio ouero per quelly de lo quadrante, si che lalidada ouero lo filo, chie perpendiculo del quadrante, sia apunto sopra lo otauo, che e sopra li 45 gradi in lo astrolabio ouero in del quadrante. Andagando soto a quella cosa, che voy mesurare, ouero alingando te da la ditta cossa, si che aponto tu vedi, como e ditto di sopra, stagando firma la alidada overo lo filo del quadrante sopra li 45 gradi. Fatto questo, notta el logo, onde chada el perpendiculo che lo centro del astrolabio a terra ouero dal chiodo del quadrante, e poy mesura, quanto e dal luogo, onda el chade a tera, fina a la cosa, che tu voy mesurare: tanto e alta quella tore ouero altra cosa, quanto e dal logo, onde chade el filo, fino a quela cosa, azon-

---

1) Dass diese Anschauung auf einem Irrthum beruht, ist augenscheinlich. Die 144 ist das Quadrat des ganzen Schattens, und drückt sich in der hier verlangten Division das bekannte Gesetz aus $\mathrm{tg} = \frac{1}{\mathrm{ctg}}$, $\mathrm{ctg} = \frac{1}{\mathrm{tg}}$.

und *ac* und zugleich parallel zu *ac* ist, dargestellt wird. Wenn aber die Gerade *pq*, welche zu diesem Zwecke gleich 144 gesetzt wird[1]), durch ihre entsprechenden Punkte dividiert wird, das heisst, die ebensoviel gelten als die Theile der Geraden *ab*, welche auf *ap* liegen, so verhält sich der auf der Geraden *ab* begrenzte Schatten zu der Geraden *ac*, wie sich die gerade Linie *pq* zu ihren Teilen verhält. Diese Schatten aber begrenzt die Sehlinie oder der Sonnenstrahl in der Art, wie die Geraden *cm*, *cp*, *cn*, *co*, *ct*, *cv*. Die auf solche Art genommenen Schatten heissen eigentlich nicht Schatten, sondern werden Abstände von dem zu messenden Gegenstande genannt, wenn sie auch in anderer Weise Schatten sind, wie dann, wenn die Sonne scheint und der Schatten auf die Erde geworfen wird.

Dies vorausgesetzt und vorangeschickt, werde ich folgende Ordnung festhalten. Bei der Auflösung jeder Aufgabe nämlich werde ich zunächst das Astrolab oder den Quadranten benutzen, an zweiter Stelle Messstangen, an dritter Spiegel.

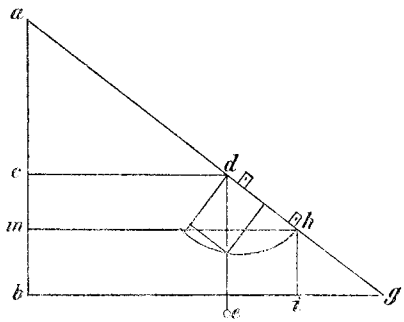
Ich werde aber zuerst vom Höhenmessen, zu zweit vom Tiefenmessen, zu dritt vom Ebenenmessen handeln.

Zuerst von der Höhenmessung zugänglicher, zu zweit von der unzugänglicher Gegenstände.

Bei diesen allen beiden halte man bei Benutzung des Quadranten diejenige Ecke desselben, in welcher sich der Stift (an dem das Bleiloth hängt) befindet, gegen die Spitze der Höhe und die andere Absehe gegen das Auge, bei den anderen Messungen aber umgekehrt.

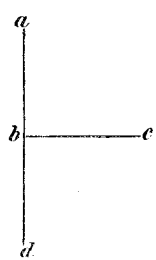
Erste Aufgabe. Will man die Höhe eines Thurmes oder irgend eines andern zugänglichen Gegenstandes messen, das heisst eines solchen, an welchen man herangehen kann, und es steht dieser Gegenstand in derselben Ebene, in welcher derjenige sich befindet, der messen will, so muss man zunächst die Spitze der Höhe, welche zu messen ist, durch beide Absehen der Alhidade des Astrolabs oder die des Quadranten so einvisieren, dass die Alhidade oder der Faden, der das Bleiloth des Quadranten trägt, genau auf den Oktanten, das ist auf 45 Grad, des Astrolabs oder des Quadranten fällt, indem man sich dem Gegenstande, den man messen will, nähert, oder sich von demselben entfernt, bis man, wie oben schon gesagt ist, die Spitze sieht, indem die Alhidade oder der Faden des Quadranten auf 45^0 feststeht. Ist das geschehen, so bestimme man den Punkt auf der Erde, auf welchen das Loth vom Mittelpunkte des Astrolabs oder dem Stifte des Quadranten fällt, und dann messe man, wie weit es vom Punkte, wo es auf die Erde fällt, bis zu dem Gegenstande ist, den man messen will: so hoch ist dann der Thurm oder der andere Gegenstand, als die Entfernung von dem Orte, auf den der

zando tanto, quanto he dal centro de lo astrolabio a tera ouero dal angulo del quadrante, doue lo chiodo del perpendiculo, como apare qui per exemplo
3v in la terza figura, in la quale he signato el piano per *fb*, la tore | sia *ab*, la linea del centro de lo astrolabio ouero de lo angulo del quadrante, chi e *d*, a la tera sie *de*, la quale e inquale a la linea *bc*. E per quello modo se po fare, se la quantitade de la distancia da lo ochio tuo a la torre ouero dal tuo pede alla cossa, la quale sie *hm* ouero *ib*, tu gagiungessi la quantitade da lo ochio tuo a la terra, la quale sie *hi*, ouero se tu tolessi la quantita de la tua alteza de dietro da ti segnata per *gi* a la terra: in tute queste se viede, che *gb* et *ba* sono inqualle. Anchora *ib* et *ma* et *mh*, anchora *cb*, *ed*, *ca* sono equali. Ma piu certo se po fare per la linea *de*, perche piu certo po fir mesurada cum la linea *eb*, perche lo ochio non sta fermo.



3a figura.

Questa medesima si po prouare con due verge, quando tu staghi tanto da lonzo de la cosa, quanto e la alteza de la cosa da fir mesurada da lo ochio tuo. E per questo modo, cioe toglie una verga mazore de ti, in la quale ficha una altra verga perpendichular in del logo, in del qualle la verga mazore de ti avanzi lalteza, in si fatto modo, che la verga ficata sia inquale a la quantitade de la verga, chi e mazore de ti, dal logo, doue le inficha, in fina a la sumitade de la verga mazore de ti, si como apare per exemplo in la quarta figura
3r la linea *ad* | auanza lalteza dal ochio tuo in su a la terra, chi e *db*, in del quale logo *b* infica una verga *bc* inquale de *ab*. E con quello instrumento fatte in anti e in dietro ficandolo a pionbino, che per *ca* tu vedi la cima de la cosa da fir mesuranda, tegnendo lochio al *c*. E poy mesura la distantia, che tra lastrumento, doue lo ponto *c*, a la tore, e agiungessi la quantitade *db*, la quale e inquale a la linea *ch*, et aueremo *kf*, la quale e lalteza, che noy circhiamo, como apare in la quinte figura.

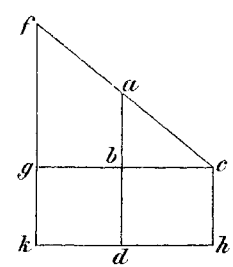


4a figura.

Anchora se puo fare questa medesima con una tauola stagando tanto lonze de la tore, che voy mesurare, quanto e lalteza de la cosa da lo ochio tuo in su, cioe a comenciando da lo ochio a mesurare

Faden fällt, bis zu jenem Gegenstande, wenn man soviel hinzufügt, als die Entfernung des Mittelpunktes des Astrolabs oder der Ecke des Quadranten, wo der Stift des Bleilothes sich befindet, von der Erde beträgt, wie es beispielsweise in der dritten Figur zu sehen ist. In ihr sei die Ebene durch *ef* bezeichnet, der Thurm sei *ab*, die Gerade vom Mittelpunkte des Astrolabs oder der Ecke des Quadranten, der *d* heisse, nach der Erde sei *de*, die gleich der Geraden *bc* ist. Man könnte bei dieser Methode auch so vorgehen, dass man die Grösse der Entfernung vom Auge bis zu dem Thurme, oder von den Füssen bis zu dem Gegenstande, die *hm* oder *ib* ist, zu dem Abstande des Auges vom Erdboden hinzufügt, oder dass man den Betrag seiner eigenen Grösse hinter sich auf der Erde abtrüge, sie sei durch *gi* bezeichnet: bei allen diesen sieht man, dass *gb* und *ba* einander gleich sind. Ebenso sind *ib*, *mh* und *ma*, desgleichen *cb*, *ed* und *ca* einander gleich. Viel genauer aber verfährt man vermittelst der Geraden *de*, weil sie und die Gerade *eb* viel genauer gemessen werden kann, da das Auge nicht fest stehen bleibt.

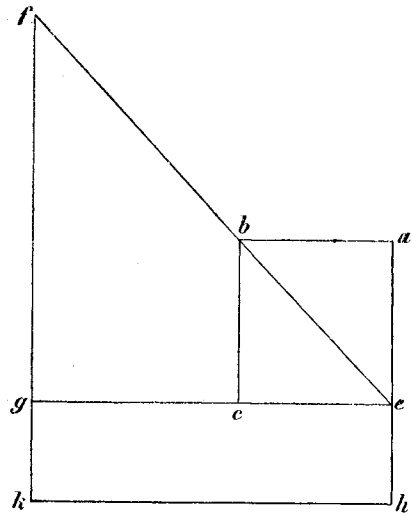
Dieselbe Aufgabe kann man mit zwei Stangen ausführen, wenn man so weit von dem Gegenstande entfernt sich aufstellt, als die Höhe des zu messenden Gegenstandes über dem Auge des Messenden beträgt, und zwar auf folgende Weise. Man nehme nämlich eine Stange, die grösser als man selbst ist, und befestige in ihr senkrecht eine andere Stange in dem Punkte, von welchem aus die Stange, die grösser ist als man selbst, diese Höhe übertrifft in der Art, dass die befestigte Latte gleich der Länge der Latte ist, die grösser als man selbst, von dem Punkte, in dem sie befestigt ist, bis zur Spitze der grösseren Stange, wie z. B. in der vierten Figur ersichtlich ist, dass die Gerade *ad* die Höhe vom Auge bis zur Erdoberfläche, das ist *db*, übertrifft. In diesem Punkte *b* befestige man die Stange *bc* gleich *ab*. Mit einem solchen Instrumente gehe man nun vor- oder rückwärts es immer senkrecht vermittelst Bleiloth aufstellend, bis man über *c* und *a* die Spitze des zu messenden Gegenstandes erblickt, indem man das Auge in *c* hält. Dann messe man den Abstand, der zwischen dem Instrumente, und zwar vom Punkte *c*, und dem Thurme ist, und füge demselben die Länge *db* hinzu, die gleich der Geraden *ch* ist, so erhält man *kf*, das ist die Höhe, die wir suchen, wie in der fünften Figur zu sehen ist.



5a figura.

Man kann das Nämliche auch vermittelst einer Tafel ausführen, indem man so weit von dem Thurme, den man messen will, sich aufstellt, als die Höhe dieses Gegenstandes von der Höhe

fino la tore. La quale tauola sia quadrangula ouero rectangula, cioe quadra, e sia drita da lo ochio tuo a lo orizonte, cioe a uno segno, che tu habi preso in la cosa, che tu voy mesurare. De la quale tauola lo lado equidistante a lo orizonte, cioe lo lato de sopra, sia segnato de tanta quantitade, quanta he la perpendiculare ouero la largeza de la tauola, come apare in la sesta figura, in la quale e signata una tauola per *abce*, la linea *ab* sie equale a la linea *ae*, chi e la perpendiculare cioe la largeza de la tauola. Agiungi adunque la longeza *ge*, la quale sie da lo ochio tuo | a la torre, la quale longeza sie equale ha *gf*, chi e pur lalteza de la cossa. Agiungendeli *eh*, chi e la alteza, da lo ochio a la terra, et aueray *kf*, la qual sie tutta la alteza de la cossa, cioe torre etc.



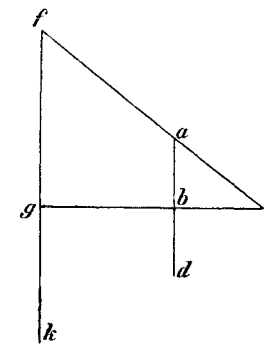
6a figura.

Secunda conclusio. Quando la cossa da fir mesuranda non e in uno medesimo piano con li toy piedi, ouero chele in uno piano piu basso cha li toy piedi, ouero chele piu alta cha lo ochio tuo. Se le in uno piano piu basso, guarda in la cosa, che voy mesurare, uno termine ouero uno segno per la linea equidistante a lo orizonte. Questa aueray per lo astrolabio, quando la soua regula ouero la lidada sera sopra la linea de lo orizonte, chi e la linea de la mita del tondo. Questa linea haueray per lo quadrante, quando lo perpendiculo sera sopra la linea de la alteza, cioe sopra quello lato del quadrante, in lo quale non sono li tauole. Questo aueray per lo instrumento de le verge, guardando per *c* et *b*; etiando per lo instrumento de la tauola guardando per *c* et *e*. E alora a la linea *gf* agiungeli la linea *kg*, et haueray la alteza *kf*, como apare in la septima figura.

Se la cosa, che tu voy mesurare, he in uno logo piu alto cha lo ochio tuo, benche alafiada el ocore, che questo se possa fare per lo otauo ouero per li 45 gradi, ouero con lo instrumento de le verge, guar-
5r dando per *c* et *a*, ouero per la | tauola quadrata guardando per *e* et *b*, niente de mancho, perche quello sempre non se puo fare, questa partichula ouero chapitulo sara tratado inmediate, como vederay qui per lordine.

des Auges aus gemessen ist, das heisst, indem man von dem Auge aus nach dem Thurme hin zu messen anfängt. Diese Tafel sei ein rechtwinkliges Viereck, das heisst ein Quadrat, und sie sei vom Auge aus horizontal gerichtet, nämlich nach einem Zeichen, das man an dem Gegenstande, der gemessen werden soll, angebracht hat. Die dem Horizont parallele Seite der Tafel, nämlich die obere Seite, sei von derselben Grösse, welche die senkrechte Seite oder die Breite der Tafel besitzt, wie in der 6. Figur zu sehen ist, in der die Tafel mit *abce* bezeichnet, und wo die Gerade *ab* der Geraden *ae* gleich ist, die die senkrechte Seite, nämlich die Breite der Tafel, darstellt. Man suche nun die Länge *ge*, die von dem Auge bis zum Thurme sich erstreckt; diese Länge ist dann gleich *gf*, die zugleich die Höhe des Gegenstandes ist. Hierzu füge man *eh*, das ist die Entfernung von dem Auge bis zur Erdoberfläche, und man erhält dann *ke*, die Gesamthöhe des Gegenstandes, nämlich des Thurmes.

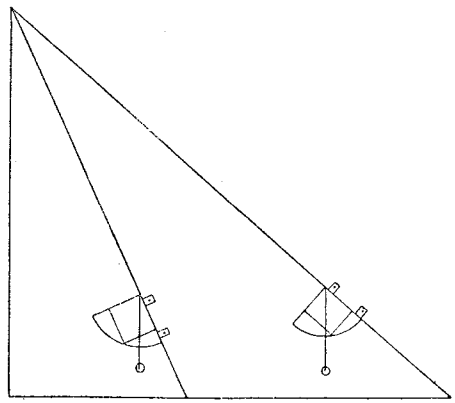
Zweite Aufgabe. Wenn der zu messende Gegenstand sich nicht in derselben Ebene mit den Füssen des Beobachters befindet, so ist er entweder in einer tiefern Ebene, als die Füsse sind, oder in einer, welche höher gelegen ist, als das Auge. Befindet er sich in einer tiefer gelegenen Ebene, so betrachte man in dem Gegenstande, den man messen will, eine Marke oder ein Zeichen, das in der Horizontalebene sich befindet. Diese findet man vermittelst des Astrolabs, wenn man das Messlineal oder die Alhidade auf die Horizontallinie einstellt, das ist auf die Halbierunglinie der Rundung. Man erhält diese Linie mittelst des Quadranten, wenn das Bleiloth sich auf der Höhenlinie befindet, das ist auf der Seite des Quadranten, die die Diopter nicht enthält; man erhält sie vermittelst des aus Stangen bestehenden Instrumentes, wenn man von *c* über *b* visiert, ebenso mittelst des Tafelinstrumentes, wenn man von *c* über *e* beobachtet. Zu der Länge *ef* füge man dann noch die Gerade *kg* hinzu, und man erhält dann die Höhe *kf*, wie in Figur 7 zu sehen ist.



7a figura.

Wenn es sich aber auch trifft, falls der Gegenstand, den man messen will, an einem höhern Orte als das Auge des Beobachters sich befindet, dass man dann die Messung mit dem achten Theile des Kreises oder 45° ausführen kann, oder mit dem Stangeninstrument, indem man über *c* und *a*, oder mit der quadratischen Tafel, indem man über *e* und *b* visiert, so soll doch, weil sich das nicht immer ausführen lässt, dieser Gegenstand oder dieses Kapitel sogleich im Folgenden abgehandelt werden, wie man hier der Reihe nach sehen kann.

Terza conclusio. Altramente ouero per uno altro modo se puo mesurare una alteza acesibila. Prima guarda la cima de la cosa, che tu voy mesurare, per tuti doy le busi de la lidade de lo astrolabio ouero del quadrante, e notta le ponti, che da la lidade in lo astrolabio, ouero quelli, che da lo perpendiculo del quadrante. Le quali ponti, se li serano ponti de ombra drita, alora multiplica la distantia, chi e tra lo perpendiculo e la torre, che tu voy mesurare, per 12, et quello che ne vene, partilo per quelli ponti, che tu ha habuto, e quello, che ne vene per quella diuisione de li ditti ponti, zonzeli la distantia, la quale e tra lo filo da lo centro de lo astrolabio ouero da lo angulo del quadrante a la tera, como he ditto de sopra, et haueray la altezza, che tu cerchi. Se li serano ponti de ombra versa, questo se puo fare per doy modi. Prima: Multiplica la distantia, che tra ti e la torre, per quelli ponti, che ne venuto, et quello, che ne vene, partilo per 12, e quello, che ne venuto per quella diuisione, cioe per 12, zonzeli la distantia dita di sopra, et haueray quella
5v alteza. | Ouero: Parti 144 per quelli ponti de la ombra versa, che tu hay habuto, et serua quello, che ne vene. Poy multiplica la distantia, che tra lo perpendiculo e la torre, per 12, et quello, che ne vene, partilo per quello, che tu hay seruato, et a quello, che ne vegnera per questa diuisione, zonzeli quella distantia ditta de sopra, et hauera la alteza, che tu circhi, como apare in la ottaua figura.

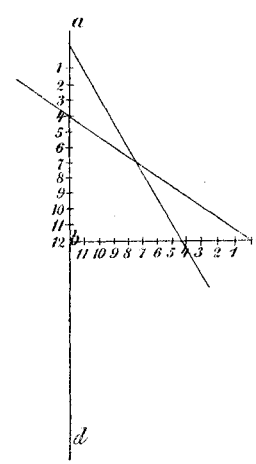


8a figura.

Se tu volessi questa medesima alteza per lo instrumento de le verge, sapi prima, chel te conuene partire tute doe queste linee ouero verge, cioe *cb* et *ba*, per 12, achomenziando al ponto *c* et a lo ponto *a*, et se fenisa in lo angulo *b*. Et lo lato *cb* si da li ponti de la ombra recta, e lo lato *ab* si da li ponti de la ombra versa. Et quando tu he lonze da la torre meno, che non he la soua alteza, te conuene guardare per lo ponto *a* la cima de la torre per li ponti de la linea *cb*; e quando ti li he piu lonze, che non he la soua alteza, el te conuene guardare per lo ponto *c* et per li ponti de la linea *ab* la cima de la torre. Et acio che tu si piu certo in li ponti, tu poy metere doe regule ouero doe linee simile a la regula de lo astrolabio in tuti doy li ponti,

Dritte Aufgabe. Eine Höhe, an welche man herankommen kann, lässt sich auch anders oder auf andere Art messen. Zuerst visiere man die Spitze des Gegenstandes, den man messen will, durch beide Absehen der Alhidade des Astrolabs oder des Quadranten und merke sich die Punkte, welche die Alhidade beim Astrolab, oder die, welche das Bleiloth des Quadranten angiebt. Sind diese Punkte solche des rechten Schattens, so multipliciere man den Abstand, der zwischen dem Lothe und dem Thurme ist, den man messen will, mit 12, und theile das Ergebnis durch die gemerkten Punkte, und das, was bei dieser Division durch genannte Punkte herauskommt, füge man zu dem Abstand hinzu, der zwischen dem Lothe vom Mittelpunkte des Astrolabs oder von der Ecke des Quadranten und der Erde ist, wie wir oben gesagt haben, und hat dann die Höhe, welche man sucht. Sind es aber Punkte des verkehrten Schattens, so kann man auf zwei Arten vorgehen. Erstens: Multipliciere den Abstand zwischen dir und dem Thurme mit den Punkten, die man beobachtete, und theile das Ergebnis durch 12, und das, was aus der Division, nämlich durch 12, herauskommt, addiere man zu dem oben genannten Abstand, so erhält man so die fragliche Höhe. Oder: Theile 144 durch obige Punkte des verkehrten Schattens, die man beobachtet hat, und merke das Ergebnis. Darauf multipliere man den Abstand zwischen dem Lothe und dem Thurme mit 12 und dividiere das Produkt durch das oben Gemerkte und zu dem Ergebnis dieser Division füge man denjenigen Abstand hinzu, von dem wir oben gesprochen haben, so erhält man dadurch die gesuchte Höhe, wie in Figur 8 zu sehen ist.

Will man die fragliche Höhe mittelst des Stangeninstrumentes finden, so muss man wissen, dass man zunächst beide Linien oder Stangen, nämlich *cb* und *ba* in 12 Theile theilen muss, indem man von den Punkten *c* und *a* anfängt und in der Ecke *b* endigt. Die Seite *cb* giebt dann Punkte des rechten Schattens, die Seite *ab* Punkte des verkehrten Schattens. Ist man dann von dem Thurme weniger, als dessen Höhe beträgt, entfernt, so muss man von dem Punkte *a* aus die Spitze des Thurmes durch die Punkte der Geraden *cb* einvisieren, und wenn man weiter ab steht, als seine Höhe beträgt, so muss man vom Punkte *c* aus durch die Punkte der Geraden *ab* die Spitze des Thurmes beobachten. Damit man aber in der Bestimmung der Punkte sicherer sei, kann man zwei Lineale oder zwei Linien, die der Alhidade des Astrolabs ähnlich sind, in den beiden Punkten,

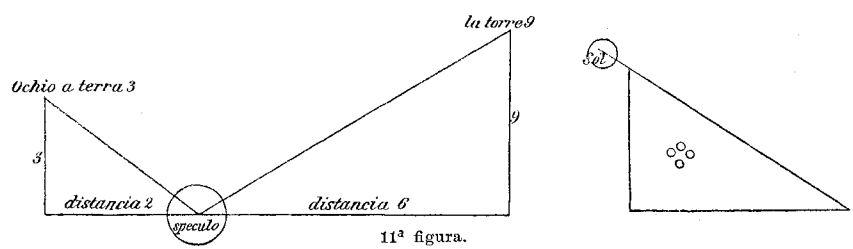


9a figura.

cioe in *c* et *a*, houero che una te fara, la quale tu di metere in *a* guar-
6r dando per quello, | ouero la meteray in *c* guardando per quello medesimo, si come appare in la nona figura. El resto faray, come ho ditto in la parte immediate precedente, cioe multiplicando et diuidendo.

Questa medesima faray cum una tauola quadrata, de la quale tauola lo lato *ad* et lo lato *de* sieno diuisi per 12, si che lo numero de quela diuisione per 12 comenzi dal ponto *a* e dal ponto *e*, e se fenisa in lo ponto *d*. E lo lato *ac* sia verso ti, e lo lato *de* sia lo lato oposito a ti, et lo lato *ad* sia lo lado de sopra, et alora lo lado *ad* si da li ponti de la ombra drita, e lo lado *de* da li ponti de la ombra versa. Poy in lo ponto *c*, meti una linea simile a la lidada del astrolabio. Et sia lo lado *ad* equidistante a lo orizonte, cioe sia equo a lo lado, onda tu ha fatto lo orizonte, si como apare in la 10ª figura. El resto faray, como ha dito da prima.

Anchora questa medesima faray cum uno spechio. Pone lo spechio in plano in logo, che fazandole in ante et in dietro tu vedi la cima de ta torre da fir mesurada in del mezo del spechio. E la distancia, chi e tra lo mezo del spechio e la torre, multiplica per la quantita, chi e da lo ochio tuo a la terra, et quello, che ne viene, partilo per la distantia
6v chi e | tra le piedi tuy el mezo del spechio: et vegnera la alteza, che tu circhi, de la torre, come apare in la 11ª figura.



11ª figura.

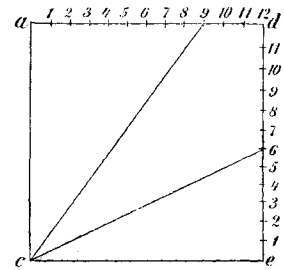
Anchora questa medesima faray cum una verga de certa quantitade de mesura cum lo sole lucente. Stara cossi. Multiplica la quantitade de la ombra de la torre per la quantitade de la verga, et quella multiplicatione partila per la quantita de la ombra, che fa quella verga. Et quello, che ne viene, sera la alteza da la torre, che tu circhi, como apare in la figura signata per 4 o°o°o. [1])

Questa medesima faray cum la sole lucente, quando la lidada de lo astrolabio, la quale e la sua riga, ouero quando lo perpendiculo del quadrante chade sopra li 45 gradi, ouero per lo instrumento de le verge,

1) Dieser Abschnitt fehlt in der lateinischen Übersetzung.

nämlich in *c* und *a* befestigen, oder es thut auch eine, die man in *a* befestigt, wenn man von hier aus beobachtet, oder auf *c* aufsteckt, wenn man durch ihn visiert, wie man in Figur 9 sehen kann. Im übrigen verfährt man so, wie wir in dem unmittelbar vorhergehenden Paragraphen gesagt haben, nämlich multiplicierend und dividierend.

Dasselbe kann man auch mit der quadratischen Tafel ausführen, bei der die Seiten *ad* und *de* jede in 12 Stücke getheilt sind, so dass die Nummern der Theilung durch 12 in den Punkten *a* und *e* anfangen und im Punkte *d* endigen. Die Seite *ac* sei nach dir gerichtet, die Seite *de* die dir gegenüberliegende, die Seite *ad* die obere Seite. Dann giebt die Seite *ad* die Punkte des rechten Schattens, und die Seite *de* die Punkte des verkehrten Schattens. Nun stecke man auf den Punkt *c* ein Lineal ähnlich der Alhidade des Astrolabs, und es sei die Seite *ad* parallel dem Horizonte, d. h. sie sei gleich der Seite, welche man zur Horizontalen gemacht hat, wie Figur 10 zeigt. Das Übrige macht man, wie zuerst gesagt worden ist.



10a figura.

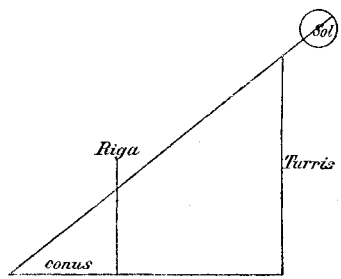
Dieselbe Aufgabe kann man auch vermittelst eines Spiegels auflösen. Man lege den Spiegel auf die Ebene an einen Ort so, dass man, indem man sich vor- oder rückwärts bewegt, die Spitze des zu messenden Thurmes in der Mitte des Spiegels erblickt. Den Abstand, der zwischen der Mitte des Spiegels und dem Thurme enthalten ist, multipliciere man mit der Länge der Entfernung des Auges bis zur Erde, und das Ergebnis theile man durch den Abstand zwischen dem Fusspunkte des Messenden und der Mitte des Spiegels, dann bekommt man die Höhe des Thurmes, die man sucht, wie in Figur 11 zu sehen ist.

Das Nämliche kann man auch mittelst einer Stange von bestimmter Länge ausführen, wenn die Sonne scheint. Es geschieht das so. Man multipliciere die Grösse des Schattens des Thurmes mit der Länge der Stange und theile dieses Produkt durch die Länge des Schattens, den die Stange wirft: das Ergebnis wird die Höhe des Thurmes sein, wie in der Figur zu sehen ist, welche mit vier o°o°o bezeichnet ist.[1])

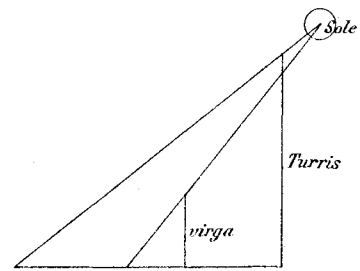
Dasselbe kann man auch durchführen, wenn die Sonne scheint, sobald die Alhidade des Astrolabs, die sein Visierlineal ist, oder sobald das Bleiloth des Quadranten auf 45° fällt, oder mit dem Stangeninstrument, sobald der Schatten des Punktes *a* auf den Punkt *c* fällt,

quando la ombra del ponto *a* chade sopra el ponto *c*, ouero per la tauola, quando lombra del ponto *b* chade sopra el ponto *e*: allora e tanto la alteza de la torre, quanto e quella sua ombra. Ma se la ombra chade in altro locho cha su li 45 gradi, nota el numero de li ponti, e se li sera ponti de ombra drita, alora multiplica la quantitade de lombra de la torre per 12, e quello, che ne vene, partilo per el numero de li
7r ponti, e aueray la alteza de la torre. | Ma se li ponti serano ponti de ombra versa, multiplica la quantitade de la ombra de la torre per quelli ponti, el quello, che ne viene, partilo per 12, et aueray la alteza de la torre. Anchora altramente poy fare, quando tu ay li ponti de la ombra versa. Parti 144 per quelli ponti, e quello, che ne viene, serualo. E poy multiplica la quantita ⟨de lombra⟩ de la torre per 12, e quelo, che ne viene, partito per quelo che tu seruasti, et aueray la alteza de la torre come apare in la 12ª figura.

Questa medesima faray cum una verga lucendo el sole per duy modi. El primo sie: driza una verga a piombino sopra la terra apreso al termine de lombra per si fato modo, che una parte de la verga cada in lombra e laltra fora de la umbra, e notto el logo, doue la umbra tocha la verga. Alora multiplica la quantita de la ombra de la torre per la quantita de la verga, la qual chade in la umbra, e quello, che ne viene, partilo per la quantita del umbra, la quale e tra el cuono de la umbra de la torre e la verga, et haueray la alteza de la torre, como apare in la 13ª figura.



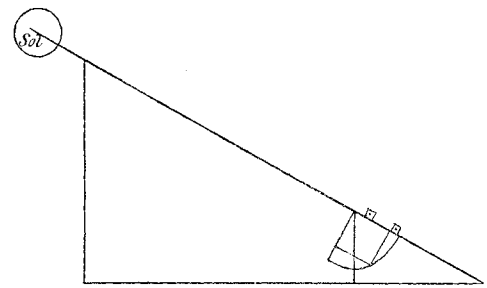
13ª figura.



14ª figura.

El secundo modo sie: a multiplicare la quantitade de la umbra de la torre per la quantita de la verga, e quello, che ne vene partilo per la umbra de la verga et aueray la alteza de la torre, como apare in la
7v 14ª figura. Ma sapi, che le triangoli de le umbre, | de la torre e de la verga sono proportionali, auegnadio che la descripcione de la 14ª figura mostra a contrario, perche la distancia de la torre e de la verga e nulla per rispeto del corpo del sole.

oder vermittelst der Tafel, sobald der Schatten des Punktes *b* auf den Punkt *e* fällt: dann ist die Höhe des Thurmes gleich der Länge seines Schattens. Wenn aber der Schatten auf eine andere Stelle als auf 45° fällt, so merke man die Zahl seiner Punkte. Sind das dann Punkte des rechten Schattens, so multipliciere man die Schattenlänge des Thurmes mit 12 und dividiere das Ergebnis durch die Zahl der Punkte, dann erhält man die Höhe des Thurmes. Sind es aber Punkte des verkehrten Schattens, so vervielfache man die Schattenlänge des Thurmes mit diesen Punkten und dividiere das Produkt durch 12, dann hat man die Höhe des Thurmes. Hat man Punkte des verkehrten Schattens, so kann man auch anders verfahren. Man theile 144 durch diese Punkte und merke sich den Quotienten. Dann multipliciere man die Schattenlänge des Thurmes mit 12 und dividiere das Ergebnis durch den oben gemerkten Quotienten, so erhält man die Höhe des Thurmes, wie in Figur 12 zu sehen ist.



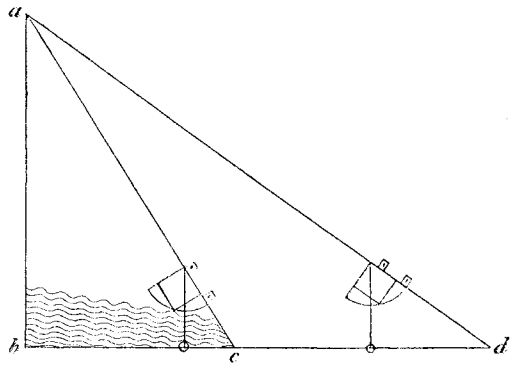
12a figura.

Dasselbe kann man auch auf doppelte Weise vermittelst einer Latte finden, wenn die Sonne scheint. Die erste Art ist: Man errichte eine Stange nach dem Bleiloth auf der Erde am Ende des Schattens in der Art, dass ein Theil der Stange in den Schatten fällt, der andere aus ihm herausragt, und bezeichne den Punkt, in welchem der Schatten die Stange berührt. Dann vervielfache man die Schattenlänge des Thurmes mit dem Stücke der Stange, das in den Schatten fällt, und das, was herauskommt, theile man durch die Schattenlänge, welche zwischen der Spitze des Schattens des Thurmes und der Stange liegt, dann erhält man die Höhe des Thurmes, wie es Figur 13 zeigt.

Die zweite Art ist, dass man die Schattenlänge des Thurmes mit der Länge der Latte multipliciert und das Ergebnis durch den Schatten des Stange dividiert, dann erhält man die Höhe des Thurmes, wie in Figur 14 zu sehen ist. Man beachte aber, dass die beiden Schattendreiecke des Thurmes und der Stange ähnlich sind, wenn auch die Zeichnung der 14. Figur das Gegentheil zeigt, weil die Entfernung des Thurmes und der Stange gegen die des Sonnenkörpers nichts ist.

Quarta conclusio. De re inaccessibili.

Quando tu voray mesurare una alteza, doue non si possa andare, apreso ambi prediti astrumenti vedi prima la sumitade de la torre per tuti doy li busi de lo astrolabio ouero del quadrante, et etiamdio lo numero de li ponti, e similmente nota el logo, doue chade el perpendiculo, che e pichato nel centro de lo astrolabio ouero del quadrante. E poy in uno altro logo fa lo simigliante, e nota la distantia de li doy termini e la diferentia de li ponti. Ma habi questa auertentia ne li ponti, che quando tu haueray li ponti de la umbra versa, tu debi partire 144 per lo numero de li ponti, che te aduene. Alora la distancia de li doy termini multiplichela per 12, e quello, che ne vene, partilo per la diferentia de li ponti, et aueray la alteza de la torre. Esempli gratia la torre sie *ab*. Quando tu e in lo termine *c*, tu ay 10 ponti de ombra drita, e quando tu sey in lo termine *d*, tu ay 9 ponti de umbra versa, per li quali ponti 9 partisse 144, et aueray 16 ponti, de li quali
8r trane 10, che tu aueui | in termine *c*, e rimane 6 ponti. Da poy li piedi, che tra el *c* et el *d*, chi e 20, multiplicali per 12, e sera 240, li quali debi partire per 6 ponti, che tu seruasti, et aueray 40 piedi, ali quali agiugne la alteza dal centro de lo astrolabio ouero del quadrante a la tera, et haueray la alteza de la torre, come apare in la 15a figura.



15a figura.

Questo medesimo faray cun linstrumento de le verge, ouero cun la tauola, stagando in doy luogi, come e ditto denanzi, cioe in *c* et in *d*, perche aueray ponti diuersi, e fa in tuto, como e ditto denanzi.[1])

Ma se nuy non potramo alongarse ne approprinquarle a la torre, driza una verga perpendichulare sopra lo ponto *c*, sera *ch*, inquale a lo *bn*, equidistante da *ab*, e anchora vedi il ponto *a* per *h*, como primo vedesti per *c*, e poy multiplicha *ch* per li minori ponti, e quelo, che ne viene, partilo per la diferentia de li ponti abuti la prima et la seconda volta, et hauerai *na*. Adunque aueray *ba*. E questo e vero

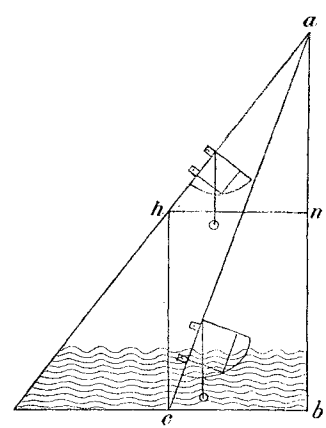
1) Dieser Abschnitt ist in der lateinischen Handschrift erst nach dem hier folgenden geschrieben.

Vierte Aufgabe. Wenn man an den Gegenstand nicht gelangen kann.

Will man eine Höhe messen, an welche man nicht herangehen kann, so visiere man zunächst mit beiden vorgenannten Instrumenten die Spitze des Thurmes durch beide Absehen des Astrolabs oder des Quadranten, und merke zugleich die Zahl der Punkte sowie ebenfalls den Punkt, auf welchen das Bleiloth fällt, das im Mittelpunkte des Astrolabs oder des Quadranten befestigt ist. Darauf thue man dasselbe in einem andern Punkte und bestimme den Abstand der beiden Stationen und die Differenz der Punkte. In betreff der Punkte beachte man aber, dass, wenn man Punkte des verkehrten Schattens beobachtet, man 144 durch die beobachtete Zahl der Punkte dividieren muss. Nun vervielfache man den Abstand der beiden Stationen mit 12, und dividiere das Ergebnis durch die Differenz der Punkte, so erhält man die Höhe des Thurmes. Es sei z. B. der Thurm *ab*. Wenn man im Punkte *c* steht, findet man 10 Punkte des rechten Schattens, und steht man im Punkte *d*, so hat man 9 Punkte des verkehrten Schattens. Durch diese 9 Punkte theile man 144, so erhält man 16 Punkte. Zieht man davon die 10, die man im Punkte *c* gefunden hat, ab, so bleiben 6 Punkte übrig. Nun multipliciere man die Zahl der Fusse, die zwischen *c* und *d* enthalten sind, das ist 20, mit 12, so ist das 240. Das muss man durch die 6 Punkte dividieren, die man sich gemerkt hat, und erhält 40 Fuss. Hierzu füge man die Höhe des Mittelpunktes des Astrolabs oder des Quadranten über der Erde hinzu, so erhält man damit die Höhe des Thurmes, wie in der 15. Figur zu sehen ist.

Dasselbe vollführt man vermittelst des Stangeninstrumentes oder mit der Tafel, wenn man, wie oben gesagt ist, an zwei Orten sich aufstellt, nämlich in *c* und in *d*, da man hierdurch verschiedene Punkte erhält, und man verfährt in allem so, wie es oben gesagt ist.

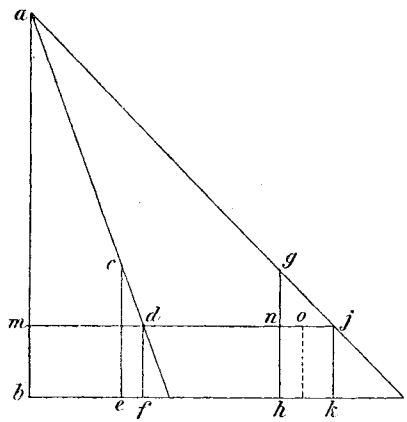
Wenn wir uns aber weder von dem Thurme entfernen können, noch ihm uns nähern, so errichte man im Punkte *c* senkrecht eine Stange, sie sei *ch*, gleich *bn*, parallel zu *ab*, und visiere wieder den Punkt *a* von *h* aus, wie man ihn früher von *c* aus gesehen hat. Dann vervielfache man *ch* mit der kleinern Punktzahl und dividiere das Ergebnis durch den Unterschied zwischen den bei der ersten und zweiten Beobachtung erhaltenen Punkten, und erhält so *na*, also hat man auch *ba*. Dies ist all-



16a figura.

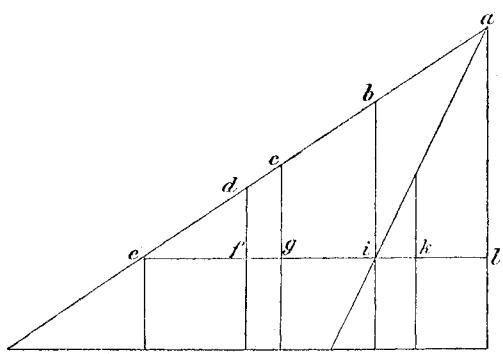
generalmente, ouero che tu volti la ombra versa in drita ouero la drita in versa, attendando che tu usaray lombra drita per versa, mesurando le pianure e le profunditade, e partire sempre 144 per lo numero de li ponti de lombra dritta, la qualli usaray per ombra versa. E questa praticha
8v la vedi in la 16a figura. |

Questa medesima se puo fare cun una verga, la qualle verga sia *ce* in termine *e*, e lo ochio sie *d*. Anchora quela medesima verga sie in del termine *h*, la qual verga sie *gh*, e lo ochio sie *j*. E apare manifestamente, che la linea *jk*, la qual e la statura del mesuradore, e piu distante, cioe piu da lonze de la verga *gh*, cha la linea *df*, che la statura de lo mesuradore ⟨magis distat a virga *gh*, quam *df* distat⟩, de la verga *ce*, adoncha lo excesso, cioe la differentia, sie *oj*. Multiplica la distantia de li oghi, cioe la linea *dj*, per la quantitade de la verga *gh*, la qual quantita sie *gn*, e quelo, che ne viene, dobiamo partirlo per lo excesso de la distancia de li oghi, cioe per la linea *jo*, e a quelo, che ne vene, agiungeui la auanze de la quantita de la verga, cioe la linea *nh*, la quale sie la statura del mesuratore da lochio a la terra, et aueray la alteza de la torre, como apare in la 17a figura.[1])



17a figura.

Questa medesima si puo fare cun uno spechio, in prima vedendo la sumitade de la torre per lo spechio messo in del ponto *a*, si che lochio tuo sia *f*, e la statura tua *fc*; secondariamente vedendo quela medesima sumitade per lo spechio meso in ponto *b*, si che lo ochio tuo sia *e*, e la statura tua sia *ed*. Ed e manifesto, che la secunda distancia da ti a lo spechio sie

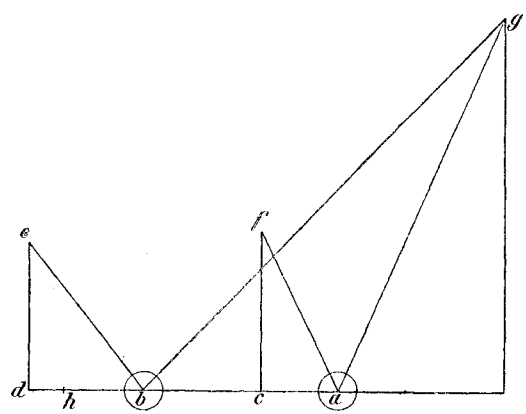


1) In der lateinischen Ausgabe ist hinzugefügt: Huius demonstrationis ratio est, quia *ge, je, ig* sciuntur, ergo *fd* scitur: scilicet sicut *ef* ad *ei* ita *fd* ad *ib*, ergo *ib* scitur. Sed sicut *fd* ad *ib* ita *eg* ad *al*, ergo *al* scitur, sicut patet in 18a figura. — Die Figur ist die nebenstehende.

gemein richtig, ob man den verkehrten Schatten in den rechten, oder den rechten in den verkehrten verwandelt, wenn man beachtet, dass man bei Messung der Ebenen und Tiefen den rechten Schatten statt des verkehrten benutzt, und man immer 144 durch die Zahl der Punkte des rechten Schattens dividieren muss, wenn man ihn als verkehrten Schatten gebrauchen will. Diese Methode sehe man in der 16. Figur.

Das Nämliche kann man mit einer Stange ausführen. Diese Stange sei *ce* im Punkte *e*, das Auge sei *d*. Dieselbe Stange befinde sich darauf im Punkte *h*, es sei die *gh*, und das Auge sei *j*. Es ist dann klar, dass, wenn die Gerade *jk*, die die Statur des Messenden darstellt, weiter absteht, das heisst weiter von der Stange *gh* entfernt ist, als die Gerade *df*, dass dann die Gestalt des Messenden weiter von der Stange *gh* absteht, als *df* von der Stange *ce*. Es sei nun dieser Überschuss, das ist die Differenz, *oj*. Man multipliciere den Abstand der Augen, das ist die Gerade *dj*, mit der Länge der Stange, die gleich *gn* ist, und das Ergebnis müssen wir durch die Differenz zwischen den Abständen der Augen dividieren, das ist durch die Länge *oj*. Zu dem Ergebnisse füge man den Rest der Länge der Stange hinzu, nämlich die Strecke *nh*, das ist die Statur des Messenden vom Auge bis zur Erde, und erhält dadurch die Höhe des Thurmes, wie in der 17. Figur zu sehen ist.

Dasselbe kann man mit einem Spiegel ausführen, indem man zuerst die Spitze des Thurmes in dem Spiegel einvisiert, den man im



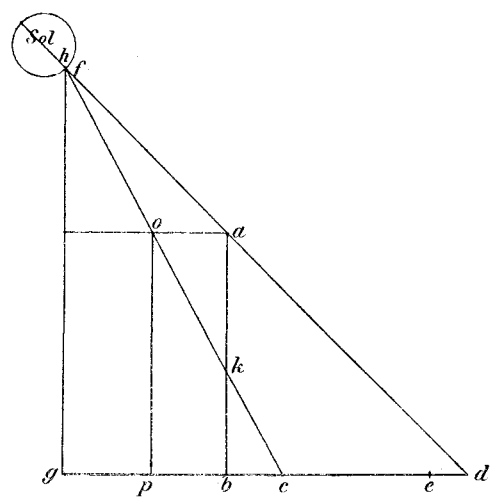
18a figura.

Punkte *a* aufgestellt hat, so dass das Auge in *f* ist, und die Statur des Messenden *fc*; zu zweit, indem man die nämliche Spitze des Thurmes in dem Spiegel einvisiert, der im Punkte *b* niedergelegt ist, so dass das Auge in *d* ist und die Statur des Menschen *ed*. Es ist klar, dass der zweite

9r magiore cha la | prima: sia quello excesso *dh*. Multiplica adunque la distantia da ti a lo spechio con la statura tua, cioe multiplica *ab* per *fc*, e quelo, che ne vene, partilo per lo excesso, cioe per la diferentia de la magiore alongatione da ti al spechio sopra la minore, cioe per *dh*, et aueray la alteza de la torre, como apare in la 18ª figura. Per quela medesima via aueray la alteza de uno monte e la alteza de una torre, che foss in sul monte.

Quando tu seray apresso a una torre, non partandote de li, aueray la sua alteza per questo modo. Tagli la tauola quadrata messa in la 10ª figura capozela a la torre, si che el lado *ad* sia equidistante a lo orizonte. Poy guarda la sumitade della torre per queli ponti *c*, *a*, e nota el segno in la sumitade de la torre, el qual guardi. Anchora viedi quelo segno per lo ponto *c*, metendo la riga in *e*, e viedi onda la riga tocha el lado *ad*, e la tocha in ponto *g*. Multiplica adunque *ec* per si medesimo, e quelo, che ne vene, partilo per *dg*, et aueray la alteza de la torre, si che sera tante volte in *cf*, la qual e lalteza de la torre, quante volte *dg* sera in *da*, sicomo apare in la 19ª figura.

Questo medesimo fa se *f* fosse in aiere, si che non hauesse fondamente in terra, come sarebe una cholmegna de una chasa. A la
9v | quale agugneui la alteza da *c* a la terra, et haueray la alteza da terra.[1])



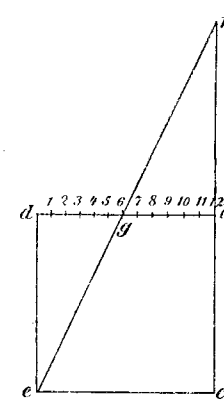
20ª figura.

Volendo sapere la alteza de una torre lucendo el sole et etiamdio la quantita de la ombra sua mediante una verga de certa mesura, ficha la ditta verga perpendiculare sopra lorizonte per si fatto modo, che una parte de la verga chada in la umbra de la torre, e alora vedi la sumitade de la torre per la sumita de la verga notando el logo, doue tu sey. Anchora quela medesima verga metela perpendichularmente verso la torre per si fatto modo, che la summitade de la verga tochi el razo del sole, e nota la quantitade, che e tra la verga e lo cono

1) Dieser Absatz fehlt in der lateinischen Fassung. Das Wort *colmenga* bedeutet, wie mir Herr Gino Loria gütigst mittheilte, im Ferraresischen Dialekte den Betthimmel. Die Übersetzung mit *Erker* dürfte wenigstens kein falsches Bild in den Text bringen.

Abstand zwischen dir und dem Spiegel grösser ist als der erste; dieser Unterschied sei *dh*. Multipliciert man nun den Abstand zwischen dir und dem Spiegel mit deiner Statur, das heisst vervielfacht man *ab* mit *fc*, und theilt das Resultat durch den Unterschied, nämlich durch die Differenz zwischen der grössern Entfernung vom Spiegel und der kleinern, also durch *dh*, so erhält man die Höhe des Thurmes, wie die 18. Figur zeigt. Auf die nämliche Art erhält man die Höhe eines Berges und die eines Thurmes, der auf dem Berge steht.

Wenn man an einem Thurme sich befindet, so erhält man seine Höhe ohne sich von ihm zu entfernen, auf folgende Weise. Man lege die quadratische Tafel, die in der 10. Figur beschrieben ist, kopfüber an den Thurm, so dass die Seite *ad* parallel dem Horizonte steht. Dann visiere man die Spitze des Thurmes durch die Punkte *c* und *a* und merke sich das Zeichen an der Thurmspitze, das man einvisiert. Nun beobachte man dasselbe Zeichen vom Punkte *e* aus, indem man das Lineal in *e* befestigt, und sehe zu, an welchem Punkte das Lineal die Seite *ad* schneidet; es mag das der Punkt *g* sein. Dann vervielfache man *ec* mit sich selbst, und theile das Produkt durch *dg*, so hat man die Höhe des Thurmes, so nämlich, dass *ec* so oft in der Höhe des Thurmes, das ist in *cf*, enthalten ist, so oft *dg* in *da* enthalten ist, wie in der 19. Figur zu sehen ist.



19a figura.

In derselben Art geht man vor, wenn *f* in der Luft sich befände, so dass es kein Fundament auf der Erde hätte, wie z. B. ein Erker eines Hauses. Hierzu addiert man die Höhe von *c* bis zur Erde, und erhält so die Höhe von dem Erdboden.[1])

Will man die Höhe eines Thurmes bei Sonnenschein bestimmen und zugleich die Länge seines Schattens vermittelst einer Stange von gegebener Länge, so errichte man die fragliche Stange senkrecht auf dem Horizonte in der Art, dass ein Theil der Stange in den Schatten des Thurmes fällt, und visiere dann über die Spitze der Stange nach der Spitze des Thurmes, indem man den Punkt bezeichnet, auf dem man steht. Dann bringe man dieselbe Stange senkrecht näher nach dem Thurme zu, so, dass ihre Spitze den Sonnenstrahl berührt, und bestimme die Entfernung, welche zwischen der Stange und der Spitze des Thurmschattens enthalten ist. Es ist klar, dass der vorher gemerkte Punkt von der Stange in der ersten Station weiter absteht, als die Spitze des

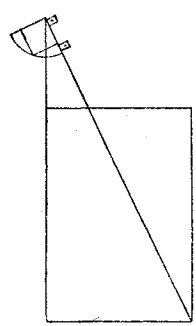
de la umbra de la torre. Et e manifesto, che el logo, che tu notasti, e piu distante da la verga in del primo termine, cha el cono de lombra de la torre de la verga in del secondo termine. Questa differentia seruela, e sia lo primo numero; e la distantia, che tra el logo notado el cono del ombra de la torre, sia el secondo numero; e la quantitade de la verga sia el terzo numero. Multiplica aduncha el secondo per lo terzo, e quelo, che ne vene, partilo per lo primo, et aueray la alteza de la torre. Exempli gratia sia el solle *h*, la torre *fg*, che faza la ombra *gc*, e la verga sia *ab*, de la qual verga la parte *bk* sie in lombra de la torre, e la distantia da
10r ti a la verga in del primo termine | sie *bd*. Item la verga *ab*, la quale e in del segondo termine, sia *op*, e chada totalmente in la ombra de la torre. Aduncha cunzosia cossa e, che la linea *bd* sia mazore che la linea *pc*, quanto e da *ed*: multiplica aduncha *ab* per *cd*, e quello, che ne viene, partilo per *ed*, et averay *fg*. E se voy sapere lumbra de la torre multiplica la distancia del cono de la ombra de la torre a la verga in del secondo termine per la alteza de la torre, e quelo, che ne vene, partilo per la verga, como apare in la 20ª figura.

Secunda pars primi tractatus.

Sequitur de profundimetria, cioe mesura de profunditade, per la quale se mette doe conclusione.

La prima de la profondita de li pozzi, la quale aueray per questo modo.

Stagando in uno de ladi del pozzo viedi cun lo astrolabio ouero cun el quadrante et termine opposito in del profundo del pozzo, e nota li ponti de la ombra drita, perche la profundita granda requere questo, e serva le ditte ponti. Poy multiplica el diametro del pozzo per 12, e quello, che ne viene, partilo per lo numero de li ponti seruati, et aueray la alteza del pozzo, como apare in la 21ª figura, de la quale tray fora la distancia del centro del astrolabio ouero
10v del quadrante a la bocha del pozzo. |



21a figura.

Questa medesima faray colo instrumento de le verge, fazando quelo medesimo instrumento in su la stremitade del diametro de la bocha del pozo, et ponendo lochio apreso al ponto *f*. Alora como tu ay fatto de sopra, multiplica et diametro del pozo per 12, e quelo, che ne vene, partilo per li ponti, che tu auesti cun lo instrumento ditto, et aueray la alteza del pozo, si como apare in la 22ª figura, de la quale tray la distantia del ponto *f* da la bocha del pozzo.

Thurmschattens von der Stange in der zweiten Station. Diese Differenz bestimme man, sie wird die erste Zahl. Der Abstand zwischen dem gemerkten Punkte und der Spitze des Thurmschattens sei die zweite Zahl, die Länge der Stange aber die dritte Zahl. Multipliciert man also die zweite mit der dritten und theilt das Produkt durch die erste, so erhält man die Höhe des Thurmes. Es sei z. B. die Sonne *h*, der Thurm *fg*, der den Schatten *gc* wirft; die Stange sei *ab*, von der der Theil *bk* im Thurmschatten liege, der Abstand zwischen dem Beobachter und der Stange in der ersten Station sei *bd*. Es sei ferner die Stange *ab* in ihrer zweiten Lage *op* und falle vollständig in den Schatten des Thurmes. Da nun die Gerade *bd* um so viel grösser ist als die Gerade *pc*, als *ed* beträgt, so vervielfache man *ab* mit *cd* und theile das Ergebnis durch *ed*, so erhält man *fg*. Will man die Grösse des Thurmschattens bestimmen, so multipliciere man den Abstand der Spitze des Thurmschattens von der Stange in ihrer zweiten Lage mit der Höhe des Thurmes und das Ergebnis dividiere man durch die Länge der Stange, wie in Figur 20 zu sehen ist.

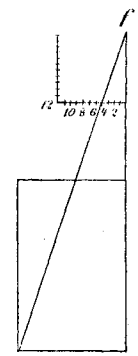
Zweiter Theil des ersten Traktates.

Es folgt die Tiefenmessung, das heisst die Ermittelung der Tiefe. Hierfür werden wir zwei Aufgaben stellen.

Die erste betrifft die Tiefe der Brunnen, die man in folgender Weise bestimmt.

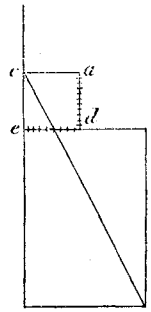
Man stehe auf einer Seite des Brunnens und visiere mit dem Astrolab oder dem Quadranten den entgegengesetzten Punkt in der Tiefe des Brunnens und bestimme die Punkte des rechten Schattens, da grosse Tiefe das erfordert. Die erhaltenen Punkte merke man sich. Darauf multipliciere man den Durchmesser des Brunnens mit 12 und dividiere das Ergebnis durch die gemerkte Zahl der Punkte, so erhält man die Tiefe des Brunnens, wie in der 21. Figur zu sehen ist. Von ihr muss man den Abstand des Mittelpunktes des Astrolabs oder des Quadranten bis zur Mändung des Brunnens abziehen.

Dasselbe kann man auch mit dem Stangeninstrumente bewirken, indem man dasselbe auf dem Endpunkte des Durchmessers der Brunnenöffnung aufstellt, und das Auge in den Punkt *f* bringt. Genau so, wie man es oben gethan hat, multipliciert man den Durchmesser des Brunnens mit 12 und theilt das Ergebnis durch die Punkte, welche man mit dem Instrumente beobachtet hat, und erhält so die Tiefe des Brunnens, wie in der 22. Figur ersichtlich. Von ihr muss man den Abstand des Punktes *f* von der Brunnenöffnung abziehen.



22a figura.

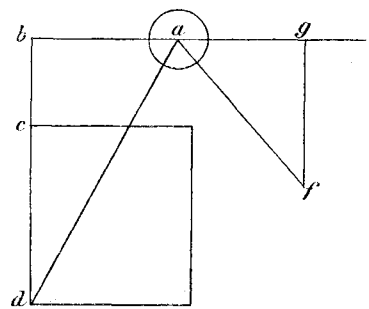
Questa medesima faray cun una tabula quadrata drizando el lado *ec* sopra de la bocha del pozo, ponendo lo ochio apreso al *c*. El resto fa, como de sopra, si como apare in la 23ª figura, da la quale tray la distancia del ponto *c* da la bocha del pozzo.



23ª figura.

Questa medesima faray cun due verge. Una sie el diametro de la bocha del pozzo, cioe *cf*, e laltra sia in su la stremitade de la boca del pozo in ponto *c*. In la stremita de la qual verga, cioe in ponto *b*, posse lo ochio guardando in del pozzo, e li, dove la linea visuale tocha el diametro de la bocha del pozo, posse per segno *d*. Poy multiplica *cb* per *df*, e quelo, che ne viene, partilo per *dc*, et aueray *fg*, chi e la alteza del pozo, si como
11r apare in la 24ª figura. |

Questa medesima faray per lo spechio. Ficha el spechio in una tabula, la qual tabula voltela verso la profondita del pozo, che sia leuada equalmente da la bocha del pozo, per si fatto modo, chel spechio sia apreso a la estremitade de la bocha del pozo in del ponto *a* de la tabula. Poy dal lado opposito del pozo fa la linea *cb* infina a la tabula, e sia lo ochio *f*, chi vieda in mezo del spechio el ponto *d* per reflexione. Poy dal ponto de lo ochio *f* faray una linea *fg*, che sia equalmente distante a la linea *bcd*. Alora multiplica *fg* per *ab*, e quelo, che ne vene, partilo per *ag*, et aueray *bcd*, dal quale tray *bc*, e rimane *cd* la alteza del pozo, como apare in la 25ª figura.



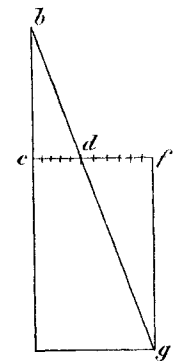
25ª figura.

Seconda conclusio. Per questo modo se mesura la profunditade de una valle.[1]) Sia el monte *bcgme*, lorizonte *cgmf*, el ponto in la valle sie *f*, la pianura in sul monte sie *be* equalmente distante a lorizonte. Sia aduncha el mesuradore in del termine *e*, e veda el ponto *f* in la valle cun lo astrolabio, ouero cun el quadrante, ouero cun lo instrumento de le verge, ouero cun la tauola quadrata, e nota li ponti. Le quale se li serano ponti de ombra versa, parti 144 per quelli ponti. Anchora sia el mesuratore in del termine *b*, e fiza notando li ponti, como e ditto da

1) Es wird hier gar nicht die Tiefe des Thales gemessen, sondern die Entfernung des Punktes *f* von dem Fusspunkte des von *b* auf die Hori-

Das Nämliche kann auch mit der quadratischen Tafel geschehen, wenn man die Seite *ec* auf der Brunnenöffnung senkrecht errichtet und das Auge in den Punkt *e* bringt. Das Weitere macht man wie oben, wie in Figur 23 ersichtlich. Man muss wieder den Abstand des Punktes *c* von der Brunnenöffnung in Abzug bringen.

Dasselbe macht man mit zwei Stangen. Eine von ihnen sei der Durchmesser des Brunnens, nämlich *cf*, die andere sei im Endpunkte der Brunnenöffnung im Punkte *c* senkrecht errichtet. Das Auge bringe man in den Endpunkt der Stange, d. h. in den Punkt *b* und visiere in den Brunnen. Da, wo die Gesichtslinie den Durchmesser der Brunnenöffnung schneidet, setze man das Zeichen *d*. Nun vervielfache man *cb* mit *df* und das, was sich ergiebt, theile man durch *dc*, so erhält man *fg*, das ist die Tiefe des Brunnens, wie die 24. Figur zeigt.



24a figura.

Dasselbe kann man mit einem Spiegel ausführen. Man befestige den Spiegel auf einer Tafel, welche man umgekehrt gegen die Tiefe des Brunnens kehrt, so dass sie gleichmässig von der Brunnenöffnung absteht, und zwar so, dass der Spiegel sich über dem Endpunkte der Brunnenöffnung im Punkte *a* der Tafel befindet. Von der andern entgegengesetzten Seite des Brunnens ziehe man die Gerade *cb* bis zu der Tafel. Es sei weiter *f* das Auge, das in der Mitte des Spiegels den Punkt *d* durch Reflexion sieht. Dann ziehe man vom Auge *f* die Gerade *fg* parallel der Geraden *bcd*, multipliciere darauf *fg* mit *ab* und theile das Ergebnis durch *ag*, so erhält man *bcd*. Hiervon ziehe man *bc* ab, so bleibt *cd*, die Tiefe des Brunnens, wie die 25. Figur zeigt.

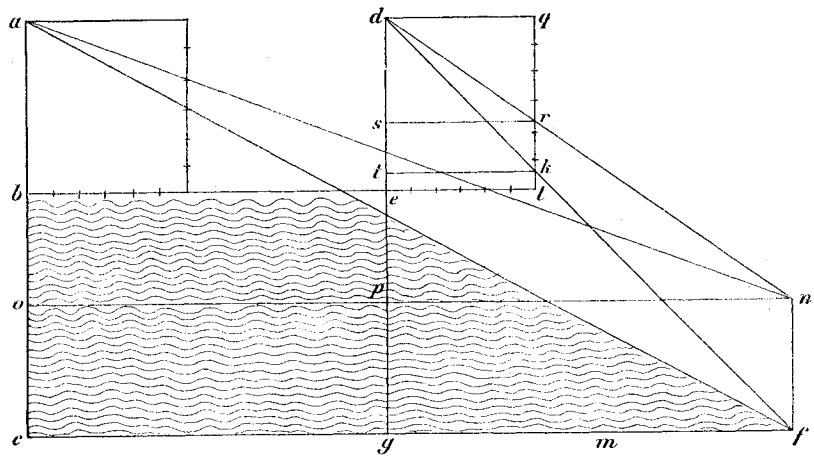
Zweite Aufgabe. In folgender Weise misst man die Tiefe eines Thales.[1])

Der Berg sei *bcgme*, die Horizontalebene *cgmf*, der Punkt im Thale sei *f*, die ebene Fläche auf dem Berge *bc* parallel dem Horizonte. Der Messende stehe nun in dem Endpunkte *e* und visiere den Punkt *f* im Thale mit dem Astrolab oder mit dem Quadranten, oder mit dem Stangeninstrumente, oder mit der quadratischen Tafel, und merke die Punkte des Schattens. Sind das Punkte des verkehrten Schattens, so theile man durch sie 144. Es sei der Messende weiter im Endpunkte *b* und thue unter Feststellung der Punkte genau so, wie wir es zuerst gesagt haben. Von diesen letzten Punkten ziehe man die zuerst beobachteten ab, und merke die Differenz.

---

zontalebene gefällten Lothes. Erst die folgenden Aufgaben geben die Höhe des Berges.

11v prima. Da li qualli | ponti tray li primi ponti, che tu auesti, e serua lo resto. Alora multiplica la distancia de li doi termine, cioe la linea *be*, per li minor ponti, e quelo, che ne vene, partilo per la diferentia de li ponti, che tu seruasti, et aueray la linea *gf*.



26a figura.

A quello medesimo modo faray, se una torre fosse in del termine *f*, de la quale volessimo sapere la sua alteza, la quale sia *nf*. Messado la linea *opn* equalmente distante al orizon, ed aueray la linea *pn*. Ma perche anchora non ay lalteza de la torre, ne la lalteza del monte, in sul quale tu sey, impercio quelle alteze se auerano in questo modo. Guarda, onde la linea visuale *df* secha, cioe tocha, la linea *ql*, e lo sia el ponto *k*, del qual ponto *k*, mena la linea *kt* equidistante a lorizon *cgmf*. Alora multiplica la linea *gf*, la qual tu ay zia atrouata, per la linea *dt*, e quello, che ne vene, partilo per la linea *kt*, et aueray la linea *dg*, ed anche la linea *eg*, la quale e lalteza del monte.

Per quelo medesimo modo faray per la alteza de la torre, vedendo doue la linea visuale *dn* secha la linea *ql*, e li sia el ponto *r*, del quale mena la linea *rs* equidistante a lorizon. Alora multiplica *pn* per *ds*, e quelo, che ne vene, partilo per *rs*, et aueray *dp* et *ep*, adunque *pg*, la quale e inguale a la alteza de la torre. E tute queste cosse apare 12r in la 26a figura. |

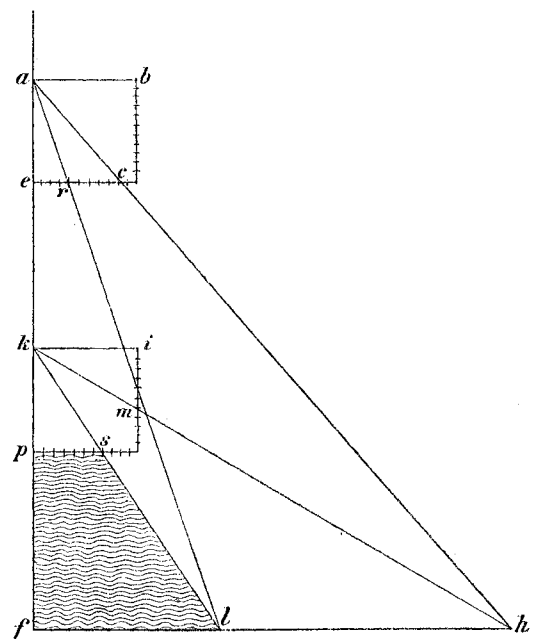
Ma se non fusse pianura alcuna in del monte, alora primamente guarda el termine ouero el segno in del piano, e nota le ponti de la umbra versa; secundariamente driza perpendicularmente alcuna mesura dal luogo del ochio tuo in de la prima hoperatione verso al aiere ouero el

Darauf multipliciere man den Abstand der beiden Stationen, das ist die Gerade *be*, mit der Zahl der kleinern Punktsumme, und dividiere das Ergebnis durch die gemerkte Differenz der Punkte, dann erhält man die Gerade *gf* (Fig. 26).

In derselben Weise geht man vor, wenn im Punkte *f* ein Thurm steht, dessen Höhe man bestimmen will, derselbe sei *nf*. Man messe die Gerade *opn* parallel zum Horizonte, und erhält so die Gerade *pn*. Da man aber die Höhe des Thurmes noch nicht kennt, noch die des Berges, auf welchem man sich befindet, so erhält man beide Höhen auf folgende Weise. Man sehe zu, in welchem Punkte die Gesichtslinie *df* die Gerade *ql* schneidet, es sei das im Punkte *k*. Von diesem Punkte *k* ziehe man die Gerade *kt* parallel zum Horizonte *cgmf*. Darauf multipliciere man die Gerade *gf*, die man schon gefunden hat, mit der Geraden *dt* und dividiere das Ergebnis durch die Gerade *kt*, dann erhält man die Gerade *dg* und also auch die Gerade *eg*, das ist die Höhe des Berges.

In derselben Weise findet man die Höhe des Thurmes, indem man zusieht, wo die Gesichtslinie *dn* die Gerade *ql* schneidet; es sei das im Punkte *r*. Von ihm zieht man die Gerade *rs* parallel dem Horizonte und multipliciert dann *pn* mit *ds* und dividiert das Ergebnis durch *rs*, dann erhält man *dp* und *ep* und folglich *pg*, was der Höhe des Thurmes gleich ist. Alles dieses zeigt die 26. Figur.

Ist aber auf dem Berge keine ebene Fläche, so beobachte man zunächst den Punkt oder das Zeichen in der Ebene und merke sich die Punkte des verkehrten Schattens. Zweitens errichte man von dem Orte des Auges bei der ersten Beobachtung aufwärts senkrecht irgend ein Maass in die Luft oder nach dem Zenith. Von der Spitze dieses Maasses aus visiere man ein zweites Mal den vorgenannten Punkt oder das Zeichen und merke wieder die Punkte. Darauf multi-



27. figura.

zenit. De la cima de la qual mesura guarda una altra volta el preditto termine ouero segno, e nota li ponti. Alora multiplica 12 per la mesura drizada, e quelo, che ne vene, partilo per la diferentia de li ponti abuti per la prima e per la seconda volta, come sarebe, se tu fusse in sul monte *fp* e tu volessi la longeza *fh*, e sia lalteza de la somita del monte a lo ochio tuo *kp*, e sie el numero dato de li ponti *im*, esempli gratia $3\frac{3}{11}$. Ancora dal ponto *k* fiza drizato *ak* de cognosuda quantita esempli gratia 5; e sia el numero de li ponti *bc* exempli gratia 6. E perche tragando $3\frac{3}{11}$ de 6, resta $2\frac{8}{11}$, sara questa diferentia el partitore. Multiplica adunque 5 per 12, e quelo, che ne viene, partilo per $2\frac{8}{11}$, et aueray 22, la longeza cioe *fh*, la qual circhaui. Ma quando tu auessi li ponti de umbra drita, volta quelli in de li ponti de umbra versa, perche e le da fare cossi volendo le profunditade. Como e, guardando el ponto *l* per *a* aueray *er*, cioe 6 ponti, per li quali parte 144, et aueray 24. Ancora guardando el ponto *l* per *k* aueray *ps*, cioe 11 ponti, per li quali parte 144, el aueray
12v $13\frac{1}{11}$, | le quali trali de 24, aueray el partitore $10\frac{10}{11}$. Multiplica aduncha 5 per 12, como e dito de sopra, e quelo, che ne vene, partilo per $10\frac{10}{11}$, et aueray $5\frac{1}{2}$, el quale e *fl*. Ma nota, che in la mesura de la pianura e de la profunditade tu di usare la umbra drita per la versa et e conuerso (Fig. 27).

Sapia etiamdio, che la praticha fatta segondo questa 27ª figura serua a la prima parte de la secunda conclusione del primo tratado, usando quela alteza *ab* per la pianeza messa qui, la qual he *fh*, e usando de quela pianeza *bd* per questa alteza messa qui, la qual he *fa*, si como la praticha secundo la 25ª figura serue a la secunda parte de la secunda conclusione del primo tratado, cioe usando la pianeza de luno per la alteza de laltro et e conuerso.

Tertia pars primi tractatus.

Sequitur de longimetria, per la quale ponno tre cunclusione.

Prima sie: Quando la longeza ouero pianura de un campo sia dritta, aueray la soua longeza per questo modo. Prima cun lo astrolabio ouero cun lo quadrante sta in uno locho del piano et guarda per li busi de li ditti instrumenti tegnando lo angulo del quadrante, in lo quale e lo chiodo del perpendichulo perme lo ochio, et raxionialmento cadera lo perpendichulo sopra li ponti de la umbra versa; alora multi-
13 plica la quantita de lo ochio tuo a terra per 12, ouero piu certo | multi-

pliciere man 12 mit dem errichteten Maasse und dividiere das Ergebnis durch die Differenz der bei der ersten und zweiten Beobachtung erhaltenen Punkte. Wie es z. B. sein würde, wenn man auf dem Berge *fp* sich befände und man wollte die Länge *fh* messen, und es wäre die Höhe des Berges vom Auge aus gemessen gleich *kp*. Die gefundene Zahl der Punkte *im* sei z. B. $3\frac{3}{11}$. Nun errichte man im Punkte *k* die *ak* von bekannter Länge, etwa 5, und es sei etwa die Zahl der Punkte 6. Da nun, wenn man $3\frac{3}{11}$ von 6 abzieht, $2\frac{8}{11}$ Rest bleibt, so ist diese Differenz der Nenner. Multipliciert man nun 5 mit 12 und dividiert das Ergebnis durch $2\frac{8}{11}$, so erhält man 22, das ist die Länge *fh*, die man sucht. Erhält man aber Punkte des rechten Schattens, so verwandelt man sie in Punkte des verkehrten Schattens, da man so bei Messung von Tiefen verfahren muss. So erhält man z. B. bei Beobachtung des Punktes *l* von *a* aus, *er*, das sind 6 Punkte, durch die 144 getheilt 24 kommen. Beobachtet man ferner den Punkt *l* von *k* aus, so erhält man *ps*, das sind 11 Punkte. Dividiert man dadurch 144, so entstehen $13\frac{1}{11}$, die von 24 weggenommen den Nenner $10\frac{10}{11}$ ergeben. Multipliciert man nun 5 mit 12, wie oben gesagt ist, und theilt das Ergebnis durch $10\frac{10}{11}$, so erhält man $5\frac{1}{2}$, und das ist *fl*. Man beachte aber, dass bei Messung der Ebene und der Tiefen man sich statt des rechten Schattens des verkehrten bedienen muss und umgekehrt (Fig. 27).

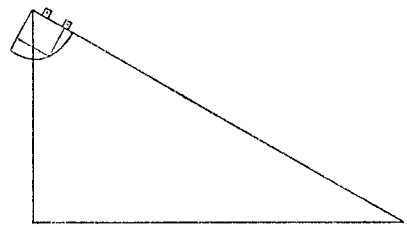
Man wisse ferner, dass das Verfahren gemäss der 27. Figur auch für den ersten Theil der zweiten Aufgabe des ersten Traktates benutzt werden kann, wenn man die dortige Höhe *ab* für die hier genommene Ebene, nämlich *fh*, setzt, und die dortige Ebene *bd* für die hier gesetzte Höhe, nämlich *fa*, nimmt. Ebenso wie das Verfahren gemäss der 25. Figur auch für den zweiten Theil der zweiten Aufgabe des ersten Traktates dienen kann, indem man die Ebene des einen als die Höhe des andern gebraucht und umgekehrt.

Dritter Theil des ersten Traktates.

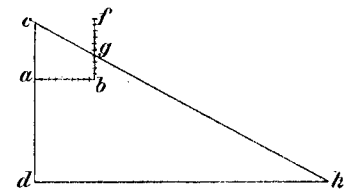
Nun folgt die Längenmessung, für welche wir drei Aufgaben stellen.

Die erste ist folgende: Wenn die Länge oder ebene Ausdehnung eines Feldes gerade ist, so erhält man seine Länge in folgender Weise. Zuerst stehe man mit dem Astrolab oder dem Quadranten in dem einen Endpunkte der Ebene und visiere durch die Absehen genannter Instrumente, indem man die Ecke des Quadranten, in welchem der Stift des Bleilothes sich befindet, an das Auge hält. Dann fällt naturgemäss das Loth auf Punkte des verkehrten Schattens. Nun multipliciere man die Entfernung des Auges von der Erde mit 12, oder genauer, man

plica la distancia del centro de lo astrolabio a tera, ouero da lo angulo del quadrante per 12, e quelo, che ne viene, partilo per lo numero de li ponti, che tu hay abuto, e quelo, che ne vene, sera la longeza como apare in la 28ª figura. E sapi, che non besogna voltare li ponti de umbra versa in li ponti de umbra dritta.



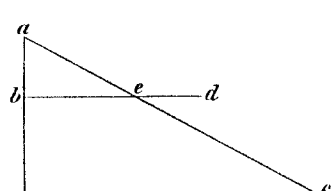
28ª figura.



29ª figura.

Questo medesimo se puo fare cun lo instrumento de le verge, chomo he in la 27ª figura, ponendo lo ochio perme lo *c*, guardando lo altro termine del piano per la regula posta in *c*, chi secha la linea *fb* in ponto *g*. Alora multiplica *cd* per 12, e quelo, che ne viene, partilo per *fg*, et aueray *dh*, la longeza del piano, como apare in la 29ª figura. E sapi chel te bisogna cauare la linea *ab* de la linea *dh*. Houero aueray questo, como apare in la 30ª figura, ponendo lo ochio in ponto *f*, in lo quale he la regula, chi secha in lo ponto *g*. Alora multiplica *cd* per 12, e quelo, che ne vene, partilo per *cg*, et aueray *dh*, la longeza.

Questo medesimo se puo fare cun la tabula quadrata ponendo lo ochio a ponto *c*, in lo quale sie la regula, si che lo lado *ce* sia de sopra, e si che la regula si secha la linea *eb* in ponto *f*. Alora multiplica *ca* per 12, e quelo, che ne viene, partilo per *ef*, et aueray la longeza del piano, como apare in la 31ª figura. Questo medesimo si farebbe,
13′ se lo | lato *ad* fosse alleuato dal piano, e alora la distantia da *c* al piano multiplica per 12 etc.

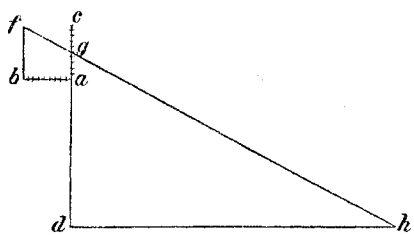


32ª figura

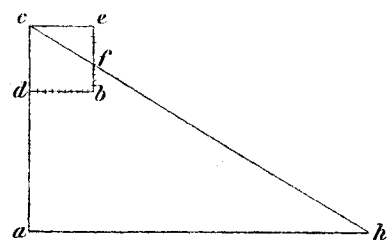
Questa medesima faray per uno tale instrumento. Sia lo piano *cf*, la verga *ac* equale a la statura, a la quale inficha una altra verga perpendichularmente, che sia *bd*; sia lo ochio tuo in ponto *a*, e sia la linea vissuale *af*, che secha la verga *bd* in ponto *e*. Alora multiplica *be* per *ac*, e quelo, che ne viene, partilo per *ab*, et haueray *cf*, la longeza, como apare in la 32ª figura.

multipliciere den Abstand des Mittelpunktes des Astrolabs oder der Ecke des Quadranten von der Erde mit 12 und theile das Produkt durch die Zahl der Punkte, die man beobachtet hat, dann ist der Quotient die gesuchte Länge, wie in der 28. Figur ersichtlich ist. Man beachte, dass es hier nicht nöthig ist, die Punkte des verkehrten Schattens in solche des rechten Schattens zu verwandeln.

Man kann dasselbe auch mit dem Stangeninstrumente ausführen, wie man es in der 27. Figur benutzte, indem man das Auge nach *c* bringt und das andere Ende der Ebene mittelst des Messlineals, das man in *c* befestigt hat, einvisiert. Dieses schneide die Gerade *fb* im Punkte *g*. Nun multipliciere man *cd* mit 12 und das erhaltene Produkt theile man durch *fg*, dann erhält man *dh*, die Länge der Ebene, wie die 29. Figur zeigt. Man beachte aber, dass man die Länge *ab* von der Geraden *dh* wegnehmen muss. Man könnte auch die Messung so ausführen, wie die 30. Figur zeigt, dass man das Auge in den Punkt *f* bringt, in welchem das Messlineal sich befindet, das im Punkte *g* einschneidet. Man multipliciere dann *cd* mit 12 und dividiere das Ergebnis durch *cg*, so erhält man *dh*, die gesuchte Länge.



30a figura.



31a figura.

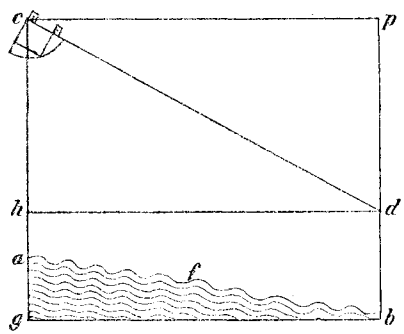
Ebenso kann man mit der quadratischen Tafel vorgehen, wenn man das Auge in den Punkt *c* bringt, in welchem das Messlineal befestigt ist, und zwar so, dass die Seite *ce* oben liegt, und das Lineal die Gerade *eb* im Punkte *f* schneidet. Man multipliciere nun *ca* mit 12 und das Ergebnis dividiere man durch *ef*, so erhält man die Länge der Ebene, wie in der 31. Figur ersichtlich ist. Ebenso könnte man vorgehen, wenn die Seite *ad* nicht bis zur Ebene reichte. Dann vervielfache man den Abstand von *c* bis zur Ebene mit 12 u. s. w.

Auch mit folgendem Instrumente lässt sich das ausführen. Die Ebene sei *cf*, die Stange *ac* gleich der Grösse des Beobachters. An ihr befestige man senkrecht eine zweite Stange, die *bd* heisse. Das Auge befinde sich im Punkte *a*, und die Gesichtslinie sei *af*, welche die Stange *bd* im Punkte *e* schneide. Nun multipliciere man *be* mit *ac* und theile das Ergebnis durch *ab*, so erhält man *cf*, die gesuchte Länge, wie in der 32. Figur ersichtlich.

Questa medesima se puo fare per lo spechio. Driza una verga perpendicholarmente sopra lo orizonte, cioe sopra lo piano, a la qual verga apicha lo spechio in ponto, che sia mancho distante da la terra cha lo ochio tuo, como sarebe in ponto *c*, e sia lochio tuo *a* tra lo spechio e lo termine del piano, el quale sia *f*, e sia la distantia de lo ochio tuo de la verga la linea *ba*. Multiplica adunque *ba* per *cd*, e quelo, che ne viene, partilo per *bc*, et haueray *df*, como apare in la 33ª figura.

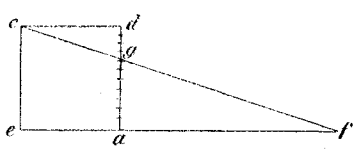
Secunda conclusio. Se la longeza del piano da fir mesurada non sera drita, como se lorizonte *gb*, el spazio gibboso, cioe non piano, *afb*, fa cossi. Ficha doe righe una in del termine *a*, laltra in del termine *b* piu basso, cossi lonze, che dal ponto *d* possa fir messado una linea in fina a la linea *cg*, la qual sia equalmente distante a lorizonte, la qual linea sia *dh* et non secha la gibbosita del spatio. Alora cholo astrolabio ouero cun el quadrante | situe in ponto *c* vedi el ponto *d*, e nota el numero de li ponti del lumbra versa, iquali te dara la lidada ouero el perpendichulo, e seruali. Poy multiplica *ch* per 12, e quelo, che ne viene, partilo per lo numero de li ponti, che tu seruasti, et aueray la linea *hd*, la qual e equale ha *gb*. E se da ponto *c* vorey menare la linea *cp* in fina ad *bd* equidistante a lorizonte, poray fare de la linea *pd*, si como facesti de la linea *ch*, como apare in la 34ª figura. Vero he, che per questo non se cumprende la gibbositade, ma solamente la distancia de *g* et *b*.

14



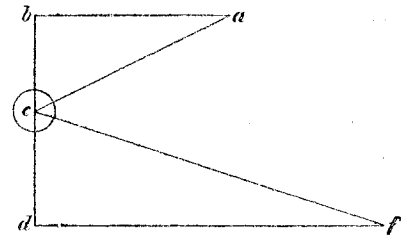
34ª figura.

Terza conclusio. E perche a la fiada hocore in la longimetria la largeza de una fossa, per la noticia de quela sia la terza conclusione. Faray cossi. Meteray la tabula de la 20ª figura sopra la ripa tua de la fossa ouero lo piano elquale, doue tu sey, e guarda el termine *f* in la ripa opposita per *eaf*, metendo lo ochio apreso al ponto *e*. Anchora guarda el ponto *f* per la linea *cgf*, metendo lo ochio justa a ponto *c*, stagando sempre la tabula ferma. Alora multiplica *ec* per si medesimo, e quelo, che ne viene,



35ª figura.

Man kann dasselbe auch mit einem Spiegel machen. Errichte eine Stange senkrecht zum Horizonte, befestige an dieser Stange den Spiegel in einem Punkte, der einen geringern Abstand von der Erde hat, als das Auge, wie es etwa der Punkt *c* wäre. Das Auge befinde sich in *a* zwischen dem Spiegel und dem Endpunkte der Ebene, der mit *f* bezeichnet sei; der Abstand des Auges von der Stange sei die Gerade *ab*. Multipliciere nun *ab* mit *cd* und theile das Produkt durch *bc*, so entsteht *df*, wie Figur 33 zeigt.



33a figura.

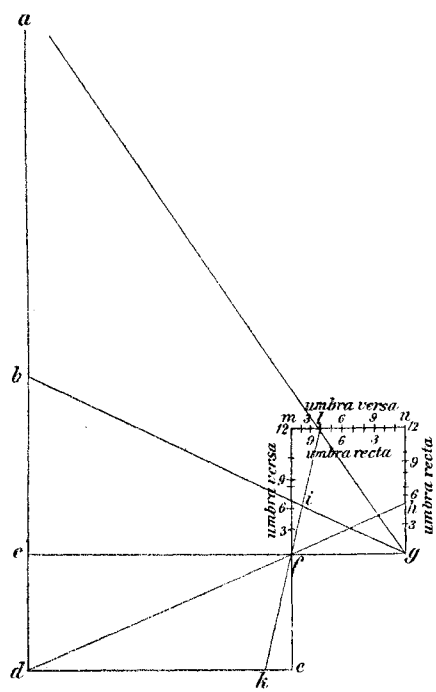
Zweite Aufgabe. Wenn die Längenausdehnung der zu messenden Ebene nicht horizontal liegt, wenn z. B. der Horizont *gb* ist, die höckrige, das heisst nicht ebene Länge *afb*, so verfahre man so. Man errichte zwei Stangen, eine im Endpunkte *a*, die andere in dem tiefer gelegenen Endpunkte *b* von solcher Länge, dass man vom Punkte *d* aus eine Gerade bis zur Stange *cg* messen kann, die gleichmässig vom Horizonte absteht. Es sei dies die Gerade *dh*, und sie schneide die Erhöhung des zu messenden Raumes nicht. Nun visiere man mit dem Astrolab oder dem Quadranten, die im Punkte *c* aufgestellt sind, den Punkt *d*, und bestimme die Zahl der Punkte des verkehrten Schattens, welche die Alhidade oder das Bleiloth angiebt, und merke dieselben. Dann multipliciere man *ch* mit 12, und dividiere das Produkt durch die Zahl der Punkte, die man gemerkt hat, so erhält man dadurch dle Gerade *hd*, welche gleich *gb* ist. Würde man vom Punkte *c* aus die Gerade *cp* parallel dem Horizonte bis zur Geraden *bd* ziehen, so könnte man zur Bestimmung der Geraden *pd* genau so verfahren, wie man zur Bestimmung der Geraden *ch* vorgegangen ist, wie die 34. Figur darstellt. Es ist aber klar, dass man hierdurch nicht die Länge der nicht ebenen Fläche, sondern nur den Abstand zwischen *g* und *b* erhält.

Dritte Aufgabe. Da bei der Längenmessung zuweilen die Bestimmung der Breite eines Grabens vorkommt, so behandele die dritte Aufgabe die Bestimmung derselben. Man gehe so vor. Die Tafel der Figur 20 stelle man an dem Ufer des Grabens oder auf der Horizontalebene auf, auf welchem man selbst sich befindet, und beobachte den Punkt *f* auf dem gegenseitigen Ufer vermittelst der Geraden *eaf*, indem man das Auge in den Punkt *e* bringt. Dann visiere man den Punkt *f* ebenfalls vermittelst der Geraden *cgf*, indem das Auge sich im Punkte *c* befindet, die Tafel selbst aber immer fest steht. Nun multipliciere man *ec* mit sich

partilo per *dg*, et aueray *ef*, la largeza de la fossa, como apare in la 35ª figura.

Questo medesimo poy fare altramente. Guarda el ponto *f* per la linea *ebf* como prima. Posta menaray la tabula tuo verso la mane destra ouero a la senistra per si fatto modo, che lo lado *ad* staga per-
14′ pendichulare sopra la riga *eaf*, | cioe al squadro, menando la tabula per tanto spatio, che tu veda anchora el ponto *f* guardando per *ca*, si tu aueray menada la tabula da la mane destra, ouero guardando per *ed*, se tu aueray menada la tabula da la parte senistra. Alora quanta sera la distantia tra el primo locho *a* el secondo locho *a*, tanta sera la largeza de la fossa da la parte destra, ouero tra el logo *a* el secondo locho *d* da la parte senistra, como apare in la 36ª figura.

A volere mesurare una alteza de una torre sopra una ripa opposita de uno fiume, et etiamdio la largeza de fiume, faray cossi. Driza sopra la ripa, su la quale tu sey, uno tale instrumento, como he *efmng* per si fatto modo, che la asta *ef* sopra la terra sia de certa nota, in lo quale instrumento siano doy busi per doue lidade, cioe *f* et *g* equidistante a lorizon e fiza menado *gf* drito fino a la torre *da*, la qual linea sia *gfc*. La largeza del fiume sia *cd*, e la alteza de la torre sia *db* ouero *da*. Sia etiamdio ceschaduno de li tri ladi del instrumento, cioe *gn*, et *nm* et *mf* diuisi per 12 ponti. Aduncha e da considerare che, perche doy centri sono posti in lo instrumento presente per due quantita da fir mesurade, de le quale l'una si zose laltra se driza sopra quela, che zose; per la quale chasone la razone de la umbra se menda, impercio | li preditti

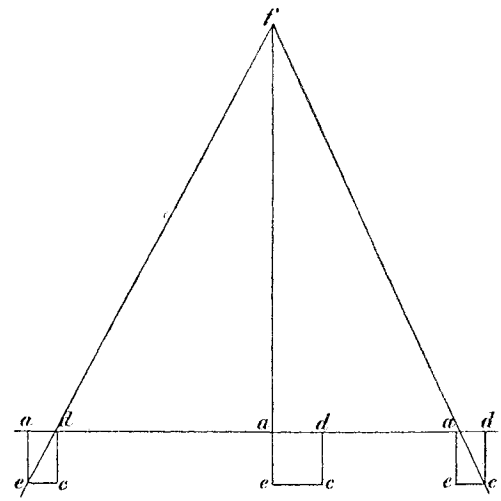


37ª figura.

15 tri ladi del instrumento serano denominati variamente, percioche a mesurare *ed*. Perche a le parte de la linea *gn* firano diti ponti de ombra dritta, e a la parte de *nm* ponti de ombra versa, e termina el 12 in

selbst und theile das Ergebnis durch *dg*, so erhält man *ef*, die Breite des Grabens, wie in Figur 35 ersichtlich ist.

Man kann das auch anders machen. Visiere den Punkt *f* wie vorher durch die Gerade *eaf*. Darauf rücke die Tafel nach rechts oder nach links in der Art, dass die Seite *ad* stets auf der Geraden *eaf* senkrecht bleibt, das heisst im Winkelmaass, und zwar rücke man die Tafel um eine solche Entfernung weiter, dass man den Punkt *f* wieder sieht, indem man über *c* und *a* visiert, wenn man die Tafel nach rechts gerückt hat, oder indem man über *e* und *d* visiert, wenn man nach der linken Hand gerückt hat. Dann ist die Breite des Grabens ebenso gross als der Abstand zwischen dem ersten Orte von *a* und seinem zweiten Orte, wenn man nach rechts gerückt hat, oder wie der zwischen dem ersten Orte von *a* und dem zweiten Orte von *d* bei Linksrückung, wie in Figur 36 zu sehen ist.



36a figura.

Um die Höhe eines Thurmes auf dem gegenüberliegenden Ufer eines Flusses und zugleich die Breite des Flusses zu messen, gehe man so vor. Auf dem Ufer, auf welchem man sich befindet, richte man ein Instrument auf, wie es *efmng* ist, und zwar in folgender Weise. Die Stange *ef* sei über der Erde von bestimmter Länge. In dem Instrumente selbst seien je zwei Absehen für zwei Alhidaden, nämlich *f* und *g* parallel dem Horizonte befestigt. Man verlängere *gf* in gerader Linie bis an den Thurm *da*; es sei dies die Gerade *gfc*. Die Breite des Flusses sei *ed*, die Höhe des Thurmes *db* oder *da*. Es sei ferner jede der drei Seiten des Instrumentes, nämlich *gn*, *nm* und *mf* in je 12 Punkte getheilt. Dabei ist zu beachten, weil zwei Mittelpunkte im vorliegenden Instrumente angenommen sind wegen der zwei zu messenden Gegenstände, von denen einer liegt, der andere auf dem liegenden senkrecht errichtet ist, dass dieserhalb das Verhältnis der Schatten sich ändert. Deshalb werden die drei Seiten des Instrumentes verschieden benannt. Denn will man *ed* messen, so werden die Theile der Linie *gn* Punkte des

ponto *n*, e firano scritte de fora. Ma per mesurare *da* la parte *nm* firano diti ponti de ombra drita, e la parte de *mf* ponti de umbra versa, e termina el 12 in ponto *m*, e firano scritti de dentro. Adunque a volere mesurare *ed* sia lochio apreso al lado *gn* in ponto *h* menada la linea *hfd*. Poy moltiplica *fe* per *gf*, e quelo, che ne viene, partilo per *gh*, et aueray *ed*. Ma se lo ochio fia tra *n* et *m* in ponto *l*, alora multiplica *ef* per *ml*, e quelo, che ne viene partilo per *gn*, et aueray *ek*. Ma a volere mesurare *db* menada la linea *gb*, la quale secha la linea *fm* in ponto *i*, e meso lo ochio apreso ad *g*, alora multiplica *gc* per *if*, e quelo, che ne viene partilo per *fm*, et aueray *eb* et anche *db*. Ma se la linea vissuale chadesse tra *m* e *n* in ponto *l*, alora multiplica *gc* per *gn*, e quelo, che ne viene, partilo per *nl*, et haueray *ca*, e aduncha *da*, como
15′ apare in la 37ª figura. |

Secundus Tractatus.

Per la dio gratia inpaza ouero fornida la pratica del mesurare la longeza, seguita la praticha del mesurare la largeza ouero le superfitie. Ma perche el e de doe generatione superficie, perche alchuna superficie e diforme, cioe che non ha linie dritte ny circhulare, ma parte drite e parte curve inregularmente, como se atroua in di colli, e alchuna e uniforme, la quale a linie drite ouero circhulare: ne la prima non se ne dica niente, ma de la uniforme, la quale ha due parte, perche alchuna e rectilinea, e alchuna e curvilinea. Prima se dira de la rectilinea, e py de la curuilinea. Ma ad auere noticia de la prima, questo bisogna intendere innanci, che una figura ouero superficie rectilinea, la quale abia piu cha tri anguli, cioe cantoni, se de resoluere in tanti trianguli, como ley sera in lordine de le figure. E la *prima* figura rectilinea e lo *triangulo;* la *seconda* e lo *quadrangulo;* e la *terza* e lo *pentagono;* e la *quarta* e lo *exagono;* e la *quinta* e lo *eptagono,* como tu vidi qui. La necessitade de questa resolutione e, perche la quantitade de quelle superficie le sono per le quantitade de li trianguli, in di quali fino resolunde, perche lo triangulo e regula de quelle, perche e la prima

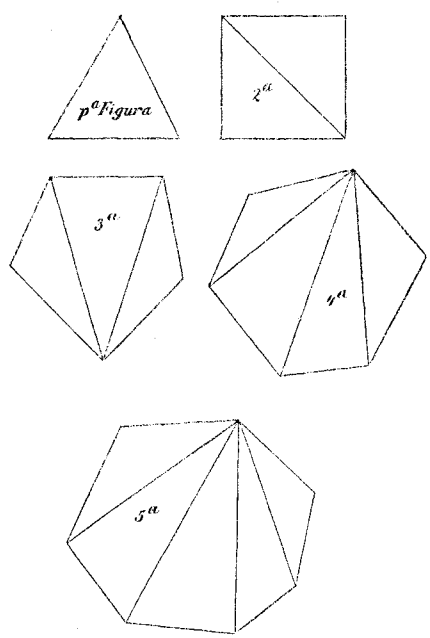


Fig. 1—5.

rechten Schattens genannt und die Theile von *nm* Punkte des verkehrten Schattens und die Zahl 12 endigt im Punkte *n*, die Zahlen werden aussen herum geschrieben. Zur Messung von *da* heissen aber die Theile von *nm* Punkte des rechten Schattens und die Theile von *mf* Punkte des verkehrten Schattens, und die Zahl 12 endigt im Punkte *m*; diese Zahlen werden innerhalb geschrieben. Will man jetzt *ed* messen, so befinde sich das Auge in der Seite *gn* im Punkte *h*, in dem die Sehlinie *hfd* gezogen ist. Nun multipliciere man *fc* mit *gf* und theile das Produkt durch *gh*, so erhält man *ed*. Befindet sich aber das Auge zwischen *n* und *m* im Punkte *l*, so multipliciere man *ef* mit *ml* und theile das Ergebnis durch *gn*, so erhält man *ck*. Will man aber *db* messen, so ziehe man die Gerade *gb*, welche die Gerade *fm* im Punkte *i* schneide, und bringe das Auge in *g*. Dann multipliciere man *gc* mit *if* und theile das Produkt durch *fm*, so erhält man *cb*, also auch *db*. Fällt aber die Gesichtslinie zwischen *n* und *m* in den Punkt *l*, so multipliciere man *gc* mit *gn* und theile das, was herauskommt, durch *nl*, so findet man *ca* und folglich auch *da*, wie in der Figur 37 zu sehen ist.

Zweiter Traktat.

Nachdem so durch Gottes Gnade die Anweisung, Längen zu messen, beendigt oder vollendet ist, folgt nun die Anweisung die Breite oder die Flächen zu messen. Da aber die Flächen von zweierlei Art sind, nämlich eine Fläche ist ungleichförmig, das heisst sie besitzt weder gerade noch kreisförmige Linien, sondern zum Theil gerade zum Theil krumme in unregelmässiger Weise, wie man sie auf Bergen findet, die andere ist gleichförmig; sie hat entweder gerade Linien oder kreisförmige zur Begrenzung: deshalb werde ich von der ersten Art nichts sagen, sondern allein von den gleichförmigen. Diese zerfallen in zwei Arten, die eine ist geradlinig, die andere krummlinig. Zuerst wird von der geradlinigen, dann von der krummlinigen die Rede sein. Um aber zur Kenntnis der ersten zu gelangen, muss man zunächst folgendes wissen, dass nämlich jede geradlinige Figur oder Fläche, die mehr als drei Winkel, das sind Ecken, besitzt, in soviel Dreiecke zerlegt werden muss, als ihre Ordnungszahl in der Reihe der Figuren ist. Die *erste* geradlinige Figur ist das *Dreieck,* die *zweite* ist das *Viereck,* die *dritte* das *Fünfeck,* die *vierte* das *Sechseck,* und die *fünfte* das *Siebeneck,* wie man hier sehen kann. Die Nothwendigkeit dieser Zerlegung folgt daraus, dass der Inhalt dieser Flächen sich aus dem Inhalte der Dreiecke ergiebt, in welche sie zerlegt werden, denn das Dreieck ist die Regel für sie, da es die erste geradlinige Figur ist. Dadurch wird die

figura rectilinea. E per questo la opera se aleuiara in due conclusione. La prima sera de la quantita del triangulo, la seconda sera de la sciencia de la azonzimento de li triangoli in sema, acioche se sapia tute le altre superficie.

Prima conclusio. Quando a la prima conclusione e da fir data la dotrina per atrouare la quantita de la perpendichulare da fir menada in del triangulo da uno deli anguli al lado oposito. La quale perpendichulare cosi fira manifesta, perzo che el triangulo proposito ouero che le rectiangulo, ouero che le ambligonio, ouero che le oxigonio. El primo ha uno angulo recto, el secondo ha uno angulo obtus, cioe mazore che recto, el terzo ha tutti li anguli hachuti, cioe menori che recti. Lo angulo recto e fatto de la linea recta chazando sopra laltera linea retta, quando e le aqualiata al so paro, como e manifesto, quando la linea *ab* chade sopra la linea *dbc*, siche lo angulo *dba* sia equale a lo angulo *cba* (Fig. 6).

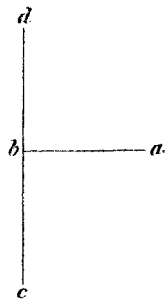


Fig. 6.

Se adunque el triangulo sera rectiangulo, da lo angulo retto mena la perpendichulare al lado oposito, come he in del triangulo *abc*. Perche lo angulo *abc* he recto, impercio da lo angulo *b* mena la linea *bd* perpendichular sopra la linea *ac*, alora multiplica *bc* per si medesimo, e quelo, che ne viene, partilo per *ac*, et aueray la linea *dc*. Lo quadrato de la quale tralo del quadrato de la linea *bc*, et del | rimanente la radix quadrata sera *bd*, la quale si circhava (Fig. 7).

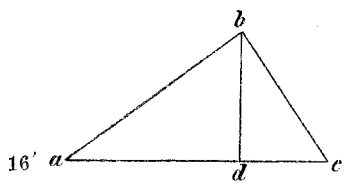


Fig. 7.

Ma se lo triangulo sera ambligonio, si como el triangulo *afg*, de lo quale lo angulo *fag* sie obtuso, prima mena la linea *fa* ultra *a*, siche dal ponto *g* fora del triangulo se poss menare una linea perpendichulare sopra la linea *fa* producta, la qual perpendichulare sia *hg* sopra *fah*, siche lo angulo *fhg* fora del triangulo sia recto. Anchora dal ponto *a* obtuso mena una linea *ak* perpendiculare sopra la linea *fg*. Alora tuti doi li quadrati de *fa* e de *ag* trali de quadrato de *fg*, e la mitade del rimanente partilo per la linea *fa*, et haueray *ah*. Poy multiplica *fa* per *fh*, e quelo, che ne viene, partilo per *fg*, et haueray *fk*, de la quale el quadrato trallo del quadrato de *fa*, e de lo rimanente la radix quadrata sera *ak*, el qual tu cerchi (Fig. 8).[1])

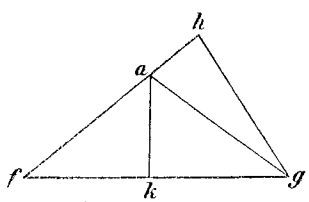


Fig. 8.

ganze Betrachtung in zwei Aufgaben gelöst werden. Die erste wird den Inhalt des Dreiecks behandeln, die zweite beschäftigt sich mit der Kenntnis des Zusammenfassens der Dreiecke, um dadurch alle andern Flächen finden zu können.

Erste Aufgabe. Was die erste Aufgabe betrifft, so muss zuerst gezeigt werden, wie man die Länge des Lothes finden kann, das man in einem Dreiecke von einer Ecke aus auf die gegenüberliegende Seite fällen kann. Dieses Loth lässt sich so bestimmen, je nachdem das vorgelegte Dreieck rechtwinklig oder stumpfwinklig oder spitzwinklig ist. Das erste besitzt einen rechten Winkel, das zweite einen stumpfen Winkel, d. h. grösser als ein rechter; das dritte hat alle seine Winkel spitz, d. h. kleiner als rechte. Ein rechter Winkel wird von einer geraden Linie gebildet, welche auf eine andere Gerade fällt, wenn er seinem Nebenwinkel gleich ist, wie es z. B. deutlich ist, wenn die Gerade ab (Fig. 6) auf die Gerade dbc so fällt, dass der Winkel dba gleich dem Winkel cba ist.

Ist nun das Dreieck rechtwinklig, so ziehe man von dem rechten Winkel die Höhe nach der Gegenseite, wie es im Dreiecke abc geschehen ist (Fig. 7). Da dort der Winkel abc ein rechter ist, so ziehe man von dem Punkte b die Gerade bd senkrecht auf die Gerade ac, dann multipliciere man die bc mit sich selbst und theile das Ergebnis durch ac, so erhält man die Gerade dc. Jetzt ziehe man ihr Quadrat von dem Quadrate der Geraden bc ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die bd, welche gesucht wurde.

Ist aber das Dreieck stumpfwinklig, wie es das Dreieck afg ist, dessen Winkel fag stumpf sei, so verlängere man zunächst die Gerade fa über a hinaus, so dass man vom Punkte g aus ausserhalb des Dreiecks eine senkrechte Gerade auf die verlängerte Gerade fa fällen kann. Dieses Loth sei hg auf fah, so dass also der Winkel fhg ausserhalb des Dreiecks ein rechter ist. Auch von der Spitze a des stumpfen Winkels ziehe man die Gerade ak senkrecht auf die Gerade fg. Nun subtrahiere man die beiden Quadrate der Geraden fa und ag von dem Quadrate der fg und dividiere die Hälfte des Restes durch die Gerade fa, so erhält man ah. Darauf multipliciere man fa mit fh und das Ergebnis theile man durch fg, so erhält man fk. Das Quadrat davon subtrahiere man von dem Quadrate der fa, so ist die Quadratwurzel des Restes die ak, die man sucht (Fig. 8).[1])

1) Hier ist auf umständlichem Wege $fk = \frac{fa^2 + fg^2 - ag^2}{2fg}$ gefunden. Dass auch gh als Höhe des Dreiecks angesehen werden kann, scheint ihm nicht zum Bewusstsein gekommen zu sein, so wenig als für das rechtwinklige Dreieck die Benutzung einer Kathete als Höhe.

Ma se lo triangulo e oxigonio, como he el triangulo *hnp*, de qual angulo tu voy, menare la perpendichulare al lado oposito, si como he *hd* al lado *np*. Alora lo quadrato de uno de lo doy ladi, cioe *hp*, tralo de tutti doy le quadrati de li altri ladi, e del remanente la mitade partila per la linea, sopra la quale he la perpendichulare, cioe per la linea *np*, et aueray la linea *nd*, de la quale
17 el quadrato tralo del quadrato | de *nh*, e de lo rimanente la radix quadrata sera la linea *hd*, la quale se circha. Ma sel quadrato *hn* fosse stato trato del quadrato *hp* et de *np* azonti in sema, e del rimanente la mitade fosse partita per *np*, haueressi hauuto *dp* (Fig. 9).

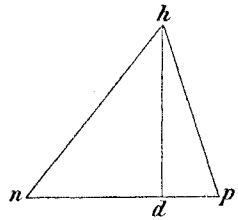


Fig. 9.

Ele aduncha manifesto al geometra, queste cosse esser ditte del triangolo, chi ha tutti li ladi inequali, el quale triangulo se chiama ascalenon, ouero piu longo da una de le parte cha le oltre doe, ouero triangolo gradatum. Ma se tuti li ladi del triangulo fusseno equali, ouero doy de lo ladi precisamente, piu facilmente se trouarebe la perpendichulare, percioche nel triangulo equilatero el quale etiamdio se chiama equicris ouero oxigonio, si como he nel triangolo *abc*, la perpendicholare *ad* partisse per 2 parte equale el lado *bc*, et per consequente la linea *dc* sie manifesta. De la quale el quadrato tralo del quadrato *ac*, e de lo rimanente la radix quadrata sera *ad* (Fig. 10).

Ma in del triangolo de doy ladi equali, el quale se chiama isoceles, similmente la perpendichulare menada al lado inequale partisse quelo lado per mezo. Adoncha el quadrato de una mitade, cioe *gh*, tralo
17′ del quadrato *gd*, e del rimanente la radix | quadrata sera *dh*, el qual e, che tu cerchi (Fig. 11—13).

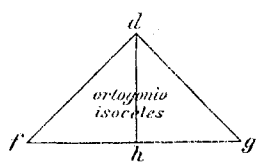


Fig. 11.

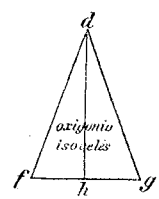


Fig. 12.

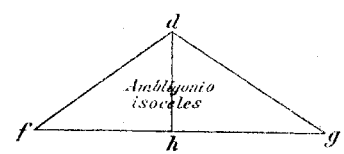


Fig. 13.

Aduncha hauuta la perpendichulare multiplica la soa mitade per el lado, sopra el qualle ela chade, et aueray la superficie ouero larea del triangulo, la qual cossa dice la prima conclusione.

Secundo conclusio. La secunda conclusione si se fa. Azunzi le quantitade zia atrouate de doy ouero de tri trianguli, ouero quanti tu voy, insieme, et haueray quello, che tu circhi.

Ist aber das Dreieck spitzwinklig, wie es das Dreieck *hnp* ist, so ziehe man von einer beliebigen Ecke das Loth nach der Gegenseite, wie etwa *hd* es für die Seite *np* ist. Darauf subtrahiere man das Quadrat der einen der beiden Seiten, etwa von *hp*, von der Summe der Quadrate der andern Seiten und theile die Hälfte des Restes durch die Gerade, auf der das Loth steht, also durch die Gerade *np*, so erhält man die Gerade *nd*. Ihr Quadrat ziehe man von dem Quadrate der *nh* ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die Gerade *hd*, welche man sucht. Wenn aber das Quadrat der *hn* von der Summe der Quadrate der *hp* und *np* abgezogen würde und die Hälfte des Restes durch *np* dividiert, so würde man die *dp* erhalten (Fig. 9).

Dem Geometriekundigen ist nun klar, dass das Vorhergehende von solchen Dreiecken gesagt ist, die lauter ungleiche Seiten besitzen. Ein solches Dreieck heisst hinkend (*scalenon*), oder auf einer Seite länger als auf der andern, oder stufenförmig (*gradatum*). Wenn aber alle Seiten eines Dreiecks einander genau gleich sind, oder zwei von ihnen, so kann man die Höhe viel leichter bestimmen. Denn in dem gleichseitigen Dreiecke, das auch *equicris* oder spitzwinklig heisst, wie es sich z. B. im Dreiecke *abc* verhält, theilt dis Höhe *ad* die Seite *bc* in zwei gleiche Theile, und es ist daher die Länge *dc* ohne weiteres bekannt. Nun ziehe man ihr Quadrat von dem Quadrate der *ac* ab, so ist die Quadratwurzel des Restes die *ad* (Fig. 10).

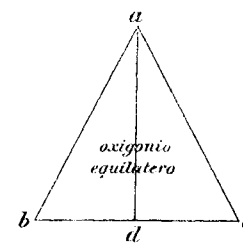


Fig. 10.

In dem Dreiecke mit zwei gleichen Seiten aber, das gleichschenklig genannt wird, halbiert in ähnlicher Weise die nach der ungleichen Seite geführte Höhe diese Seite. Man ziehe also ebenfalls das Quadrat einer Hälfte, also von *gh*, von dem Quadrate der *gd* ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die *db*, die man sucht (Fig. 11—13).

Nachdem man so die Höhe erhalten hat, multipliciere man ihre Hälfte mit der Seite, auf welcher sie steht, so erhält man dadurch die Fläche oder den Inhalt des Dreiecks, und das heisst die erste Aufgabe.

Zweite Aufgabe. Die zweite Aufgabe wird so gelöst. Man addiert die schon gefundenen Inhalte zweier oder dreier Dreiecke, oder von so vielen, als man will, zusammen, und erhält so das, was man sucht.

Per altra via puo fir demostrada geometricamente. Cioe, prima a cescheduno triangulo za cognosuto circha el quadrato, che el sia equale, da poy a doy quadrati de doy trianguli circha uno quadrato che gesia equale a li doy triangulli, e se a questo quadrato agiugneray el quadrato del terzo triangulo, atroueray uno quadrato equale a li tri trianguli, e cossi de li altri. Adoncha questa operatione requere due cosse.

La prima he, atrouare el quadrato equale al triangulo, che se fa per questo modo. Agiugne in dritto la mitade de la perpendichulare atrouata a lo lado sopra el quale essa perpendichulare chade, e sopra la mitade de questo cunposito mette el centro e descriue uno mezo circhulo tochando la estremitade de la linea cumposita. Posa dal ponto del cunzunzimento de quale due linie driza la perpendichulare in fina a la cir-
18 cumferencia, la qual perpendichulare multiplicada | in si medesima da lo quadrato equale a lo triangulo proponudo. Como he proponudo el triangulo *abe* (Fig. 14), in del quale la perpendichulare *bc*, de la qual la

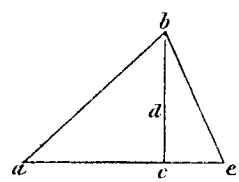


Fig. 14.

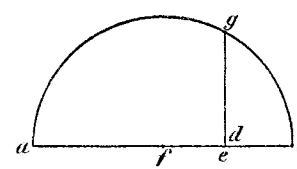


Fig. 15.

mita *dc* e da fir multiplicada in *ae*, acioche se abia la quantita del triangulo proponudo. Zonze *ae* cum *dc*, e tira *aedc* tuta una linea (Fig. 15), si che medesimo ponte sia *e*, *d*. Alora parti tuta la linea *ac* per mezo in ponte *f*, in del quale mesa la ponta del sexto se descriua mezo uno circhio *agc*. Posa dal ponto de la coniuncione de tute doe le linee, cioe dal ponto *e*, *d* fiza, trata una perpendichulare *eg* in fina a la circunferentia del circhulo. Alora questo perpendichulare sia lo lado del quadrato, chi se circhaua, siche el quadrato fatto per la multiplicatione de quela perpendichulare in si medesima sie equale al triangulo proponudo.[1])

La secunda cossa, la quale requere questa operatione, sie a sauere azonzere el quadrato a lo quadrato. La qual cossa facilmente se fara, quando tu haueray doe ladi de doy quadrati, si como te ho insegnato de uno. Adoncha queli doy quadrati azonzeli per sie fatto modo, che li faceno uno angulo retto. E allora el terza lado oposita a

1) Hier fügt der lateinische Text hinzu: Cuius perpendicularis notitiam habebis in numeris, si quadratum suum fuerit signatum numero quadrato, aliter vero non. Ut si linea *ad* esset 9, *dc* 4, linea *ge* erit 6.

Auf anderem Wege kann man die Lösung geometrisch darstellen. Zunächst sucht man nämlich zu jedem schon gefundenen Dreiecke das ihm gleiche Quadrat, darauf bestimmt man zu den zwei Quadraten von zwei Dreiecken ein Quadrat, das diesen beiden Dreiecken gleich ist. Fügt man dann zu diesem Quadrate das Quadrat des dritten Dreiecks hinzu, so findet man ein Quadrat, das den drei Dreiecken gleich ist, und so macht man es weiter. Dieses Verfahren verlangt also zweierlei.

Das erste ist, ein Quadrat zu finden, das einem Dreiecke gleich ist, und das macht man folgendermaassen. Man füge die Hälfte der gefundenen Höhe in gerader Linie der Seite hinzu, auf welcher sie senkrecht steht, und den Halbierungspunkt dieser zusammengesetzten Geraden mache man zum Mittelpunkte und beschreibe einen Halbkreis, der durch die beiden Endpunkte der zusammengesetzten Geraden geht. Dann errichte man im Vereinigungspunkte der beiden Geraden das Loth bis zum Kreisumfange, so ist das Loth mit sich selbst vervielfacht gleich dem vorgelegten Dreieck. Ist z. B. das Dreieck *abe* (Fig. 14) gegeben, in welchem die Höhe *bc* heisse, dann ist ihre Hälfte *dc* mit *ae* zu multiplicieren, um den Inhalt des gegebenen Dreiecks zu erhalten. Man verbinde *ae* mit *dc* und ziehe also die *aedc* als eine einzige gerade Linie, so dass *e* und *d* ein und derselbe Punkt sind. Nun halbiere man die ganze Gerade *ac* im Punkte *f*, setze in denselben die Spitze des Zirkels und beschreibe den Halbkreis *agc*. Dann errichte man in dem gemeinsamen Punkte der beiden Geraden, nämlich in dem festen Punkte *e*, *d*, das Loth *eg* bis zum Kreisumfange, dann ist dieses Loth die Seite des Quadrates, das man sucht, so dass also das durch Multiplikation dieses Lothes mit sich selbst entstehende Quadrat dem vorgelegten Dreiecke gleich ist (Fig. 15).[1])

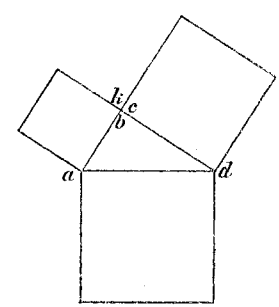


Fig. 16.

Das Zweite, was unsere Aufgabe erfordert, besteht in der Kenntnis, ein Quadrat mit einem andern zu vereinigen. Diese Aufgabe ist leicht zu lösen, wenn man die beiden Seiten der beiden Quadrate gefunden hat, wie ich es eben für eins gezeigt habe. Diese beiden Quadrate lege man nun so aneinander, dass sie einen rechten Winkel bilden, dann ist die dritte Seite, welche diesem Winkel

1) Die Grösse dieses Lothes als Zahl erhält man nur dann, wenn das Quadrat als eine Quadratzahl herauskommt, auf andere Weise nicht. Wenn z. B. die Gerade $ad = 9$, $dc = 4$ wäre, so würde die Gerade $ge = 6$ werden. (Zusatz des lateinischen Textes.)

questo angulo fara el quadrato, el quale a queli doy. Exempli gratia siando proponudi doy ladi di doy quadrati *ab* et *cd*, azonzi queli a langulo *k* drito. Alora la linea *ad* fa el quadrato equale ali preditti doy (Fig. 16).

18′ Ma el e da stendere queste cosse | za ditte facilmente, como he ditto, fir tratade, quando li ladi di trianguli, in di quali le altre superficie se resolue, serano noti. Ma non tuti, inanzi pochi sino noti non solamente in li figure rectilinie inregulare, ma etiandio in le regulari, per la qual cosa seguita non essere molto da estenderse in questo parlare. Noma che per le regulari inscriptibili in del circhio in poy usare la tabula de le corde e delle archi. E per li altri resolue in quanti trianguli tu poy, prendando la propinquitade de la certeza.

Ivi e ada notare, che in alcune libro de mechanici fi messo lo atrouamento de la quantita del triangulo altramente per si fatto modo.[1]) Prima multiplica la mitade de la somma de tuti li ladi azonti in sema per la diferentia di uno lado e de la mita de la ditta soma. Item secondo multiplica quello, che ne venuto, per la diferentia del secondo lado e de la mita de la ditta somma. Item terzo multiplica quello, che ne venuto, per la diferentia de lo terzo lado e de la mita de la ditta somma, alora la radix quadrata de quello, che ne venuto, sera larea del ditto triangulo. Exempli gratia in del triangulo *abc* (Fig. 17) sia *ab* 3, *ac* 4, *bc* 6. Perche la somma de tutti li ladi sie 13; impercio la sua mita, cioe $6\frac{1}{2}$, multiplichela per $3\frac{1}{2}$, perche la mitade auanza lo lado *ab* per $3\frac{1}{2}$, ne viene $22\frac{3}{4}$. Adunque | multiplica $22\frac{3}{4}$ per $2\frac{1}{2}$, perche la mitade auanza lo lado *ac* per $2\frac{1}{2}$, ne viene $56\frac{7}{8}$; anchora multiplica $56\frac{7}{8}$ per $\frac{1}{2}$, perche la predita mitade de li ladi auanza lo lado *bc* per $\frac{1}{2}$, e ne viene $28\frac{7}{16}$: dicono adunche questi, che la radix quadrata de $28\frac{7}{16}$ e larea del ditto triangulo. Dico, che le ele vero, cunzosiacosa adunca, che quella pratica sia piu lezera cha questa, che jo ho messa per lo secondo de la geometria de Euchlides, impercio e da usare la praticha de li Mechanici.[2])

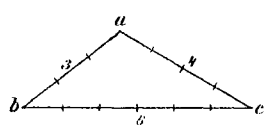


Fig. 17.

---

1) Das hier gemeinte *Buch über Mechanik* ist der *Liber de ponderibus* des Jordanus Nemorarius, an dessen Ende, merkwürdig genug, der Beweis des Heron'schen Lehrsatzes vom Dreiecksinhalte angeschlossen ist.

2) Hier steht im lateinischen Texte so: Dico ego, quod hoc est verum. Nam, cum radix quadrata 28 cum $\frac{7}{16}$ fit 5 integra $19^{m}\,57^{2a}\,38^{3a}$, quae sunt 5 integra et minus quam $\frac{1}{3}$, illa est quantitas prefati trianguli, quod verum est secundum practicam demonstrativam suprapositam pro triangulo obtuso. Quia, cum duo

gegenüberliegt, die Seite desjenigen Quadrates, das beiden zusammen gleich ist. Sind z. B. die beiden Seiten ab und cd zweier Quadrate gegeben, so lege man sie rechtwinklig aneinander in k, dann ist das Quadrat über der Geraden ad gleich den beiden vorgenannten (Fig. 16).

Es ist aber zu beachten, dass die eben auseinandergesetzten Sachen leicht zu behandeln sind, wenn die Seiten der Dreiecke, in welche die andern Flächen sich zerlegen lassen, bekannt sind. Aber es sind nicht alle, vielmehr sehr wenige bekannt, nicht nur in den unregelmässigen geradlinigen Figuren, sondern selbst in den regulären, folglich kann man sich darüber nicht viel weiter verbreiten, ausser dass man für die regulären in einen Kreis einschreibbaren Figuren sich der Tafel der Sehnen und Bogen bedienen kann. Die andern aber zerlege man in soviel Dreiecke als man kann, indem man sich der Genauigkeit soweit als möglich nähert.

Es ist noch zu bemerken, dass in einem Buche über Mechanik die Bestimmung des Inhaltes eines Dreiecks anders, und zwar in folgender Weise gelehrt wird.[1]) Zunächst multipliciere man die Hälfte aller Seiten zusammengenommen mit der Differenz zwischen einer Seite und der Hälfte genannter Summe; zweitens multipliciere man dieses Produkt mit der Differenz zwischen der zweiten Seite und der Hälfte genannter Summe; ebenso multipliciere man dieses Ergebnis mit der Differenz zwischen der dritten Seite und der Hälfte genannter Summe, dann ist die Quadratwurzel des hieraus entstehenden Produktes der Inhalt des gegebenen Dreiecks. Es sei z. B. ein Dreieck abc gegeben, es sei $ab = 3$, $ac = 4$, $bc = 6$. Da also die Summe aller Seiten 13 beträgt, so multipliciere man die Hälfte davon, das ist $6\frac{1}{2}$, mit $3\frac{1}{2}$, da diese Hälfte die Seite ab um $3\frac{1}{2}$ übertrifft; es entsteht daraus $22\frac{3}{4}$. Nun multipliciere man $22\frac{3}{4}$ mit $2\frac{1}{2}$, weil die halbe Summe die Seite ac in $2\frac{1}{2}$ übertrifft, so entsteht $56\frac{7}{8}$; nochmals multipliciere man $56\frac{7}{8}$ mit $\frac{1}{2}$, da die obige halbe Summe der Seiten die Seite bc in $\frac{1}{2}$ übertrifft; es kommt $28\frac{7}{16}$. Nun sagen also jene, dass die Quadratwurzel von $28\frac{7}{16}$ den Inhalt des genannten Dreiecks ergiebt. Ich sage, dass das richtig ist. Da nun dieses Verfahren viel leichter als jenes ist, das ich nach dem zweiten Buche der Geometrie des Euklides gezeigt habe, so muss man also die Methode der Mechaniker benutzen.[2])

---

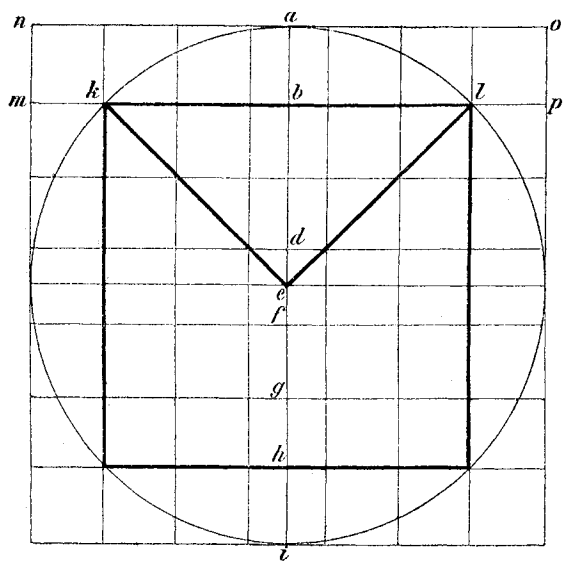
2) *Übersetzung des lateinischen Textes:* Ich sage, dass das richtig ist. Denn da die Quadratwurzel von $28\frac{7}{16}$ gleich $5^{g}19'57''38'''$ ist, das ist 5 Ganze und etwas weniger als $\frac{1}{3}$, so ist das der Inhalt genannten Dreiecks, und das ist auch nach der oben für ein stumpfwinkliges Dreieck auseinandergesetzten Beweismethode richtig. Nimmt man nämlich, da die beiden Quadrate über ac und ab

Secunda pars secundi tractatus.

Mi resta a dire de circhulo, per lo quale se mete 4 conclusione.

Prima conclusio. La prima, quando per lo diametro tu voray la circunferentia, multiplica el diametro per $3\frac{1}{7}$ parte del diametro. Exempli gratia perche el diametro del circhio *ai* sie 7 parte, quando tu lo multiplicharay per $3\frac{1}{7}$, aueray la circunferencia 22 parte (Fig. 18).[1])

Secunda conclusio. Quando voray la capacitade del circhio ouero el spacio infra la circunferentia, el quale si chiama la area, multiplica la mita del diametro in la mita de la circunferentia. Como he in lo exemplo proposito, multiplica 11 per $3\frac{1}{2}$, ed aueray $38\frac{1}{2}$, e tanto cuntiene el predito circhio de li quadrati fatti de le parte del diametro, si como e manifesta in questa figura (Fig. 19).[2])



19′

Fig. 19.

Per questo se cognose in quanto lo quadrato fatto del diametro auanza il circhio, perche el ditto, quadrato he 49, el circhio he $38\frac{1}{2}$, aduncha e lo $10\frac{1}{2}$.[3])

Ouero atrouaray larea | del circhio per questo modo piu facilmente, cioe multiplicaray el quadrato de la mita del diametro per $3\frac{1}{7}$.[4])

---

quadrata *ac* et *ab* simul iuncta sint 25, si illa dempta fuerint de quadrato *bc*, quod est 36, remanent 11. Cum medietatem diviserimus per lineam *ac*, videlicet 5 cum $\frac{1}{2}$ per 4, et fient 1 et $\frac{3}{8}$, quod est linea *da*, et sic linea *dc* est 5 et $\frac{3}{8}$. Quam si multiplicaverimus per *ac*, que est 4, fient 21 cum $\frac{1}{2}$, que si diviserimus per lineam *bc*, que est 6, exiet in numero quotientis 3 et $\frac{7}{12}$, quod est linea *ec*, cuius quadratum, quod est 12 et $\frac{121}{144}$, cum demptus fuerit de quadrato *ac*, quod est 16, remanebit quadratum linee *ae*, quod est $3\frac{23}{144}$, cuius radix quadrata est 1 int. $46^{m}\,39^{2a}\,12^{3a}\,36^{4a}$, quod est minus quam 1 et $\frac{4}{5}$, quantitas videlicet linee *ac*. Cuius medietatem, que est 0 in integris $53^{ma}\,19^{2a}\,36^{3a}\,18^{4a}$, cum multiplicaverimus per 6, videlicet per lineam *bc*, fiet ut prius, ut dicitur in libro mechanicorum, 5 int. $19^{ma}\,57^{2a}\,38^{3a}$, quod est intentum. Cum ergo practica illa sit levior quam ista, quam posui ex secundo geometrie Euclidis, ideo utendum est practica mechanicorum.

Zweiter Theil des zweiten Traktates.

Es bleibt mir noch übrig vom Kreise zu sprechen. Für ihn werde ich vier Aufgaben stellen.

Erste Aufgabe. Will man zuerst aus dem Durchmesser den Umfang erhalten, so vervielfache man den Durchmesser mit $3\frac{1}{7}$ des Durchmessers. Enthält z. B. der Durchmesser des Kreises ai 7 Theile, so erhält man durch Multiplikation desselbem mit $3\frac{1}{7}$ den Umfang zu 22 Theilen (Fig. 18).[1])

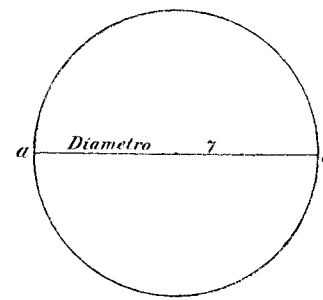


Fig. 18.

Zweite Aufgabe. Wünscht man die Fläche des Kreises oder den Raum zu finden innerhalb des Umfanges, den man Kreisinhalt nennt, so multipliciere man den Halbmesser mit der Hälfte des Umfangs. In dem vorgelegten Beispiele also multipliciere man 11 mit $3\frac{1}{2}$, dann erhält man $38\frac{1}{2}$, und soviel enthält der genannte Kreis von den Quadraten, welche über den einzelnen Theilen des Durchmessers gezeichnet sind, wie in nebenstehender Figur klar ist (Fig. 19).[2])

Daraus ersieht man auch, um wieviel das über dem Durchmesser errichtete Quadrat den Kreis übertrifft. Da dieses Quadrat 49 ist, der Kreis $38\frac{1}{2}$, so ist der Überschuss gleich $10\frac{1}{2}$.[3])

Oder man findet den Kreisinhalt viel leichter auf folgende Weise. Man multipliciere nämlich das Quadrat des Halbmessers mit $3\frac{1}{7}$.[4])

---

zusammen 25 betragen, dieses von dem Quadrate der bc, das gleich 36 ist, weg, so bleiben 11. Dividiert man hiervon die Hälfte durch die Gerade ac, nämlich $5\frac{1}{2}$ durch 4, so entsteht $1\frac{3}{8}$, das ist die Gerade da, und folglich ist die Gerade $dc = 5\frac{3}{8}$. Multiplicieren wir diese mit ac, das ist mit 4, so erhalten wir $21\frac{1}{2}$, und wenn dieses durch die Gerade bc, das ist durch 6, dividiert wird, so ergiebt sich als Quotient $3\frac{7}{12}$, das ist die Gerade ec. Nimmt man ihr Quadrat, das $12\frac{121}{144}$ beträgt, von dem Quadrate der ac, das ist 16, weg, so bleibt als Quadrat der Geraden ae $3\frac{23}{144}$ übrig. Die Quadratwurzel davon ist $1^{g}46'39''12'''36''''$, das ist weniger als $1\frac{1}{5}$, nämlich der Betrag der Geraden ac. Ihre Hälfte, nämlich $0^{g}53'19''36'''18''''$, multiplicieren wir mit 6, das ist mit der Geraden bc, so entsteht, wie oben nach dem Buche der Mechaniker gesagt ist, $5^{g}19'57''38'''$, was verlangt wurde. Da also jene Methode viel leichter ist, als diejenige, welche ich nach dem zweiten Buche der Geometrie Euklid's gezeigt habe, so muss man also die Methode der Mechaniker benutzen.

1) $U = 3\frac{1}{7}d = d\pi$. 2) $J = \frac{d}{2} \cdot \frac{U}{2}$.

3) $d^2 - J = 48 - 38\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$. 4) $J = r^2\pi$.

Tertia conclusio. Quando voray sapere la quantita de la portione minore cha mezo el circhio, multiplica lo archo de la portione per la quantitade de larea de tuto el circhio, e quelo, che ne vene, partilo per la quantitade de tutta la circunferentia, e da lo numero, che ne vegnera per la diuisione, remoue la quantita del triangulo fatto de duy semidiametri del ditto circhio e de la corda de la portione.[1]) Verbi gratia sia la portione, de la quale tu voy sapere la quantita, *kal* (Fig. 19), sia larcho suo $5\frac{1}{2}$; el quale multiplica per $38\frac{1}{2}$, e ne vegnera $211\frac{3}{4}$, el quale partilo per 22, et aueray $9^{gr}\,37^{m}\,30^{2a}$, el quale serualo. Da questo aduncha diray sotrare la quantita del triangulo, el quale te insegnato si. Perche $5\frac{1}{2}$ e la quarta parte del circhio, adunque $2\frac{3}{4}$ sie lotaua parte, cunciosia cosa che tuto sia 22 in el proposito. Inpercio intra la tabula de seno cun la otava parte de 360, cioe cun 45^{gr}, e tolge el sino suo dritto, el quale e $42^{gr}\,25^{m}\,35^{2a}$. El qual multiplica per $3\frac{1}{2}$, che le $\frac{1}{2}$ del diametro, e quelo, che ne vene, partilo per 60, et aueray la linia *bk*, la quale he $2^{gr}\,28^{m}\,20^{2a}$. E perche in questo chaso la linea *eb* e equale a la linea *bk*, inpercio aueray la linea *eb*, la quale e perpendichulare in del triangulo. Multiplica adunque la linea *bk* per la linea *be*, ed aueray
20 la quantitade del triangulo, | che circhato, secondo la dotrina de la prima conclusione de la parte precedente, la qual quantita sie $6^{gr}\,7^{m}\,32^{2e}$. La quale trala de quelo, che tu seruasse, cioe de $9^{gr}\,37^{m}\,30^{2e}$, et rimane $3^{gr}\,29^{m}\,58^{2e}$, el quale e la quantita de la portione, che se circhava.

Ma in di altri chasi, quando larcho de la portione non e precisamente la quarta parte del circhio, ma piu ouero meno, alora per hauere la linea *bk* fa cossi, come a zo ditto. Perche, se larcho de la portione sera 4, a respeto de tuta la circumferentia, la quale e 22, sige cunrespondera $65^{gr}\,27^{m}\,26^{2e}$, quando tuto el circhio sie 360^{gr}, e perche, per volere auere el sino del archo de la porcione del circhio proposito, bisogna cun la mitade de quelo, cioe $65^{gr}\,27^{m}\,16^{2a}$, intrare la tabula di sen, adunque intra in directo $32^{gr}\,43^{m}\,38^{2a}$, e atroueray $32^{gr}\,26^{m}\,17^{2a}$, el qual multiplicalo per $3\frac{1}{2}$ como de prima, e quelo, che ne viene partilo per 60, et aueray la linia *bk*, la qual e $1^{gr}\,53^{m}\,32^{2e}$. Ma per la linia *eb* faray cossi: larcho, cun el quale tu intrasti la tabula di sen, cioe $32^{gr}\,43^{m}\,38^{2e}$, trallo de 90, e cun lo rimanente, el quale e $57^{gr}\,16^{m}\,22^{2e}$, intraray quela medesima tabula di sen, in directo di qualo tu atroueray $50^{gr}\,28^{m}\,29^{2e}$. El quali multiplica per $3\frac{1}{7}$, e quelo, che ne viene, partilo per 60 si como da prima, ed averay la linea *eb*, la quale e $2^{gr}\,56^{m}\,39^{2e}$.

---

1) Kreisabschnitt, dessen Bogen $= 2\alpha$, ist gleich $J \cdot \frac{2\alpha}{360} - r^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Dritte Aufgabe. Will man die Grösse eines Kreisabschnittes kleiner als der Halbkreis finden, so multipliciere man den Bogen des Abschnittes mit der Grösse der ganzen Kreisfläche und dividiere das Produkt durch die Länge des ganzen Umfanges. Von der Zah , welche durch diese Division entsteht, ziehe man dann den Inhalt des Dreiecks ab, das durch die beiden Halbmesser des gegebenen Kreises und durch die Sehne des Abschnittes gebildet wird.[1]) Es sei z. B. der Abschnitt, dessen Grösse man berechnen will, *kal* (Fig. 19); der zugehörige Bogen sei $5\frac{1}{2}$. Ihn multipliciere man mit $38\frac{1}{2}$, so erhält man $211\frac{3}{4}$. Dieses durch 22 dividiert, ergiebt $9^0 37' 30''$; dies verwahre man. Hiervon, sagte ich, müsse man den Dreiecksinhalt abziehen, den man so erhält. Da $5\frac{1}{2}$ der vierte Theil des Kreises ist, so ist $2\frac{3}{4}$ der achte Theil, weil in unserem Beispiel der ganze Umfang gleich 22 ist. Nun gehe man also mit dem achten Theil von 360^0, das ist mit 45^0 in die Tafel der Sinus ein, und entnehme ihr seinen Sinus rectus. Derselbe ist $42^0 25' 35''$. Ihn multipliciere man mit $3\frac{1}{2}^0$, das ist mit dem Halbmesser, und theile das Ergebnis durch 60, so erhält man die Gerade $bk = 2^0 28' 30''$. Da für unsern Fall die Gerade *ab* gleich der Geraden *bk* ist, so haben wir damit die Gerade *ab*, das ist die Höhe des Dreiecks. Man multipliciere also die Gerade *bk* mit der Geraden *ba*, so hat man den Inhalt des Dreiecks, den man sucht, gemäss der Lehre der ersten Aufgabe des vorhergehenden Theiles. Dieser Inhalt ist $6^0 7' 32''$. Nun ziehe man dies von dem Gemerkten ab, nämlich von $9^0 37' 30''$, dann bleiben $3^0 29' 58''$, das ist die Grösse des Abschnittes, den man suchte.

In andern Fällen aber, wenn der Bogen des Abschnittes nicht genau den vierten Theil des Kreises ausmacht, sondern mehr oder weniger, dann gehe man zur Ermittelung der Geraden *bk* so vor, wie ich es eben gesagt habe. Da, wenn der Bogen des Abschnittes gleich 4 ist, diesem im Verhältnis zum ganzen Umfange, der 22 beträgt, $65^0 27' 26''$ entsprechen, wenn der ganze Kreis 360^0 hat, und da man zur Bestimmung des Sinus des Bogens des vorgelegten Kreisabschnittes mit der Hälfte von $65^0 27' 26''$ in die Sinustafel einzugehen hat, so gehe man in diese mit $32^0 43' 38''$ ein, und findet dann in der nämlichen Zeile $32^0 26' 17''$. Das vervielfache man mit $3\frac{1}{2}$, wie oben, und dividiere das Ergebnis durch 60, so erhält man die Gerade *bk*, die gleich $1^0 53' 32''$ ist. Zur Bestimmung der Geraden *eb* aber gehe man so vor. Man ziehe den Bogen, mit welchem man in die Sinustafel einging, also $32^0 43' 38''$ von 90^0 ab, und gehe mit dem Reste, das ist mit $57^0 16' 22''$, wieder in die Sinustafel ein, dann findet man in derselben Zeile $50^0 28' 29''$. Das multipliciere man mit $3\frac{1}{2}$ und theile das Ergebnis durch 60, wie oben, so erhält man die Gerade $eb = 2^0 56'' 39''$. So hat man also gefunden, dass die Gerade $bk = 1^0 53' 32''$ und

E si ay, che la linea *bk* sie $1^{gr}\,53^{m}\,32^{2e}$, e la linea *eb* sie $2^{gr}\,56^{m}\,39^{2e}$ siando el diametro del circhio 7.

20′ E se | tu traray de tuta larea del circhio la quantita de la minore portione za atrouata, rimanera la quantita de la mazore porcione.

Per questo se cognos, in quanta parte el quadrangulo fatto de la sagita de la portione del circhio e del diametro auanza la ditta portione. Ma la sagita el sino verso sie una medesima cosa, e perche in del primo chaso quela sagita, cioe *ab*, sie $1^{gr}\,1^{m}\,29^{2e}$, quando la multiplicarey per 7, aueray $7^{gr}\,10^{m}\,23^{2e}$, la quantita de tuto el quadrangulo *mnbapo*. Aduncha auanza la ditta portione in $3^{gr}\,40^{m}\,45^{2e}$.

Quarta conclusio. Quando tu saperay la proportione de doy circhuli, e tu voray sapere la proportione de li diametri, troua la radix quadrata de la proportione de li ditti circhuli. Exempli gracia se uno de li circhuli auanza laltro in 16, cioe che luno intra nel altro 16 volte, el diametro del mazore auanzara el minore in 4, cioe chel sera mazore 4 volte che laltro per diametro.[1])

Tertius Tractatus.

Mo per lo dio gracia diremo in questo terzo tratado de la mesura di corpi. Ma perche alcuni corpi sono regulari e alcuni inregulari, non diremo alcuna cossa de li segundi, cioe de li inregulari, cunçosiacossa che tra li corpi regulari alchuni siano non uniformalmente regulari, come
21 sono | le veze, e le piramide tronchate e non tronchate, et alchuni siano uniformalmente regulari, come he la spera, e lo chubo, e lo octoedron, e lo duodecedron, e lo incocedron, e la piramide de 4 basi triangulari equilateri, e la columna uniforme rotonda ouero laterata, e altri corpi uniformalmente regolari, io non diro de tuti, ma solamente de li seratili, e de le columne, e de le piramide, e de li chubi, e de le spere.

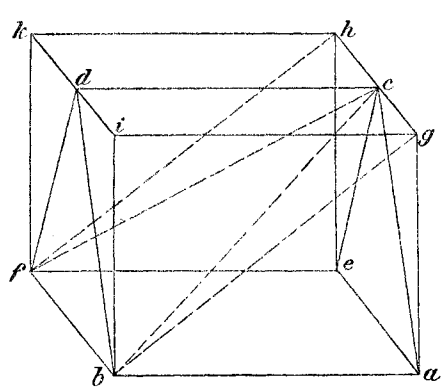


Fig. 1.

Prima conclusio. Quando tu hay lo seratile[2]) *aebfcd* (Fig. 1), del qual la basis quadrangulo *aebf* e la sumitade *cd*, aueray la portione *bfdc*. Compisse lo paralellogromo[3]) *abig*, *efkh*, cunçosiacosa adunque che el seratile parciale, cioe *gac*, *ibd* sia la mitade

die Gerade $eb = 2^0\,56'\,39''$ ist, wenn der Durchmesser des Kreises 7 beträgt.

Wenn man ferner den Betrag des kleinern Abschnittes, den man eben gefunden hat, von dem ganzen Kreisinhalte wegnimmt, so bleibt der Inhalt des grössern Kreisabschnittes übrig.

Durch diese Betrachtung erkennt man auch, um wieviel das von dem Pfeil des Kreisabschnittes und dem Durchmesser gebildete Rechteck besagten Abschnitt übertrifft. Pfeil und Sinus versus sind ein und dasselbe. Da nun im ersten Beispiele dieser Pfeil, das ist ab, gleich $1^0 1' 29''$ ist, so erhält man durch Multiplikation desselben mit 7 $7^0 10' 23''$, das ist der Gesamtinhalt des Rechtecks $mnbapo$. Es übertrifft also genannten Abschnitt um $3^0 40' 45'$.

Vierte Aufgabe. Kennt man das Verhältnis zweier Kreisinhalte und wünscht das Verhältnis der Durchmesser zu erhalten, so suche man die Quadratwurzel des Verhältnisses genannter Kreisinhalte. Wenn z. B. der eine den andern 16mal übertrifft, das heisst, wenn der eine in dem andern 16mal enthalten ist, so übertrifft der Durchmesser des grossen den des kleinern viermal, das heisst, er wird einen viermal so grossen Durchmesser besitzen als der andere.[1])

Dritter Traktat.

Nun werden wir mit Gottes Hilfe in diesem dritten Traktate von der Ausmessung der Körper reden. Da aber manche Körper regelmässig, andere unregelmässig sind, so wollen wir von der zweiten Art, das ist von den irregulären, nichts sagen. Obwohl unter den regelmässigen Körpern sich einige von nicht gleichförmiger Gestalt befinden, wie die Fässer und die abgestumpften sowie die nicht abgestumpften Pyramiden, andere aber gleichförmig regulär sind, wie die Kugel, der Würfel, das Oktaeder, das Dodekaeder, das Ikosaeder und die Pyramide mit vier gleichseitigen Dreiecken als Flächen, die gleichförmig runde Säule oder die eckige und andere gleichförmig regelmässige Körper, so werden wir doch nicht von allen handeln, sondern nur von den dreiseitigen Prismen, den Säulen, den Pyramiden, den Würfeln und der Kugel.

Erste Aufgabe. Hat man das dreiseitige Prisma[2]) $aebfcd$ (Fig. 1), dessen rechteckige Grundfläche $aebf$, die obere Kante aber cd ist, so erhält man das Stück $bfdc$ so. Man vervollständige das Parallelepiped[3]) $abig$, $efkh$, so dass das Theilprisma, nämlich gac, ibd, die

1) $J : J_1 = d^2 : d_1{}^2$, also $d : d_1 = \sqrt{J} : \sqrt{J_1}$.

2) *Seratile* ist dreiseitiges Prisma, genaue Übersetzung des griechischen Wortes.

3) Parallelogromo ist hier offenbar durch Parallelepiped zu übersetzen.

de tuto el primo. Similmente el seratile *hec*, *kfd*. Quelo, che se disse de luno se dixe de laltro. Se adoncha del primo seratile uoray mouere la porcione *bfcd*, la quale e a ti ignota, tu la saueray per questo modo. Perche per la 28 conclusione del $\frac{1}{11}$ libro de Uclides[1]) la superficie *bfgeh* seca el parallelogramo fatte per mezo, ma per la sesta del $\frac{1}{12}$ libro[2]) el seratile parciale *fkd*, *che* e triplo a la piramide *hcef*, aduncha e sesquialtero al residuo, el qual e *hcfkd*. Ma quelo residuo e equale per quela
21′ medesima raxone a lo residuo del altro seratile parciale, cioe *cgbdf* | aduncha uno seratile parciale e subsesquitercio a li altri doy residui agiunti insiema. Aduncha queli agiunti insiema trali de la mita de tuto el paralellogramo, e rimagnera la porcione quesita, percio che de quela porcione e de li diti doy residuy se fa la mita del paralellogramo.

Acio che per demostracione numerale sia manifesto quelo, che se dice, la largeza de la basis del seratile, la quale sia *bf*, sia 4, la longeza, la qual sie *av*, sia 16, e la largeza signata per la perpendichulare ducibile dal ponto *d* ad *bf* sia 5: adoncha *aebf* sie 64, e tuto el paralellogramo sie 320, e tuto el seratile 160, aduncha el parciale sie 80, de la quale la piramide sie $26\frac{2}{3}$, percio che la terza parte. Adoncha el residuo sie $53\frac{1}{3}$, ali quali 80 sie in proportione sexquialtera. Ma el doppio de quello residuo sie $106\frac{2}{3}$, el quale he a 80 in proporcione sexquiterzia. Tralo adoncha $106\frac{2}{3}$ de 160, resta $53\frac{1}{3}$, la quantitade de la porcione quesita, la quale somadamente parlando sie la terza parte del seratile.

Secunda conclusio. Ma quando fusse uno corpo in forma de secure ouero de cuneo, si como he el corpo *aec*, *bfd* (Fig. 2ᵃ—2ᵇ), ouero che piu propriamente se dise, seratile grosso in la superficie parte, del qualle la groseza sie *abcd*, ed in la inferiore parte strato, de lo qualle la sumitade sie la linea *ef*, | e vole se taiare da quello la porcione transversale acommenzando dal ponto *a* descendo verso *f*, la quale porcione sia *acg*, *bdh*, taiando dal tutto

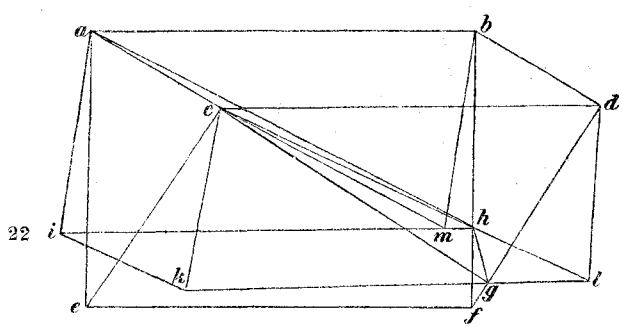


Fig. 2ᵃ.

1) Euklides ed. Campanus XI, 28: *Si superficies aliqua solidum parallelogramum super duas quaslibet oppositas superficies eius terminales et super has duas diametros secet, eandem superficiem corpus illud per equalia secare necesse est.*

Hälfte des ganzen ersten sei, ähnlich das Prisma *hec*, *kfd*. Was nämlich von dem einen gilt, gilt auch von dem andern. Will man also von dem ersten Prisma das Stück *bfcd*, das man nicht kennt, wegnehmen, so findet man es in folgender Weise. Da nach dem 28. Satze des 11. Buches Euklid's[1]) die Fläche *bfgch* das oben konstruierte Parallelepiped halbiert, nach dem 6. Satze des 12. Buches[2]) aber das Theilprisma *fkd*, *che* das Dreifache der Pyramide *hcef* ist, so ist sie also das Anderthalbfache des Restes, der *hcfkd* ist. Dieser Rest ist aber derselben Schlussfolgerung nach gleich dem Reste des andern Theilprisma, nämlich *egbdf*, folglich ist ein Theilprisma gleich drei Viertheil der beiden Reste zusammengenommen. Man ziehe also die Summe derselben von der Hälfte des ganzen Parallelepipeds ab, so bleibt der gewünschte Theil übrig, weil dieser Theil und die beiden besagten Reste die Hälfte des Parallelepipeds ausmachen.

Damit aber das Gesagte zahlenmässig klar werde, sei die Breite der Grundfläche des Prisma, die durch *bf* bezeichnet sei, gleich 4, die Länge, die *ab* heisse, sei 16, und die Höhe, welche durch das Loth gemessen wird, das man vom Punkte *d* auf *bf* fällen kann, sei 5, dann ist $aebf = 64$, und das ganze Parallelepiped ist 320, das ganze Prisma 160, das Theilprisma folglich gleich 80. Die Pyramide davon wird also $26\frac{2}{3}$ sein, da sie sein dritter Theil ist. Der Rest ist also $53\frac{1}{3}$, von welchem 80 das $1\frac{1}{2}$fache ist. Das Doppelte dieses Restes ist aber $106\frac{2}{3}$, was von 80 das $1\frac{1}{3}$fache ist. Man ziehe nun $106\frac{2}{3}$ von 160 ab, so bleibt $53\frac{1}{3}$ als Körperinhalt des gesuchten Stückes übrig, das ist, im Allgemeinen zu reden der dritte Theil des Prisma.

Zweite Aufgabe. Wenn aber der Körper die Gestalt eines Beiles oder eines Keiles hätte, wie der Körper *ace*, *bfd* (Fig. 2[a] und 2[b]) ist, oder, wie richtiger gesagt werden sollte, die eines Prisma, das im obern Theile stärker ist, dessen breiterer Theil *abcd* sei, im untern Theile zusammengezogen, wovon die Kante die Gerade *ef* sei, und man will von ihm ein Stück durch eine Transversalebene abschneiden, die im Punkte *a* anfängt und nach *f* zu absteigt, so sei dieses

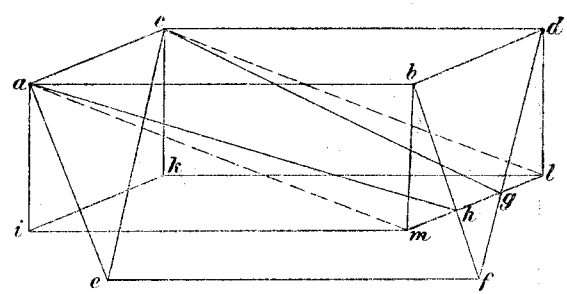


Fig. 2[3].

2) Euklides ed. Campanus XII 6: *Omne corpus seratile in tres piramides equales basesque triangulas habentes est divisibile.*

mediante la superficie *acgh*[1]) e de porcione inregulare, perche la summitade sua sie la linea *ac*, a la quale sie opposita da la parte inferiore la linea *gh* minore, e da la parte superiore la linea *bd* equale. Elieno aduncha due linee opposite *ah* et *cg* equale, anchora due *ab* et *cd*. Adunque sopra la superficie dada *acdb* driza el paralellogramo secondo lalteza de la linea *bh*, el quale sia *iklm*. Ma abi auertenzia che la linea *hg* sie parte de la linea *lm*, siche *mhgl* e tuta una linea drita, ma per la disegnatione del solido in piano pareno esse 3 linee.[2]) Aduncha la mitade de questo paralellogramo sie el corpo *bca*, *mdb* per la 28ª del 11° libro de Uclides, el qual corpo e manifesto, per la qual cosa el tuto e anchora manifesto. Cunçosiacosa adunque, che per el presuposito la linea *bh* sia manifesta, et la linea *mh* sie la mitade del exceso de *bd* sopra *hg*, sera manifesta *mb*. Ma ele doe linee *mb* et *hb* sono in una superficie, in la quale la linea *ab* sta perpendicular secundo la 5ª del 11°, conçosiacosa che per la 6ª del 12° el seratile fatto sopra la superficie *mbh* segundo la alteza *ab* sie triplo a la piramide *hmba*, sera quela piramide
22′ manifesta. Ma quela e equale a la piramide *lgde*, | la quale col corpo da fir remouesto fa la mitade del paralellogramo predito. Rimoueste aduncha quele due piramide de la dita mitade de paralellogramo, rimane el corpo da fir remouesto de tute lo seratile. Ma saperay el seratile parciale multiplicando la superficie *mbh* per la linea *ab*.

De cholumnis.

Tertia conclusio. Aueray la quantitade de la columna uniforme, ouero laterata ouero rotonda, multiplicando la quantila de labas per la longeza de la columna. Como in la columna rotonda *ab* multiplica larea del circhio *a* per la linea *ab*; et in la laterata columna multiplica la superficie *hefg* per la linea *hd*, et aueray intentum.[3])

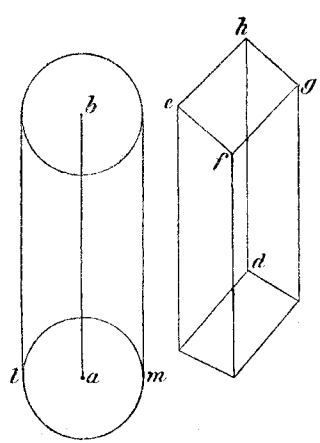


Fig. 3.

Quarta conclusio. A volere sapere la superficie de la columna rotonda, multiplica la circunferentia del circhio per la longeza de la columna.

Ma in la laterata multiplica la somma de tuti li ladi de labas per la longeza de la columna.

Como in la columna *ab* multiplica la circunferentia *lm* per la linea *ab*, et in la laterata multiplica la quantitade de

Stück *acg*, *bdh* von dem Ganzen abgeschnitten durch die Ebene *acgh*.[1]) Es ist aber ein unregelmässiges Stück, da seine obere Kante die Gerade *ac* bildet, welcher im untern Theile die kleinere Gerade *gh* gegenüberliegt, im obern Theile aber die ihr gleiche Gerade *bd*. Es sind also auch die beiden Gegenkanten *ah* und *cg* einander gleich, ebenso die beiden *ab* und *cd*. Nun errichte man über der gegebenen Fläche *acdb* ein Parallelepiped von der Höhe der Geraden *bh*, das *abcd*, *iplm* sei. Dabei beachte man aber, dass die Gerade *hg* ein Theil der Geraden *lm* ist, so dass *mhgl* eine einzige gerade Linie ist, wegen Verzeichnung des Körpers in der Ebene scheinen es aber drei Gerade zu sein.[2]) Nun ist die Hälfte der Parallelepipeds der Körper *bca*, *mdb* nach Satz 28 des 11. Buches Euklid's, dieser Körper ist aber bekannt, also ist auch der ganze bekannt. Da nun nach Voraussetzung die Gerade *bh* bekannt ist, und die Gerade *mh* die Hälfte des Überschusses der *bd* über die *hg* ist, so ist auch *mb* bekannt. Aber die beiden Geraden *mb* und *hb* befinden sich in einer Ebene, auf welcher die Gerade *ab* senkrecht steht nach dem 5. Satze des 11. Buches. Da nun nach Buch 12 Satz 6 das Prisma über der Fläche *mbh* und von der Länge *ab* das Dreifache der Pyramide *hmba* ist, so ist auch diese Pyramide bekannt. Sie ist aber gleich der Pyramide *lgde*, die mit dem wegzunehmenden Körper zusammen die Hälfte des vorgenannten Parallelepipeds ausmacht. Nimmt man also jene beiden Pyramiden von der besagten Hälfte des Parallelepipeds weg, so bleibt der von dem ganzen Prisma abzuschneidende Körper übrig. Das Theilprisma aber erhält man, indem man die Fläche *mbh* mit der Geraden *ab* multipliciert.

Von den Säulen.

Dritte Aufgabe. Man erhält den Körperinhalt der gleichförmigen Säule, mag sie rund oder eckig sein, indem man den Inhalt der Grundfläche mit der Länge der Säule multipliciert. So multipliciert man z. B. für die runde Säule *ab* den Inhalt des Kreises *a* mit der Geraden *ab*, und in der eckigen Säule multipliciert man die Grundfläche *hefg* mit der Geraden *hd*, so erhält man das Verlangte.[3])

Vierte Aufgabe. Um die Oberfläche der runden Säule zu finden, vervielfache man den Kreisumfang mit der Länge der Säule;

in der eckigen aber multipliciere man die Summe aller Seiten der Grundfläche mit der Länge der Säule.

In der Säule *ab* z B. multipliciere man den Umfang *lm* mit der Ge-

1) Es ist also ein schief abgeschnittenes Prisma zu bestimmen.

2) Wir haben in Fig. 2[a] die Figur Leonardo's gegeben, während Fig. 2[b] die richtige Gestalt giebt.

3) $V = g \cdot h$.

4 linee, cioe *eh*, *hg*, *gf*, *fe*, per la linea *dh*, et aueray intentum (Fig. 3).[1])

De piramidibus.

Quinta conclusio. Se voray la quantita de la piramide equialta, si como e de la columna, toglie la terza parte de la columna. Si como e in la colomna *ab*, se voray sapere la piramide *lam*, sapi chele la terza parte de la colonna *ab*, et in la colomna laterata semelmente la piramide *nko* e la terza parte de la dita colomna (Fig. 4).[2])

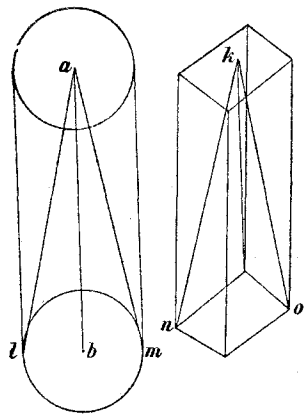


Fig. 4.

Sexta conclusio. Ma quando tu voray la superficie de la piramide, sapi, che secundo la opinione de alcuni ela e la mitade de la superficie de la colomna. Ma questo non e vero, perche ele necessario, che la superficie de la piramide sia mazore cha la mitade de la superficie de la colomna, cunçosiacosa, che la ypotemissa[3]) sia mazore cha lo asale. Tu aueray adunque la quantitade de la superficie proponuda per questo modo, ouero che la colomna laterata, ouero chele rotunda. Sele laterata, multiplica la mita del lado de la basis per la ypotemissa, ed aueray la superficie triangulare de la alteza de la piramide. Et cosi per rispetto de tutti li ladi de la bassis. Como se de la colomna trilatera la basis *abf* (Fig. 5) area sia ped. $5 \cdot 11^{m} \cdot 46^{2a}$, perche la perpendichulare *fe* sie pe. 3, e cescaduno de
23′ li ladi de la bassis sie pe. $3 \cdot 27^{m} \cdot 50 \cdot 45 \cdot 56 \cdot 44$, | e sia *d* el centro del circhio da fir fatto circha la bassis, e sia la linea *de*, la alteza de la colomna, 4 p^{e}, conçosiacosa adunque che per la 8^{a} dell 3° la linea *cd* sia pe. 1, sera la ypotemissa *ce* pe. $4 \cdot 7^{m} \cdot 23^{2a}$. Multiplica adunca *ce* per *ac*, et aueray la superficie proponuda *aeb*, la qualle e pe. $7 \cdot 8^{m} \cdot 27^{2a}$. Adunque la superficie quadrangula de la columna sie pe. $13 \cdot 5^{m} \cdot 23^{2a}$: adunque la linea *ae* e equalle a la linea *be*, auegnandio che in questa solla figura non appare a loghio per la discripsione del corpo in piano.

Ma quando la columna sie rotunda, descrive uno circhio, del

---

1) $O = U \cdot h$. 2) $J = \frac{g \cdot h}{3}$.

3) Unter Hypotenuse versteht er die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Höhe der Pyramide, die andere Kathete

raden *ab*; in der eckigen multipliciere man den Betrag der vier Geraden, nämlich *eh*, *hg*, *gf*, *fe* mit der Geraden *dh*, so erhält man das Verlangte (Fig. 3).[1])

Von den Pyramiden.

Fünfte Aufgabe. Will man den Inhalt einer Pyramide finden, die ebenso hoch ist als die Säule, so nehme man den dritten Theil der Säule. Will man so z. B. für die Säule *ab* die Pyramide *lam* bestimmen, so weiss man, dass sie der dritte Theil der Säule *ab* ist, und für die eckige Säule ist die Pyramide *nok* in ähnlicher Weise der dritte Theil genannter Säule (Fig. 4).[2])

Sechste Aufgabe. Will man aber die Oberfläche der Pyramide bestimmen, so wisse man, dass nach der Meinung einiger sie die Hälfte der Oberfläche der Säule ist. Das ist aber nicht richtig, da die Oberfläche der Pyramide nothwendigerweise grösser sein muss als die Hälfte der Oberfläche der Säule, da ja die Hypotenuse[3]) grösser ist als die Seitenlinie. Man erhält nun den Werth der vorgelegten Oberfläche in folgender Weise, mag sie eckig oder rund sein. Ist sie eckig, so multiplicere man die Hälfte der Seite der Grundfläche mit der Hypotenuse, so erhält man die dreiseitige Fläche der Höhe der Pyramide, und so verfährt man für alle Seiten der Grundfläche. Wenn etwa der Inhalt der Grundfläche *abf* der dreiseitigen Säule (Fig. 5) 5 Fuss 11′46″ wäre, weil die Höhe *fc* = 5 Fuss und jede der drei Seiten der Grundfläche gleich 3 Fuss 27′50″45‴56^{IV}44^{V} ist, und es wäre *d* der Mittelpunkt des um die Grundfläche beschriebenen Kreises, und die Gerade *de*, das ist die Höhe der Säule, 4 Fuss, so muss, da nach Satz 8 des 3. Buches die Gerade *cd* 1 Fuss beträgt, die Hypotenuse *ce* = 4 Fuss 7′23″ sein. Man multipliciere also *ce* mit *ac*, so erhält man die verlangte Oberfläche *aeb*, die dann 7 Fuss 8′27″ ist. Die vierseitige Fläche der Säule ist 13 Fuss 5′23″, da die Gerade *ae* gleich der Geraden *be* ist, obwohl das in in der Figur dem Auge nicht so erscheint wegen der Zeichnung des Körpers in einer Ebene.

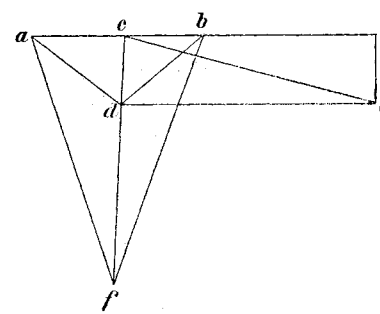


Fig. 5.

Ist aber die Säule rund, so beschreibe man einen Kreis, dessen

---

aber das von dem Fusspunkte derselben auf eine Grundflächenkante gefällte Loth ist.

quale el semidiametro sia la predita ypotemissa, fato lo centro *c* (Fig. 7). Da poy de la circonferencia sua tagliandone tante parte, quante sono in la circunferencia del circhio de la abassis de la colomna, tira dal centro *c* due linie drite, le quale vada in fine a larco tolto, ed aueray el sectore del circhio el quale tu circhi. La quantita del quale tu saueray per la 3ª conclusione de la seconda parte del secundo tratado de questa opera. Tu saperay adunque quelle parte per questo modo. Multiplica 360 per la circonferencia del circhio de la bassis, e quelo, che ne viene, partilo per la circumferentia del circhio descripto secondo la ypotemissa[1]), ed aueray li gradi del archo *av*, el qual e $87^{gr}18^{m}49^{2e}$, ali quali correspondera pe. 6 · 17 · 9, perche li sono equali a lo archo *av*. Ma la circonferentia de tuto questo circhio grando sie pe. 25 · 54 · 59, e lo semidiametro sie pe. 4 · 7 · 23, adunque aueray lo sectore *ave*, lo qual he la superficie de la piramide, cioe 12^{pe} · 56 · 56.

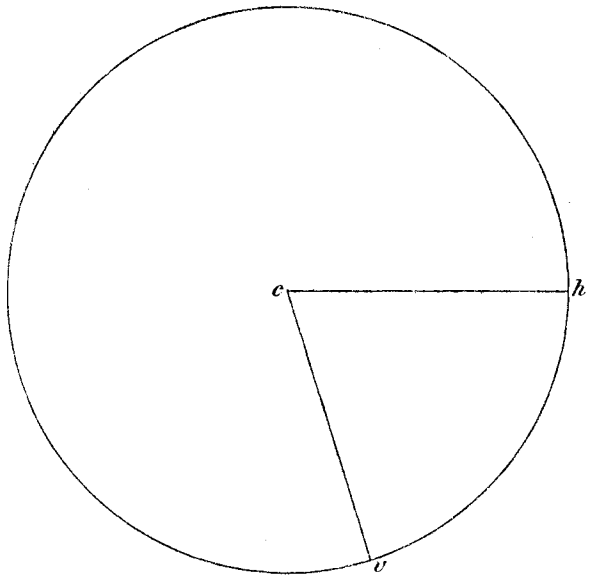


Fig. 7.

24 Per la qual cosa si como e tuto larcho | a le parte, cosi e tuto lo circhio a la sectore, aduncha la superficie de la colomna sie pe. 25 · 8 · 26, de la quale non e proporcione dupla al sectore.

Septima conclusio. Seguita per la 5ª conclusione, che tu saperay la

1) Hier fährt der lateinische Text von 303 abweichend so fort: vel, quia circumferentia basis columne *afcgek* est 6 pedum $17^{m}9^{2a}$, quia semidiameter est 2 pedum, et altitudo columne est sicut prius 4 pedum, et semidiameter circuli describendi 4 pedum $28^{m}20^{2a}$, ergo circumferentia sui circuli erit 28 pedum $6^{m}38^{2a}$. De qua accipies 6 pedes $17^{m}9^{2a}$, ubi pone *a*, *n*, et habebis *ane*, qui est superficies pyramidis, videlicet 14 pedum $3^{m}21^{2a}$. Superficies vero columne est 25 pedum $9^{m}24^{2a}$, cuius non est proportio dupla ad sectorem. Ut autem facilius capias illas partes, multiplica 360 per 6 pedes $17^{m}9^{2a}$, et proveniens divide per 28 pedes $6^{m}38^{2a}$, et habebis $80^{gr}29^{m}54^{2a}$ de circumferentia circuli *ane*, ipsum dividendo per 360.

Halbmesser die genannte Hypotenuse ist, indem man *c* als Mittelpunkt benutzt (Fig. 7). Dann schneide man von seinem Umfange soviele Theile ab, als in dem Umfange der Grundfläche der Säule enthalten sind, und ziehe vom Mittelpunkte *c* zwei gerade Linien, die nach den Endpunkten des abgeschnittenen Bogens gehen, dann erhält man den Kreisausschnitt, den man sucht. Seine Grösse findet man nach der 3. Aufgabe des zweiten Theiles des zweiten Traktates dieses Werkes. Man findet also diesen Theil auf folgende Weise. Man multipliciere 360^0 mit dem Kreisumfange der Grundfläche und theile das Ergebnis durch den Umfang des Kreises, der mit der Hypotenuse beschrieben ist[1]), so erhält man dadurch die Grade des Bogens *hv*; er ist $87^0\,18'\,49'$, ihm entsprechen 6 Fuss $17'\,9''$, da sie dem Bogen *hv* gleich sind. Der Gesamtumfang des grossen Kreises aber ist 25 Fuss $54'\,59''$, und der Halbmesser ist 4 Fuss $7'\,23''$, also erhält man den Sektor *hvc*, der die Oberfläche der Pyramide darstellt, zu 12 Fuss $56'\,56''$, denn, wie sich der ganze Umfang zu seinem Theile verhält, so verhält sich der ganze Kreis zu dem Ausschnitt. Nun ist die Oberfläche der Säule 25 Fuss $8'\,26''$, und ihr Verhältnis zum Ausschnitt ist also nicht das von 2 : 1.

Siebente Aufgabe. Aus der 5. Aufgabe folgt, dass man den Theil der Pyramide kennen wird, wenn man nur den Schnittpunkt der Axe oder der Seite der Pyramide kennt, und zwar auf folgende Weise, nämlich für die Säule *bche*, wenn ihre Pyramide *aeh* im Punkte *i* durch die Ebene *pd*

---

1) Übersetzung des lateinischen Textes (derselbe findet sich so übrigens nur in dem Cod. Bonc. 303): oder, weil der Umfang der Grundfläche der Säule *afcgek* (Fig. 6) gleich 6 Fuss $17'\,9'''$ ist, da der Durchmesser 2 Fuss beträgt, die Höhe der Säule aber wie früher 4 Fuss misst, und der Durchmesser des zu beschreibenden Kreises 4 Fuss $28'\,20''$, so ist der Umfang des zugehörigen Kreises 28 Fuss $6'\,38''$. Von ihm schneide man 6 Fuss $17'\,9''$ ab, und bezeichne denselben mit *hv* (Fig. 7), so erhält man *hvc*, das ist die Oberfläche der Pyramide, gleich 14 Fuss $3'\,21''$. Die Oberfläche der Säule ist aber 25 Fuss $9'\,24''$, und sie steht nicht zu dem Sektor im doppelten Verhältnis. Damit man aber die fraglichen Theile leichter erhalten kann, multipliciere man 360 mit 6 Fuss $17'\,9''$ und theile das Ergebnis durch 28 Fuss $6'\,38''$, so erhält man $80^0\,29'\,54''$ von dem Umfange des Kreises *hvc*, wenn man ihn in 360 Theile theilt.

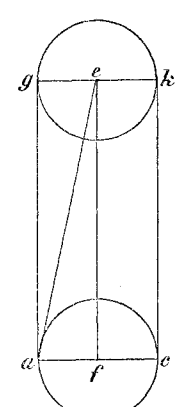


Fig. 6.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Werthe des italienischen Textes die richtigen sind. So ist z. B. die Hypotenuse gleich $\sqrt{17}$, und das ist 4 Fuss $7'\,23''$ und nicht 4 Fuss $28'\,20''$, wie der lateinische Text sagt, u. s. w.

porcione de la piramide, domente tu sapi el logo de la sectione de lo axalle ouero del lado de la piramide per si facto modo. Cioe in la cholomna *bche*, quando la sua piramide *aeh* sera tajada in del ponto *i* per la superficie *pd*, ouero in del ponto *k* per la superficie *kg* (Fig. 8). Ma se e taiada in del ponto *i*, fa la columna secunda la bassis *kl* e secondo *ai*, la qual columna e tripla a la piramide *lak*, el se sauera etiamdio el residuo de la piramide, el quale sie *lehk*. Ma quando quella piramide fosse taiada in *k*, sapi prima el za ditto residuo, possa fa la columna secondo *kl* e secondo la longeza *if*, la quale sie *lkgm*, la quale trala del prefato residuo, et aueray la porcione *kgh* et *lem*.[1])

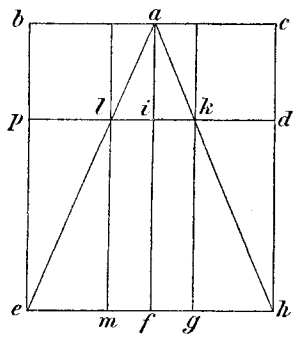


Fig. 8.

Octava conclusio. Ma quando el fosse proponudo una piramide tronchada, compise la quela, e alora primamente saueray quela per la 4ª conclusione, e le soue doue parte, ouero porcione per la 7ª conclusione. Como e, sel fosse proponudo una piramide tronchata *abcd*, de la quale el minore lado sia *bc*. Tira tuti doy li ladi equali *ab* et *dc* fino che li
24′ concurrano in *e*. | Tu saueray primamente la quantitade de tuto lo assalle de la piramide in questo modo. Dal ponto *b* mena la perpendichulare *bf* a la bassis *ad*, et lo luogo, onda lo asale taia el lado *bc* sia *h*, conçosiacosa che *bf* sia equale ad *hg*. Similmente *bh* e equale ad *fg*, e rimane *af* manifesta. Multiplicha adonche *bf* per *ag*, e quelo, che ne vene, partilo per *af*, et haueray *eg*, et per consequente *he*. Driza adunque due parciale colomne sopra *bc*, una da la parte *e*, e laltra da la parte *g*, et procede, como e dito in la prefata conclusione.[2])

E per questo seguita, che la pratiche de molti sie falace e de demostracione ignara, la quale dice, che la piramide si tronchata se mesura ad questo modo. Cioe in la piramide *agdb* (Fig. 10) conziosacosa chel lado *gd* auanza el lado *ab*, tu doy agiugnere la mitade del excesso a quello *ab*, aciochel se faza una linia *ca* et *bh*, et alora la colomna fatta segondo *ch* et secondo la longeza, la quale e *an*, e equale a la proposita

1) Der erste Körper ist also eine abgestumpfte Pyramide, der zweite entsteht durch Ausbohrung dieses Restkörpers mit einem geraden Cylinder.

2) Leonardo berechnet also die abgestumpfte Pyramide stets als Differenz der vervollständigten Pyramide und der von ihr abgeschnittenen Spitze. Er verwandelt dabei jede dieser Pyramiden in eine gleich hohe Säule. Der Bestimmung der Grundfläche derselben ist die neunte Aufgabe gewidmet. Dabei zeigt er,

geschnitten wird, oder im Punkte k durch die Fläche kg (Fig. 8). Wird sie zuerst im Punkte i geschnitten, so bilde man die Säule für die Grundfläche kl und die Höhe ai. Diese Säule ist das Dreifache der Pyramide lak, und man wird dadurch auch den Rest der Pyramide kennen, der $lehk$ ist. Wird aber die Pyramide im Punkte k geschnitten, so kennt man zunächst den schon gefundenen Restkörper. Nachher bilde man die Säule über kl und für die Länge if, die $lkgm$ sein wird. Sie ziehe man von dem vorhergefundenen Restkörper ab, so erhält man dadurch den Theil kgh, lem.[1])

Achte Aufgabe. Ist aber eine abgestumpfte Pyramide vorgelegt, so vervollständige man sie. Dann kennt man diese nach Aufgabe 4 und ihre beiden Theile nach Aufgabe 7. Wäre z. B. die abgekürzte Pyramide $abcd$ vorgelegt (Fig. 9), deren kleinere Seite bc sei, dann verlängere man beide gleiche Seiten ab und dc, bis sie sich in e treffen. Erstens kennt man dann die Länge der ganzen Axe der Pyramide folgendermaassen. Vom Punkte b fälle man das Loth bf auf die Grundfläche ad; der Punkt, in welchem die Axe die Seite bc schneidet, sei h, so dass $bf = hg$ ist. Ebenso ist $bh = fg$, und es bleibt af als bekannt übrig. Nun multipliciere man bf mit ag und dividiere das Produkt durch af, so erhält man eg und folglich auch he. Nun beschreibe man zwei Theilsäulen über bc, eine nach e zu, die andere nach g, und verfahre weiter, wie in der vorigen Aufgabe gezeigt ist.[2])

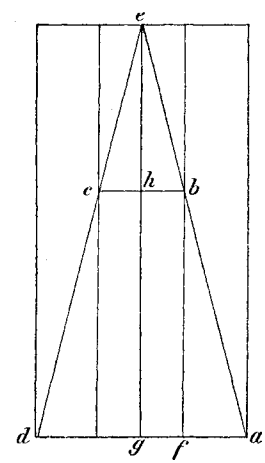


Fig. 9.

Daraus folgt, dass das Verfahren Vieler falsch ist und unbeweisbar, das so lautet. Die abgestumpfte Pyramide werde in folgender Weise gemessen, dass man nämlich für die Pyramide $agdb$ (Fig. 10), wenn die Seite gd die Seite ab übertrifft, die Hälfte des Überschusses zu ab hinzufügen soll, so dass sie eine gerade Linie $cabh$ ausmachen, dann sei die Säule über ch nach der Länge an gleich der vorgelegten Pyramide, und ich be-

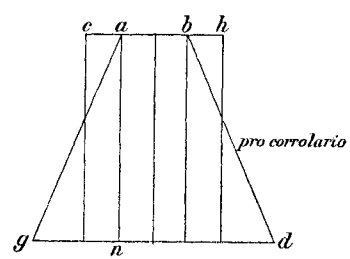


Fig. 10.

dass das bis dahin im Mittelalter benutzte Verfahren, das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen als diese Grundfläche zu benutzen, unrichtig ist.

piramide. Et io dicho, che questo sie falso, inpercio anetero la 9ª conclusione per veraxe praticha.

Nona conclusio. Parti la piramide tronchata per la sua longeza, e alora circha el numero quociente procede in questa forma. Percio che se lo abassis maiore de la piramide proponuda sera quadrata, alora la radice quadrata del dito numero quociente sera el lado tetragonico del abasis de la colomna da fir fatta per la multiplicatione del basis quadrata per la longeza. Ma sel abasis de la piramide proponuda sera de altra figura, ouero lateratra, ouero
25 rotonda, alora la radice quadrata | de la proporcione de quella abasis de la piramide proponuda, ouero del diametro suo ali ladi, ouero el diametro del abasis de la piramide significata per el numero quociente preditto. Verbi gratia in la piramide *nofd* (Fig. 11), del quale la longeza *pa* sia 14, la linea del abasis *nao* sia 10, la linea minore del abasis, cioe *dpf* sia 4, conçosiacosa che segunda la arte de la 8ª conclusione sia lo axale de la piramide compiuta cioe *hpa*, $23\frac{1}{3}$. Se la linea *nao* sera el lado tetragonico, el suo quadrato fera 100, el quale multiplicato per la linea *hpa* fira la columna $2333\frac{1}{3}$. Adunque tuta la piramide sie $777\frac{7}{9}$. Ma la linea *dpf* sie 4, adunque la basis parciale de la piramide, cioe *hdf*, sera 16. Ma la linea *ph* e $9\frac{1}{3}$, adunca la colomna fatta sopra *dpf* segondo la longeza *ph* est $149\frac{1}{3}$, adunque la piramide parciale, cioe *hdf* sie $49\frac{7}{9}$. Adunque tuto el residuo, el quale he la piramide tronchata proponuda, sia 728. Ma le manifesto segondo la via di li altri, de la quale he dito in del corolario, quela piramide tronchata serane 686, el quale sia falso, si como he manifesto per la praticha demostracione, la quale io fo. Sia adunque lasato el processo de quelli. Cumplando aduncho el processo de la praticha, la quale io ho commenza, partisse 728 per la linea *pa*, chi e 14, si viene in del numero quociente 52, chi e la abasis de la cholumna da fir fatta sopra *bac*. E
25′ perche nel calchulo za fatto se supone, che la dita bassis sia quadrata, tratta | inpercio la radice quadrata de 52, sie 7 e uno pocho piu cha $\frac{1}{5}$. Ele 7 integri e $12^{m}39^{2e}52^{3e}36^{4e}$, et si la linea *bac* sie nel proposito $7\frac{1}{5}$. Ma segundo

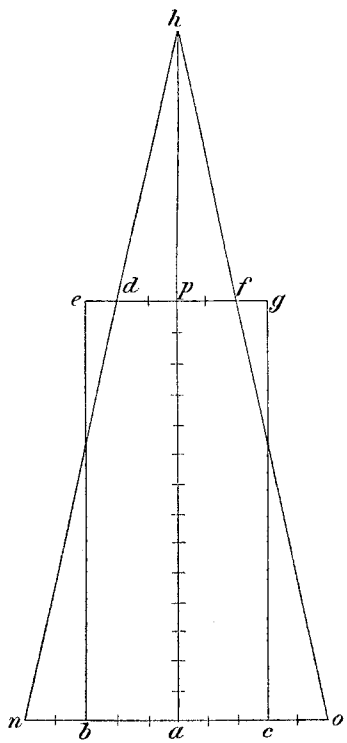


Fig. 11.

haupte, dass dies falsch ist, weshalb ich die neunte Aufgabe mit dem richtigen Verfahren hinzufüge.

Neunte Aufgabe. Dividiere die abgestumpfte Pyramide durch ihre Höhe und verfahre mit dem Quotienten in folgender Weise. Wenn die grössere Grundfläche der vorgelegten Pyramide ein Quadrat ist, so ist die Quadratwurzel aus obigen Quotienten die Quadratseite der Grundfläche derjenigen Säule, welche aus der Multiplikation der quadratischen Grundfläche mit der Höhe entsteht. Ist aber die Grundfläche der Pyramide von anderer Gestalt, entweder vieleckig oder rund, dann ist sie die Quadratwurzel des Verhältnisses der Grundfläche der gegebenen Pyramide oder des Durchmessers zu den Seiten oder dem Durchmesser der Grundfläche der Pyramide, die durch den obigen Quotienten bezeichnet wird. Z. B. für die Pyramide *nofd* (Fig. 11), deren Länge $pa = 14$, die Basislinie $nao = 10$, die Seite der kleinern Grundfläche $dpf = 4$ wäre, da nach Anweisung der 8. Aufgabe die Axe der ganzen Pyramide, nämlich hpa, gleich $23\frac{1}{2}$ ist. Ist die Gerade *nao* Seite eines Quadrates, so beträgt ihr Quadrat 100; das multipliciere man mit hpa, so entsteht die Säule gleich $2333\frac{1}{3}$, also ist die ganze Pyramide $777\frac{7}{9}$. Die Gerade dpf aber ist 4, also ist die Grundfläche der Theilpyramide hdf gleich 16, die Gerade ph aber ist $9\frac{1}{3}$, also ist die Säule über dpf und von der Länge ph gleich $149\frac{1}{3}$, folglich ist die Theilpyramide, nämlich hdf, gleich $49\frac{7}{9}$. Der Gesamtrest, das ist die abgestumpfte Pyramide, ist also 728. Nach dem Verfahren der andern aber, von dem ich in dem Zusatze gesprochen habe, wäre offenbar diese abgekürzte Pyramide gleich 686, was falsch ist, wie ich durch mein Verfahren praktisch bewiesen habe. Dieses Verfahren ist daher zu verwerfen. Um nun das Verfahren, das ich angefangen habe, zu vollenden, theile man 728 durch die Gerade pa, das ist durch 14, so kommt im Quotienten 52, das ist die Grundfläche der Säule, welche über bac zu errichten ist. Da nun in der bis jetzt geführten Rechnung vorausgesetzt wurde, die fragliche Grundfläche sei ein Quadrat, so ziehe man deshalb die Quadratwurzel aus 52; sie ist 7 und ein klein wenig mehr als $\frac{1}{5}$. Sie beträgt nämlich 7 Ganze $12'39''53'''36''''$, und es ist folglich für unsern Fall die Gerade $bac = 7\frac{1}{5}$. Nach dem andern Verfahren wäre sie aber nur 7, was falsch ist. Nun errichte man über der Grundfläche bac und von der Höhe ap die Säule $begc$, so ist diese gleich 728.

Hat aber die vorgelegte Pyramide keine quadratische Grundfläche, sondern solche von anderer Figur, wie rechteckig oder vieleckig und un-

li altri la sarebe solamente 7, el quale he falso. Adoncha sopra la bassis *bac* secondo la longeza *ap* se fa la cholumna *begc*, la quale ha 728.

Ma se la piramide proponuda non hauesse la abassis quadrata, ma de altra figura, como he quadrangula ouero multilatera e de ladi inequali, ouero circhulare, perche el se supone, che la basis de la piramide proponuda sia 100, la bassis adunque de la columna da fir cunstituita sopra *bac* sie 52, alora perche la radice quadrata de la proportione de 100 a 52 e si como 10 a $7\frac{1}{5}$ ultra la modicha parte, como e ditto di sopra, sera la proporcione de la linia *nao* a la linea *bac*, si como he 10 a $7\frac{1}{5}$, ouero che quele doe linee siene diametri ouero ladi del abassis de la figura multilatera de li ladi equali ouero inequali, percio che cescaduno lado del abassis proponuda se auera al suo relatiuo lado del abassis de la colomna da fir descripta sopra *bac* si como 10 a $7\frac{1}{5}$.

Decima conclusio. Tu mesuraray una veza in questo modo. Prima mesura una mitade in longeza secondo larte dita in la prossima conclusione 9ª, et per quello medesimo modo mesuraray laltra mitade como in questo exemplo. Mesura prima la mitade *abde* (Fig. 12), secundariemente mesura *bcef*. Ma intendi, que questo
26 non | he totalmente vero, se la linia *ab* non sia drita, e similmente *bc*, per quelo simelo modo de li opositi. Percio che, se le sono curue, ouero che *abc* sia uno archo ouero 2, similmente de li opositi, sarebe bisogna far per altro modo, massimamente se li fosse archi de circhulo pizolo, si che y fusseno molti arcuati. Ma quando non sono molto arcuati, ma quasi dritti, non ge gran forza.

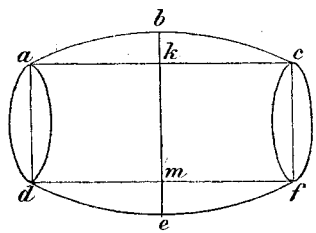


Fig. 12.

Item in questa conclusione e in la precedente non he gran forza, quando el diametro de la mitade non excede molto el diametro de la extremitade. Alora se puo fare secondo li altri, auegnadio chel non habia ueritade, ma mancha pocho de la veritade. Cunçosiacosa aduncha, che la linia *abc* sia ouero uno circhio, ouero doy, fossi non he regula de trouar la vera mesura per la sua inregularitade ouero deformitade.

Undecima conclusio. Ma quando la veza ouero la piramide rotonda zase, per hauere la continentia de quella in uno lado, sie questa conclusione. Prima in la veza, che zaxe equidistante al orizonte, se *ab* et *bc* non serano sensibilmente curui, perche alora per la sua deformitade non se hauerebe la veritade (Fig. 12), parti quello *ac* per mezo in *b*,

gleichseitig, oder kreisförmig, so wird, weil vorausgesetzt ist, dass die Grundfläche der Pyramide 100 ist, die Grundfläche der über *bac* zu errichtenden Säule gleich 52 sein. Da nun die Quadratwurzel des Verhältnisses von 100 : 52 gleich 10 : $7\frac{1}{5}$ ist, unter Vernachlässigung des kleinen Theiles, wie oben gesagt ist, so wird das Verhältnis der Geraden *nao* zur Geraden *bac* auch wie 10 : $7\frac{1}{5}$ sein, mögen diese beiden Geraden Durchmesser sein, oder Seiten der Grundfläche der vieleckigen Figur von gleichen oder ungleichen Seiten, weil jede Seite der vorgelegten Grundfläche zu ihrer entsprechenden Seite der über *bac* zu errichtenden Säule sich wie 10 : $7\frac{1}{5}$ verhalten wird.

Zehnte Aufgabe. Ein Fass wird in folgender Art gemessen Zunächst messe man in der Länge eine Hälfte nach dem Verfahren, das wir in der eben vorhergehenden Aufgabe gelehrt haben, und darauf messe man nach derselben Methode die andere Hälfte, wie z. B. in dem folgenden Beispiele (Fig. 12). Man messe hier zuerst die Hälfte *abed*, zweitens messe man dann *bcfe*. Wohlverstanden, dass das nicht ganz richtig ist, wenn die Linie *ab* keine Gerade ist, und ebenso *bc*, in derselben Weise auch die gegenüberliegenden Seiten. Denn wenn sie gekrümmt sind, so dass *abc* aus einem Bogen besteht oder aus zweien, und ähnlich für die Gegenseite, so muss man auf andere Weise vorgehen, besonders dann, wenn es Bogen von kleinen Kreisen sind, so dass sie sehr stark gekrümmt sein würden. Sind sie aber wenig gekrümmt, sondern fast gerade, so hat das keinen grossen Einfluss. Ebenso hat es in dieser und der vorhergehenden Aufgabe wenig Einfluss, wenn der Mitteldurchmesser den Durchmesser der Endfläche nur wenig übertrifft. Dann ist es erlaubt nach dem Verfahren der andern vorzugehen, denn wenn es auch nicht genau ist, so fehlt doch nicht viel an der Wahrheit. Denn wenn die Linie *abc* entweder ein Kreisbogen ist, oder aus zweien besteht, so lässt sich wahrscheinlich keine Regel geben, um das wirkliche Maass zu finden, wegen ihrer Unregelmässigkeit und abweichenden Gestalt.

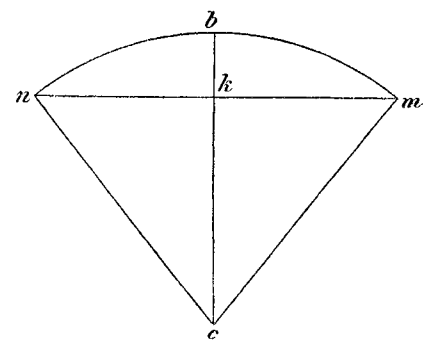


Fig. 13.

Elfte Aufgabe. Wenn aber das Fass oder der Kegel liegt, folge hier zur Bestimmung des Inhalts für eine Seite die Aufgabe. Sind zunächst in dem parallel dem Horizonte gelagerten Fasse *ab* und *bc* nicht stark gekrümmt, weil man sonst wegen der abweichenden Gestalt die Wahr-

simelmente lo oposito in *e*, e sia menato *bc*, chi seca *ac* in *k* et *df* in *m*. Alora secondo la longeza *kc* e la largeza *bk* sia fatta la porcione de la
26′ colomna rotonda, de la quale la abassis sie de questa figura. Si che la | linea *bk* in figura de la veza (Fig. 13) tenga el locho del sino verso ouero de la sagita, e la linea *mkn* si tenga el loco de la porcione del circhio maiore in la largeza ouero in la groseza de la veza. Ma la alteza de la porcione de la colomna sie *kc*, de la quale porcione la terza parte he la continencia *bkc*. Ma in la piramide rotonda, chi zase segondo la sua longeza, siche el suo axale sia equidistante al orizonte, chomo he in la piramide *ade* (Fig. 14), piu veramente le hauera la continentia de la sua porcione, cioe *abc*, perzo che la linea *ac* he drita, adonque etiamdio la sua abasis, che consimile a la figura inmediatamente ditta, cioe *nbmc*.

Ma perche quello, che ditto in la conclusione 11ª he solamente veritade, quando la veza he sechata in lo ponto *a* et *e*, i quali sono termini de li diametri de li fondi de la veza, ouero etiamdio sia sechata *ab* et *bc*, impercio quando queli diametri siano secati, el bisogna procedere altramente, et percio sia questa 12ª conclusione.

Duodecima conclusio. Sia la veza *flkp* (Fig. 15), la quale taia la superficie *do*, siche tuti li diametri siano secati, e siano li ponti de la

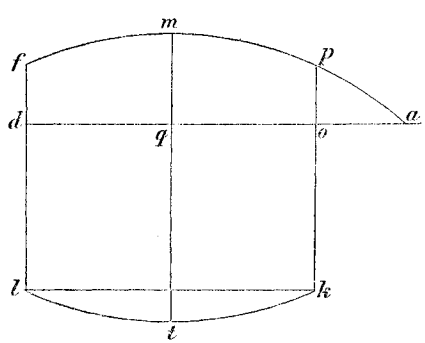


Fig. 15.

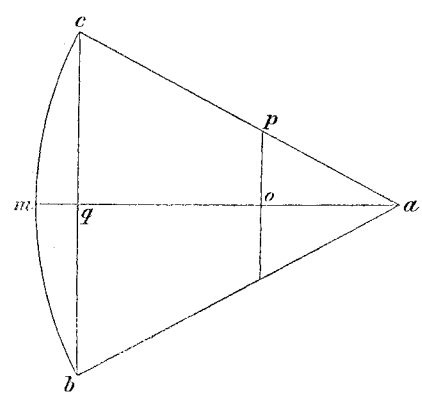


Fig. 16.

secione *d*, *q*, *o*, et *mt* sia el diametro maiore, e la longeza de la veza sia taiata per mezo da la superficie *mqt*, et como ho ditto, sia *mp* quasi drita. Alora perche el corpo *mqop* sie piramide tronchata, inpercio compissela, como se dice in la 8ª conclusione, de la quale sia la bassis de consimile
7 forma | in le doe conclusione precedente. La longeza sia *qoa*, e lo cono sia *a*. Possa sopra la bassis prefato, la quale he *mq* (Fig. 16) fiza drita la porcione de la colomna rotonda segondo la longeza *qoa*, la quale porcione sera tripla a la piramide za fata. Anchora sopra la bassis *op* driza

heit nicht finden würde, so halbiere man (Fig. 12) die *ac* in *b*, ebenso die gegenüberliegende Seite in *e*, und ziehe *be*, die *ac* in *k* und *df* in *m* schneiden mag. Nun errichte man nach der Länge *kc* und der Breite *bk* ein runde Theilsäule, deren Grundfläche von folgender Gestalt sei, dass nämlich die Gerade *bk* in der Figur des Fasses (Fig. 13) die Stelle des Sinus versus oder des Pfeiles vorstellt, und die Gerade *mkn* die Stelle des Bogens eines grössten Kreises in der Breite oder Dicke des Fasses. Die Höhe der Theilsäule sei *kc*. Von dieser Theilsäule ist der dritte Theil der Inhalt der *bkc*. Für den Kegel aber, der seiner Länge nach liegt, so dass seine Axe parallel dem Horizonte ist, wie es für den Kegel *ade* (Fig. 14) der Fall ist, wird man den Körperinhalt des Theiles *abc* um so genauer erhalten, je mehr die Linie *ac* gerade ist, desgleichen seine Grundfläche, die der eben beschriebenen Figur, nämlich *abmc*, ähnlich ist.

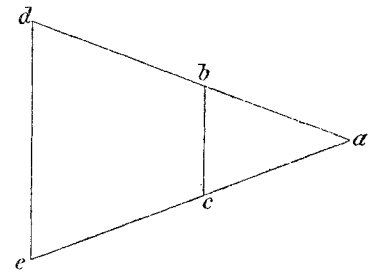


Fig. 14.

Da aber das, was ich soeben in dieser 11. Aufgabe gesagt habe, nur richtig ist, wenn das Fass in den Punkten *a* und *c*, das ist in den Endpunkten der Boden des Fasses, geschnitten wird, oder auch wenn *ab* und *bc* geschnitten werden, deshalb muss man, wenn die Durchmesser selbst geschnitten werden, anders vorgehen und daher sei folgende 12. Aufgabe gestellt.

Zwölfte Aufgabe. Es sei das Fass *flkp* (Fig. 15), das von der Ebene *do* so geschnitten werde, dass alle Durchmesser getroffen werden; die Durchschnittspunkte seien *d*, *g*, *o*; *mt* sei der grösste Durchmesser und die Länge des Fasses werde durch die Ebene *mqt* halbiert, und es sei, wie schon gesagt ist, *mp* beinahe gerade. Da dann der Körper *mqop* eine abgestumpfte Pyramide ist, so vervollständige man sie, wie es in der 8. Aufgabe gesagt ist, dann ist ihre Grundfläche von ähnlicher Gestalt wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben. Ihre Länge sei *qoa*, der Scheitelpunkt *a*. Darauf errichte man über der ebengenannten Grundfläche, die *bmcq* ist (Fig. 16), eine runde Theilsäule nach der Länge *qoa*, die das Dreifache der eben konstruierten Pyramide sein wird. Ebenso errichte man über der Grundfläche *op* eine andere runde Theilsäule nach der Länge *oa*, die ebenso das Dreifache der Pyramide *pao* sein wird. Da nun die Theilsäulen in der folgenden Aufgabe bestimmt werden, und man auch ihre dritten Theile kennen wird, so kennt man also sowohl die ganze

una altra porcione de colomna secondo la longeza *oa*, la quale etiamdio sera tripla a la piramide *pao*. Conçosiacosa adonque, che la porcione de la colomne sera manifesta in la conclusione sequente, et se sauera etiamdio li soy subtripli de quelle, adunque el tute le piramide et etiamdio le parciale se sapera. Tray adoncha la parciale piramido *pao* de tuta la piramide *mqa*, et aueray el corpo quesito, cioe *mqop*.

Decima tercia conclusio. A volere monstrare la porcione de la colomna, multiplica larea de la parte de la abasis sua per la longeza de quela, et haueray lo intento. Tu haueray la area de la parte del abassis per quelo, chi e ditto in la 2ª parte de questo opera, ouero che la sia parte de superficie angulare ouero circhulare.

Decima quarta conclusio. Se tu haueray una veza, che tenga 4096 vizi, el ne voray una altra, che sia si longa, che tenga solamente 64, circha la radice quadrata de tuti doy li numeri. Adoncha si como el se ha quelle radice luna al altra, si se hauera li diametri de
27′ le veze. Adoncha el diametro | de la mazore sie octuplo al diametro de la minore veza. Se adoncha el primo diametro he 16, laltro de essere 2.[1])

Ma se tu non la volesse cosi longa, ma simile a quela, circha la radice cubica de tutti doy, ele adonque quelle radice 16 et 4. Si como adoncha se hanno quelle radice in semma, cossi se hauerano le longeze de la maiore veza a la longeza de la minore, e lo diametro maiore al diametro minore. Consimilmente dico de li seratile, de le piramide, de le colomne, de li cubi e de le spere.

De chubis.

Decima quinta conclusio. Quando tu voy lo cubo, multiplica la quantitade de la linia tua in si cubicamente, et haueray lo intento. Como he, se la linia *ab* sia 4 braza, multiplica 4 in se cubice, et fira 64, cioe la quantitade de tuto el cubo, el quale he *abhf*, *cgde* (Fig. 17).[2])

Sexta decima conclusio. Quando tu voray lo diametro del cubo, multiplica el quadrato del lato del cubo per 3, et quello, che ne viene, la radix quadrata sera el diametro. Como he, se *ab* sia 4, el suo quadrato

---

1) La radice di 4096 sie 64, la radix de 64 sie 8. Adonque la radix de 64 e lotaua parte de la radice de 4096. Sel diametro de la mazore veza he 16, el minore sera 2. Per attrouarli li diti diametri conza cosi. Prima per el minore: 8 via 16 fa 128, partilo per 64, ne viene 2, che el diametro de la minore. Se tu volesse el diametro mazore, multiplica 64 via 2, e parti per 8, et aueray el mazore. Opera simelmente per le cubice, como dicho de sopra, quando ay atrouata la radice. — Diese Anmerkung fehlt im lateinischen Texte.

2) $V = a^3$.

Pyramide als die Theilpyramide. Nun ziehe man die Theilpyramide *pao* von der ganzen Pyramide *cmqa* ab, so erhält man den gewünschten Körper *mqop*.

Dreizehnte Aufgabe. Um die Theilsäulen zu bestimmen, multipliciere man den Inhalt ihres Grundflächentheiles mit ihrer Länge, so hat man das Verlangte. Den Inhalt des Grundflächentheiles erhält man aus dem, was im zweiten Theile dieses Werkes gesagt ist, mag es nun der Theil einer eckigen oder kreisförmigen Fläche sein.

Vierzehnte Aufgabe. Wenn ein Fass gegeben ist, das 4096 Vizi enthält, und man will ein anderes von derselben Länge bestimmen, das nur 64 enthält, so bestimme man die Quadratwurzeln beider Zahlen. Wie sich dann diese Wurzeln zu einander verhalten, so werden sich auch die Durchmesser der Fässer verhalten. Es ist daher der Durchmesser des grössern das Achtfache des Durchmessers des kleinern Fasses. Ist also der erste Durchmesser 16, so muss der andere 2 sein.[1])

Will man dasselbe aber nicht ebenso lang, sondern ihm ähnlich, so bestimme man die Kubikwurzeln von beiden; diese Wurzeln sind nun 16 und 4. Wie sich daher diese Wurzeln zu einander verhalten, so wird sich die Länge des grössern Fasses zu der Länge des kleinern und der Durchmesser des grössern zu dem Durchmesser des kleinern verhalten. Das Nämliche behaupte ich von dem Prisma, der Pyramide, der Säule, dem Würfel und der Kugel.

Von den Würfeln.

Fünfzehnte Aufgabe. Um den Inhalt eines Würfels zu finden, multipliciere man die Länge der Kante mit sich kubisch, so hat man das Verlangte. Ist z. B. die Kante $ab = 4$ Ellen, so multipliciere man 4 mit sich kubisch, das wird 64, und das ist der Körperinhalt des ganzen Würfels, der *abhf*, *egcd* ist (Fig. 17).[2])

Sechzehnte Aufgabe. Will man die Körperdiagonale des Würfels bestimmen, so multipliciere man das Quadrat der Kante mit 3, dann ist die Quadratwurzel des Produktes die Diagonale. Ist z. B. $ab = 4$,

---

1) Die $\sqrt{4096}$ ist 64, $\sqrt{64} = 8$, also ist $\sqrt{64}$ der achte Theil von $\sqrt{4096}$. Wenn der Durchmesser des grössern Fasses 16 ist, so ist der des kleinern 2. Um die fraglichen Durchmesser zu erhalten, rechne man so. Zuerst für den kleinern: $8 \times 16 = 128$, dividiert durch 64 kommt 2, das ist der Durchmesser des kleinern Fasses. Will man aber den grössern Durchmesser, so multipliciere man 64 mit 2 und dividiere durch 8, so erhält man den grössern. Ebenso, wie ich oben gesagt habe, verfährt man für den Kubikinhalt, nachdem man die Wurzel bestimmt hat.

sie 16. Multiplica 16 per 3, fa 48, del qual la radix quadrata, cioe 6 integri $55^{m}43^{2e}$, he la linea *cf*, cioe el diametro.[1])

Ma se quello quadrato *ab*, cioe 16, tu lo dopiaray, chel sia 32, alora la radix quadrata de 32 sie el diametro del quadrato de la superficie del cubo[2]), el quella diametro sie la linea *ce*, cioe 5 integri $39^{m}22^{2a}$ quasi. Ma sel prefato quadrato tu lo multiplica per 6, haueray tutte le superficie del chubo.[3])

E per lo diametro del cubo si atrouaray el lado del cubo: troua la radice de la terza parte del quadrato del diametro. Como se lo diametro fosse $6 \cdot 55 \cdot 43$, el quadrato sera 48, et la terza parte sie 16,
28 del quale la radice quadrata sera lo lado, che tu circhi, cioe 4 etc.[4]) |

De speris.

Decima septima conclusio. Quando tu voray la quantita de la spera, multiplica larea del maiore circulo de quela per lo $\frac{2}{3}$ del suo diametro, et haueray lo intento. Como he, sel diametro, cioe *ab*, sera 7 (Fig. 18), la area del circhio *ab* sera $38\frac{1}{2}$, si como in la 2^{a} parte de questa opera e dito. Li $\frac{2}{3}$ de quello 7 sie $4\frac{2}{3}$. Multiplica adoncha $38\frac{1}{2}$ per $4\frac{2}{3}$, et haueray $179\frac{2}{3}$, cioe la quantitade ouero la chapacitade de tuta la spera.[5])

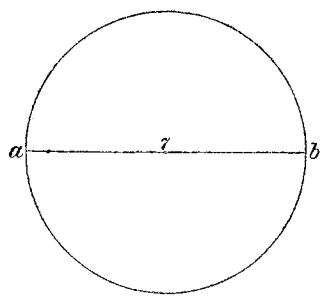


Fig. 18.

Decima octava conclusio. Quando tu voray la superficie de la spera, multiplica la circunferentia del circhio maiore per el suo diametro, et haueray quello, che tu circhi. In lo chaso preditto, quando el diametro *ab* he 7, la circunferencia sie 22. Multiplica 7 per 22, che fa 154, la superficie de la spera.[6])

Decima nona conclusio. Quando tu voray la porcione de la spera mazore ouero minore cha la mitade, cercha primamente la porcione del circhulo maiore, si como he ditto in la 2^{a} parte de questo opera. Si como aduncha la porcione del circhulo se ha al circhulo, cosi he da spera ha spera. Notta, che, sel se fu la tabula de li seni secondo la proporcione de 22 a 7, si como he fatto secondo la proporcione 360 a 120, si como la ho fatto io, alora quando lo archo del orizonte he

---

1) $D = a\sqrt{3}$. 2) $d = a\sqrt{2}$. 3) Oberfläche des Würfels $= 6a^2$.

4) $a = \sqrt{\frac{D^2}{3}}$. — Der letzte Abschnitt fehlt im lateinischen Texte.

so ist das Quadrat gleich 16. Multipliciere 16 mit 3, das macht 48, und die Quadratwurzel daraus, das ist 6 Ganze 55′43″, ist die Gerade cf, nämlich die Körperdiagonale (Fig. 17).[1])

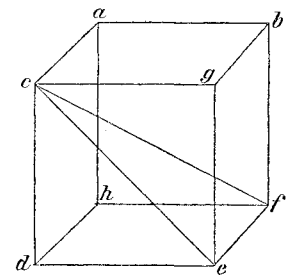


Fig. 17.

Wenn man aber das Quadrat von ab, nämlich 16, verdoppelt, so dass es 32 wird, dann ist die Quadratwurzel von 32 die Diagonale der quadratischen Seitenfläche des Würfels[2]); diese Diagonale ec ist ungefähr gleich 5 Ganzen 39′22″ (Fig. 17). Multipliciert man aber das genannte Quadrat mit 6, so erhält man die Gesamtoberfläche des Würfels.[3])

Aus der Körperdiagonale des Würfels findet man die Kante so: Man suche die Wurzel des dritten Theiles des Quadrates der Diagonale. Wäre z. B. die Diagonale gleich $6^g \cdot 55' \cdot 43''$, so ist das Quadrat gleich 48, davon ist der dritte Theil 16 und dessen Quadratwurzel ist die Kante, die man sucht, nämlich 4 u. s. w.[4])

Von den Kugeln.

Siebzehnte Aufgabe. Zur Bestimmung des Körperinhalts einer Kugel multipliciere man den Inhalt des grössten Kreises derselben mit $\frac{2}{3}$ ihres Durchmessers, so erhält man das Verlangte. Wäre z. B. der Durchmesser $ab = 7$ (Fig. 18), so ist der Inhalt des Kreises ab gleich $38\frac{1}{2}$, wie im 2. Theile dieses Werkes gelehrt ist. $\frac{2}{3}$ von 7 sind $4\frac{2}{3}$. Man multipliciere also $38\frac{1}{2}$ mit $4\frac{2}{3}$, so erhält man $179\frac{2}{3}$ und das ist der Körperinhalt oder die Mächtigkeit der ganzen Kugel.[5])

Achtzehnte Aufgabe. Will man die Oberfläche der Kugel bestimmen, so multipliciere man den Umfang eines grössten Kreises mit seinem Durchmesser, und erhält dadurch das Gesuchte. Im vorliegenden Falle, wo der Durchmesser $ab = 7$ ist, ist der Umfang gleich 22. Multipliciert man 7 mit 22, so macht das 154, die Oberfläche der Kugel.[6])

Neunzehnte Aufgabe. Wenn man einen Kugelabschnitt grösser oder kleiner als die Halbkugel finden will, so suche man zunächst den Abschnitt des grössten Kreises, wie im 2. Theile dieses Werkes gelehrt ist. Wie sich dann dieser Kreisabschnitt zum ganzen Kreise verhält, so verhält sich der Kugelabschnitt zur Kugel. Man bemerke hier, dass, wenn die Sinustafel nach dem Verhältnis von 22 : 7 berechnet wäre (wie ich es gethan habe), wie man sie nach dem Verhältnis von 360 : 120 konstruiert hat, man, wenn der Bogen des Horizontes $23^0 49' 51''$ ist, den vierten Theil

5) $V = \frac{d^2}{4}\pi \cdot \frac{2}{3} d = \frac{1}{6} d^3 \pi.$ 6) $O = d^2 \pi.$

$23^{gr}49^{m}51^{2e}$, el se ha la 4^{a} parte de la area del circhio, et chosi la quarta parte de la spera. Si como fi per lo archo *ab*, del quale el
28′ sino | drito *fh* de fir multiplicato per el sino dritto del archo *ce*, cioe per *ef*, e quelo, che ne viene da fir trato del sectore del circhulo *ehgc* abuto per la multiplicacione de tutta la area per lo archo *ecg*, e per la diuisione del proueniente per tuta la circunferentia. Eno, cioe sono, aduncha, quele seni, cioe *fh* $23^{gr}8^{m}25^{2e}$, e *ef* $52^{gr}23^{m}20^{2e}$, a li quali correspondeno $1^{gr}20^{m}59^{2e}$ per el primo sino, ma per lo secondo $3^{gr}3^{m}21^{2e}$, quando el diametro he 7. Per questo se chonosse in quanto la porcione del cubo fatta de la sagitta e del diametro del circhio auanza la porcione de la spera. Conçosiacosa, chel quadrato del diametro sie 49, e la sagita *cf* sia $2^{gr}9^{m}1^{2a}$, multiplica adoncha 49 per $2^{gr}9^{m}1^{2a}$, ne viene $105^{gr}12^{m}49^{2e}$. Ma la quarta parte de la spera he $44^{gr}55^{m}$, la quale, quando la sera subtrata de $105^{gr}21^{m}49^{2e}$, rimagnera $60^{gr}26^{m}49^{2e}$, et in tanto la prefata porcione del cubo auanza la porcione de la spera preditta. Anchora se la porcione predita del cubo tu la traray de la mitade del chubo, tu saueray, in quanto questo residuo auanza la quarta parte de la spera. Chomo he el cubo circunsrito a la spera, quando el diametro he 7, sera 343, del quale la mitade sie 171 · 30. De la quale trata la prefata porcione del cubo, cioe 105 · 21 · 49, el residuo sera 66 · 8 · 11, el qual residuo
29 comparato a la quarta parte de la spera, | cioe a quelli 44 · 55, auanza quello, chomo he manifesto, $21^{gr}13^{m}11^{2a}$.[1])

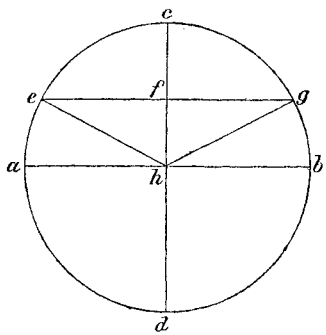


Fig. 19.

O tu, che lezaray questa opera, cognosse, mi hauere messe molte cose dicte da li altri, et hauer coreto alcuni diti de li altri, et auergene messo alchune per la dio gratia, abiando aduertencia in la sentencia del circhio, che la proporcione de la circunferentia del circhio a lo diametro non he si chomo 22 a 7, auegnadio che si per la facilita de si, etiamdio perche non he de la presente hopera reprouato questo, abia dito questa proportione, congosiacosa che la non he molto distante da la veritade. Ma quale sia la proporcione, la zo dita in altro luogo, quasi per demostratiua conclusione.[2])
29′ Deo gratias. Amen. Cumpleta die primo Aprilis 1488. |

1) Quando tu voray el diametro de una spera, multiplica la quantitade de essa spera per 343, e quela multiplicatione partila per $179\frac{2}{3}$, e de quelo, che ne viene, la radice cubicha sera el diametro adimandato. — Diese Anmerkung enthält der lateinische Text nicht.

des Kreisinhaltes und also auch den vierten Theil der Kugel vor sich hat. Wie es z. B. durch den Bogen *ae* geschieht, dessen Sinus rectus *fh* mit dem Sinus rectus des Bogens *ce*, nämlich mit *ef* multipliciert werden muss, und das Resultat von dem Kreisabschnitt *ehgc* abgezogen, den man durch Multiplikation des ganzen Kreisinhaltes mit dem Bogen *ecg* und nachherige Division des Ergebnisses durch den ganzen Kreisumfang erhält. Es sind nun hier diese Sinus nämlich $fh = 23^0 8' 25''$ und Sinus $fe = 52^0 23' 20''$. Ihnen entsprechen, wenn der Durchmesser 7 ist, für den ersten Sinus $1^0 20' 59''$, für den zweiten aber $3^0 3' 21''$. Daraus kann man auch finden, um wieviel der Würfeltheil, der von dem Pfeile und dem Durchmesser des Kreises gebildet wird, den Kugelabschnitt übertrifft. Denn das Quadrat des Durchmessers ist 49, und der Pfeil *cf* ist $2^0 9' 1''$. Durch Multiplikation von 49 mit $2^0 9' 1''$ erhält man also $105^0 21' 49''$. Der vierte Theil der Kugel ist aber $44^0 55'$, und subtrahiert man das von $105^0 21' 49''$, so bleiben 60^0 $26' 49''$ übrig, und um soviel übertrifft der Würfeltheil den vorgenannten Kugelabschnitt. Zieht man noch den erhaltenen Würfeltheil von dem halben Würfel ab, so erhält man auch, um wieviel dieser Rest den vierten Theil der Kugel übertrifft. Der einer Kugel vom Durchmesser 7 umgeschriebene Würfel ist z. B. gleich 343, und die Hälfte davon ist $171^0 30'$. Davon ziehe man den obengefundenen Würfeltheil, also $105^0 21' 49''$ ab, dann ist der Rest $66 \cdot 8 \cdot 11$. Dieser Theil verglichen mit dem vierten Theil der Kugel, also mit $44^0 55'$, übertrifft diesen offenbar in 21^0 $13' 11''$.[1])

O Du, der Du dieses Werk liest, wirst erkennen, dass ich Vieles gelehrt habe, was von andern gesagt ist, und manche Behauptungen anderer verbessert, und manches mit Gottes Hilfe gesagt habe, indem ich bei Berechnung des Kreises darauf aufmerksam machte, dass das Verhältnis des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser nicht gleich 22 : 7 ist, obwohl ich, sowohl wegen der Leichtigkeit der Berechnung und auch, weil es nicht dieses Werkes ist, sie zu rektifizieren, dieses Verhältnis angegeben habe vorzüglich deshalb, weil es nicht sehr weit von der Wahrheit abweicht. Das richtige Verhältnis aber habe ich schon an einem andern Orte gegeben durch einen fast vollständigen Beweis.[2])

Deo gratias, Amen. Vollendet am 1. April 1488.

---

1) Wenn man den Durchmesser einer Kugel finden will, so multipliciere man den Körperinhalt der Kugel mit 343 und theile das Produkt durch $179\frac{2}{3}$, dann ist die Kubikwurzel dieses Quotienten der verlangte Durchmesser. Das kommt darauf hinaus, dass $d^3 = \frac{21}{11} V$ oder $d^3 = \frac{6V}{\pi}$ ist.

2) Diese Arbeit ist vollständig verschollen.

Hieran schliesst sich auf Blatt 30^{r} und ^{v} eine *Tabula Sinuum* des nämlichen Verfassers für halbe Grade berechnet und auf Blatt 31^{r} bis 32^{r} eine ebenso eingerichtete *Tabula sinuum secundum proportionem 22 ad septem,* welche oben im Texte erwähnt ist.[1]) Blatt 32^{v} bis 34^{r} enthält eine *Tabula Sollis (!),* d. h. eine Tafel der Tageslängen für die einzelnen Tage des Jahres. Blatt 34^{v} ist leer.

Auf den Blättern 35^{r}—41^{v}, denen sechs leere Blätter folgen, worauf noch auf dem folgenden mit 42 bezeichneten Blatte das Obige fortgesetzt wird, sind eine Reihe ähnlicher Sätze niedergeschrieben, als sie in dem Werke Leonardo's sich finden. Sie sind von derselben Hand, wie dieses, geschrieben, aber, wie aus der ganz abweichenden Sprache und Orthographie

---

35 | **1.** A volere metere uno tondo mazore, che se fossa metere in uno quadro, fa cosi. Multiplica la lado del quadro, sia quanto se voglia, per $3\frac{1}{7}$, e tanto sera la circunferentia de quelo tondo, chi e in del quadro.[2])

2. A volere sapere larea de questo tondo, multiplica la mita del diametro per la mita de la circunferentia, et haueray la area del ditto tondo.[3])

3. A volere atrouare uno tondo, che tenga tanto larea sua, como fa la area de questo quadro, fa cosi, multiplica larea del tondo cun quella del quadro, e de quelo, che ne viene, troua la radix quadrata. La qual radice multiplicala per el diametro del tondo, chi e dentro dal quadro, e quello, che ne viene, partilo per larea del tondo, chi e dentro in del quadro, et quello, che ne vienera, sera el diametro del tondo, che tu circhi.

4. Anchora habiamo uno quadro, che ha per faza capeci 14, hora voglia trouare uno tondo, che sia tanto larea sua, quanto he la area de questo quadro. Fa chosi. Prima faray la area del quadro, e di 14 vie 14, fa 196. Poy multiplica questa area per $12\frac{4}{7}$, fara 2464. La radix
35′ quadrata de 2464, chie capeci 49 $\widetilde{\text{br}}$ 3 $\widetilde{\text{oz}}$ $9\frac{39}{50}$, sie la circunferentia, | che tu circhi.[4])

5. Se tu voy atrouare el diametro del tondo, che debbe essere tanto

---

1) Ich lasse ein Specimen beider Tafeln am Schlusse dieser Abtheilung des Bandes abdrucken.

2) $U = 3\frac{1}{7}\,d$; $\pi = 3\frac{1}{7}$. 3) $V = \frac{11}{14}\,d^2$.

4) 1 Capec. = 6 $\widetilde{\text{br}}$
1 $\widetilde{\text{br}}$ = 12 $\widetilde{\text{oz}}$

Es ist $\sqrt{2464} \sim 49{,}626$ statt 49,638 gerechnet.

hervorgeht, nicht von demselben Verfasser. Da sie aber doch sicher aus der nämlichen Zeit stammen als die Abschrift des Werkes LEONARDO's, füge ich sie hier ebenfalls an. Nach wieder zwei leeren Blättern findet sich von ganz anderer späterer Schrift noch die Notiz

„Nassete Zuan Vigenzo del 1502 adj 18 Zugno
de sabato a hore 9."

Hier also die Sätze des andern Verfassers:[1])

---

1. Um in ein Quadrat den grössten Kreis einzubeschreiben, der möglich ist, gehe man so vor. Man multipliciere die Seite des Quadrates, sie mag sein, welche sie will, mit $3\frac{1}{7}$, so gross ist dann der Umfang des Kreises, der in das Quadrat beschrieben ist.[2])

2. Um den Inhalt dieses Kreises kennen zu lernen, multipliciere man den Halbmesser mit der Hälfte des Umfanges, so erhält man den Inhalt genannten Kreises.[3])

3. Um einen Kreis zu finden, dessen Inhalt ebensoviel enthält[4]), als der Inhalt des Quadrates ausmacht, gehe man so vor. Man multipliciere den Inhalt des Kreises mit dem des Quadrates und suche von dem Produkte die Quadratwurzel. Diese Wurzel vervielfache man mit dem Durchmesser des Kreises, der in das Quadrat beschrieben ist, und das Ergebnis dividiere man durch den Inhalt des dem Quadrat einbeschriebenen Kreises, dann ist der erhaltene Quotient der Durchmesser des Kreises, der gesucht wird.

4. Es sei ferner ein Quadrat gegeben, dessen Seite 14 Capeci enthalte, ich will nun einen Kreis finden, dessen Inhalt ebenso gross ist, als der Inhalt dieses Quadrates. Mache es so. Zuerst berechne den Inhalt des Quadrates; er ist 14×14, das macht 196. Dann multipliciere diesen Inhalt mit $12\frac{4}{7}$, das giebt 2464. Die Quadratwurzel von 2464, die 49 Capeci 49 $\widetilde{\text{br}}$ $9\frac{39}{40}$ $\widetilde{\text{oz}}$ beträgt, ist der gesuchte Umfang.[5])

5. Will man jetzt den Durchmesser des Kreises finden, dessen Fläche

---

1) Die Nummerierung rührt von mir her.

2) Seite des Quadrates a, Umfang des Kreises $= 3\frac{1}{7}a$.

3) Inhalt des Kreises $= 3\frac{1}{7}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}\pi$.

4) Durchmesser des gesuchten Kreises x; dann ist

$$x = \left(\sqrt{\frac{a^2}{4}\pi \cdot a^2} \cdot a\right) : \frac{a^2}{4}\pi = \frac{2a}{\sqrt{\pi}},$$

was vollständig richtig ist.

5) Da der Kreisinhalt $= \frac{U^2}{4\pi}$ ist, so ist wirklich $U^2 = 4\pi \cdot a^2$.

larea, como e quela del quadro, fa cossi. Parti la ditta circunferentia per $3\frac{1}{7}$, che ne viene capeci 15 $\widetilde{\text{br}}$ 4 $\widetilde{\text{oz}}$ $9\frac{123}{1100}$, e tanto e lo diametro del ditto tondo.

6. E gli e uno quadrangulo, chi e per facia 4, e de longo 16. A volerlo redure a uno quadrato, che sia equale per facia, fa cosi. Multiplica la longeza cun la largeza, fara 64; la radice quadrata de 64, chi e 8, sera el lado del quadrato fatto (Fig. 1).

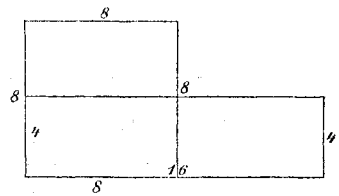


Fig. 1.

7. E gli e uno triangulo ouero uno quadro, che larea sua sie 80: voglio redure ad uno triangulo equilatero. La regula dice cosi. Quadra questa area, chi e 6400; poy multiplica per $5\frac{3}{4}$, fira 36 800; poy troua la radix quadrata de la radix de 36 800, e tanto sera per facia el dito triangulo, che tu circhi.[1])

8. Abiando lo lado del triangulo, volendo atrouare la perpendichulare, quadra lo lado del triangulo, e trane il $\frac{1}{4}$ de la quadratura, e del rimanente la radix quadrata sera la perpendichulare del triangulo.[2])

9. E volendo trouare lo lado de uno triangulo, che sia equilatero, fara cosi. Quadra la perpendichular, e giugni il $\frac{1}{3}$ de la quadratura: la
36 radix quadrata sera lo lado del triangulo.[3]) |

10. A volere atrouare, quanta distancia e dal centro de uno triangulo equilatero al cantone, fa cosi. Quadra lo lado del triangulo, e de la terza parte de quelo numero la radix quadrata sera la distantia dal centro al cantone.[4])

11. El' e uno triangulo ambligonio (Fig. 2), chi e per una faça 12, per laltra 10, e per laltra 6, e volgio sapere, doue chadera la perpendichulare, fa cosi. Multiplica 10 via 10, fa 100; poy 6 via 6, fa 16; tray 36 de 100, resta 64; piglia la mitade 64, chi e 32, e partilo per lado basso, chi e 12, ne viene $2\frac{2}{3}$, e queste $2\frac{2}{3}$ agiugnelo cun la mita del lado basso, chi e 6, fara $8\frac{2}{3}$, et in quelo logo chadera la perpendichulare.[5])

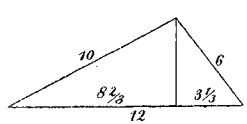


Fig. 2.

12. Et per trouare la quantita de essa perpendichulare, multiplica lo lado, chi e 6, in se medesimo, fa 36; poy multiplica quella parte del lado baso, chi e rimasa ultra la perpendichular, chi e $3\frac{1}{3}$, in si, fara $11\frac{1}{9}$;

---

1) Es muss natürlich $5\frac{1}{3}$ heissen, wie auch an spätern Stellen richtig angegeben wird.

2) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. 3) $a^2 = \frac{4}{3}h^2$.

ebenso gross ist als die des Quadrates, so mache man es so. Man theile den berechneten Umfang durch $3\frac{1}{7}$, wodurch 15 Capeci 41 $\widetilde{\text{br}}$ $9\frac{123}{1100}$ $\widetilde{\text{oz}}$ herauskommen, so gross ist dann der Durchmesser des genannten Kreises.

6. Gegeben ist ein Rechteck, dessen Breite 4 und dessen Länge 16 ist. Um es in ein Quadrat zu verwandeln, das gleiche Seiten hat, gehe man so vor. Man multipliciere die Länge mit der Breite, so macht das 64. Die Quadratwurzel von 64, die 8 ist, ist dann die Seite des zu zeichnenden Quadrates (Fig. 1).

7. Gegeben ein Dreieck oder ein Quadrat, dessen Inhalt gleich 80 ist, ich will es in ein gleichseitiges Dreieck verwandeln. Die Regel sagt so. Quadriere diesen Inhalt, das giebt 6400, darauf multipliciere ihn mit $5\frac{3}{4}$, so entsteht 36800; dann suche die vierte Wurzel von 36800, so gross ist dann die Seite des gesuchten Dreiecks.[1])

8. Hat man die Dreiecksseite und will die Höhe finden, so quadriere man die Dreiecksseite und ziehe $\frac{1}{4}$ von dem Quadrate ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die Höhe des Dreiecks.[5])

9. Und um die Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu finden (wenn die Höhe bekannt ist), mache es so. Quadriere die Höhe und füge dem Quadrat seinen dritten Theil hinzu, dann ist die Quadratwurzel die Dreiecksseite.[3])

10. Um zu finden, wie gross der Abstand des Mittelpunktes eines gleichseitigen Dreiecks von der Ecke ist, gehe man so vor. Man quadriere die Seite des Dreiecks, dann ist die Quadratwurzel aus dem dritten Theile dieser Zahl der Abstand des Mittelpunktes von der Ecke.[4])

11. Gegeben ist ein stumpfwinkliges Dreieck (Fig. 2), dessen eine Seite 12, die andere 10, die dritte 6 ist; ich will bestimmen, wohin der Höhenfusspunkt fällt. Mache es so. Multipliciere 10×10, das giebt 100; darauf 6×6, das ist 36; ziehe 36 von 100 ab, es bleibt 64; nimm die Hälfte von 64, die 32 ist, und theile sie durch die Grundlinie, die 12 hält, so kommt $2\frac{2}{3}$. Diese $2\frac{2}{3}$ füge zur Hälfte der Grundlinie hinzu, die 6 ist, so giebt das $8\frac{2}{3}$, und dahin fällt der Höhenfusspunkt.[5])

12. Und um die Länge der Höhe zu finden, multipliciere die Seite, welche 6 beträgt, mit sich selbst, das giebt 36, darauf vervielfache den Theil der Grundlinie, der über dem Höhenabschnitt geblieben ist, das ist $3\frac{1}{3}$, mit sich selbst, so giebt das $11\frac{1}{9}$; ziehe das von 36 ab, so bleibt $24\frac{8}{9}$, und die Quadratwurzel von $24\frac{8}{9}$, das ist $4\frac{720828347}{729000000}$, ist die Länge der Höhe.

---

4) Der fragliche Abstand ist $\frac{2}{3}h$, also gleich $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

5) Hier ist die Formel $a^2 - b^2 = p^2 - q^2 = c(p - q)$ benutzt, im Gegensatz zu der Rechnung Leonardo's.

tralo de 36, rimane $24\frac{8}{9}$, e la radice quadrata de $24\frac{8}{9}$, chi e $4\frac{720828347}{729000000}$, e la quantita de la perpendiculare. La proua sie a quadrare la perpendiculare, fa $24\frac{8}{9}$; poy quadra $8\frac{2}{3}$, fa $75\frac{1}{9}$; agiunti in siema fa 100, e la
36′ radice quadrata e con el lado de 10. |

13. El' gie uno tondo, chi e per el suo diametro 10; a volere sapere el suo sen drito fa cosi. El quadrato de quello parte del semidiametro, che se azonzerebe a la sagita a compire el semediametro, tralo del quadrato del semediametro, e del rimanente la radix quadrata sera el sen drito.

14. E per sapere el sen verso, cioe la sagitta, el quadrato del sen drito tralo del quadrato del semediametro, e del rimanente la radix quadrata sera quello, che se agiugne sopra el semediametro. El qual tralo dal semediametro, el resto sera la sagita. Exempli gratia (Fig. 3) el quadrato *cb* tralo dal quadrato *cd*, e del rimanente la radix quadrata sera *ab* el sen suo drito. E per el sen verso el quadrato *ab* tralo dal quadrato *dc*, e del rimanente la radix quadrata sera *bc*, el qual tralo de *cd*, e rimagnera *db*, la sagita ouero el sen verso.[1])

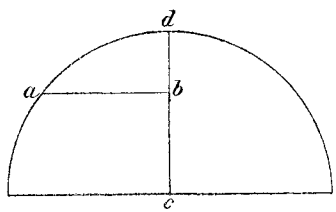


Fig. 3.

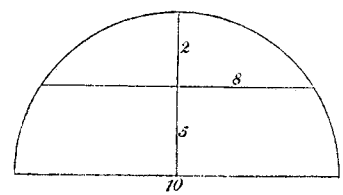


Fig. 4.

15. El' gie uno tondo, chi e per diametro $\widetilde{\text{br}}$ 10; taglione una fetta, chi e longa $\widetilde{\text{br}}$ 8: voglio sapere, quanto sera alta, cioe, quanto sera la sagita de quella feta (Fig. 4). Fa cossi. El quadrato de la mita de la longeza de la feta tralo dal quadrato del semediametro, e del rimanente la radix quadrata sera quello, che se azonze sopra el semediametro. El
37 qual tralo dal semediametro: el rimanente | sera la sagita, che se circhaua.

16. Volendo la longeza de tuta la feta per la sagita, multiplica la sagita, che se taia via dal diametro, per lo resto del diametro, e quelo, che ne viene, multiplicalo per 4, e la radix quadrata sera la longeza de la feta, che se circhaua.[2])

17. Et se voray sapere larcho de la porcione, sapendo la corda, la sagita e lo diametro, adiugni la mita de la corda cun la sagita, e tuto questo parti per mitado, et lo proueniente sapi, che parte e de tuto el diametro, e tal parte, como sera de tuto el diametro, tal parte sera larcho de la porcione de tula la circunferentia del circhio.[3])

Die Probe davon ist, man quadriere die Höhe, das giebt $24\frac{8}{9}$, dann quadriere man $8\frac{2}{3}$, das macht $75\frac{1}{9}$. Zusammengezählt giebt es 100, und davon die Quadratwurzel ist wie die Seite gleich 10.

13. Gegeben ein Kreis, dessen Durchmesser 10 ist. Um für einen Bogen den Sinus rectus zu finden, mache man es so. Das Quadrat des Theiles des Halbmessers, den man zum Pfeile hinzufügen müsste, um den Halbmesser zu vollenden, ziehe man vom Quadrate des Halbmessers ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes der Sinus rectus.

14. Und um den Sinus versus, das ist den Pfeil, zu erhalten, ziehe man das Quadrat des Sinus rectus vom Quadrate des Halbmessers ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes dasjenige, was man zu der Vollendung des Halbmessers hinzulegen müsste. Man ziehe dies vom Halbmesser ab, so ist der Rest der Pfeil. Z. B. (Fig. 3) ziehe man das Quadrat von cb von dem Quadrate der cd ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes ab, der zugehörige Sinus rectus. Und für den Sinus versus ziehe man das Quadrat der ab vom Quadrate der dc ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die bc. Sie ziehe man von cd ab, so bleibt db übrig, der Pfeil oder der Sinus versus.[1])

15. Gegeben ein Kreis, dessen Durchmesser 10 ist. Ich schneide davon ein Stück ab, das 8 Ellen lang ist, und will wissen, wie hoch dasselbe ist, das heisst, wie gross der Pfeil dieses Abschnittes ist (Fig. 4). Mache es so. Das Quadrat der Hälfte der Länge des Abschnittes ziehe vom Quadrate des Halbmessers ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes das, was man ⟨dem Pfeil⟩ zur Vollendung des Halbmessers hinzufügen muss. Das ziehe man vom Halbmesser ab, der Rest ist der Pfeil, den man sucht.

16. Will man die Länge des ganzen Abschnittes aus dem Pfeile bestimmen, so multipliciere man den Pfeil mit dem Reste des Durchmessers, wenn man von ihm den Pfeil abgezogen hat, und multipliciere das Produkt noch mit 4: dann ist die Quadratwurzel davon die Länge des Abschnittes, die man sucht.[2])

17. Will man auch den Bogen des Abschnittes finden, wenn man die Sehne, den Pfeil und den Durchmesser kennt, so addiere man die Hälfte der Sehne zu dem Pfeil, halbiere die Summe, und sehe dann zu, der wievielte Theil das vom ganzen Durchmesser ist. Dann ist der Bogen der ebensovielte Theil des ganzen Umfanges, der wievielte das Obige vom ganzen Durchmesser ist.[3])

---

1) In No. 13 und 14 sind die Formeln enthalten:

$$\sin^2 = r^2 - (r - \text{sinvers})^2; \quad \text{sinvers} = r - \sqrt{r^2 - \sin^2}.$$

2) Dieselben Rechnungen, wenn statt des Sinus die Sehne, also der doppelte Sinus, gegeben ist. 3) Danach müsste $\text{Arc}\, 2\alpha = (\sin\alpha + \text{sinvers}\,\alpha)\pi$ sein.

18. A volere sapere larea de una porcione, che fusse menore cha mezo el circhio, fa de besogna sapere prima larcho de la ditta porcione e la corda, che se sottende a lo ditto archo, e la sagita ouero el sen verso. Como sarebe questa porcione *acdb* (Fig. 5), de la quale la corda fusse 8 e la sagita 2, e lo archo fosse 10. Poy bisogna sapere, de qual circhio e stata taiada la ditta porcione. La qual saperay per questo modo. Multiplicando la mita de la corda in si medesima, e partire per la sagita, et a quello, che ne viene, agiugneui la ditta sagitta, et aueray lo diametro del circhio, de che el fo taiado.[1])

Verbi gratia multiplica *ab* in si, fa 16; parti questo 16 per *bc*, e
37′ vegnera *pb* 8, | ali quali zonzi *bc*, sera tuto el diametro 10. Ma a volere sapere larea de la dita porcione, multiplica la mita del diametro, cioe *pm*, per la mita del archo, cioe per *ac*, e quelo, che ne viene, serualo. Poy multiplica quella parte, che se azonzerebe a la sagita a compire el semediametro, cioe *bp*, per la mita de la corda *ab*, e quelo, che ne vene, tralo de quello, che tu seruasti, e lo rimanente sera larea de la ditta porcione *abdc* quesita.

19. A volere sapere larea de la mazore porcione cha mezo el circhio fa, como ay fatto di sopra, saluo che tu aueray agiugnere a quello, che tu seruasti, quello, che tu chauy de sopra da lo seruato.

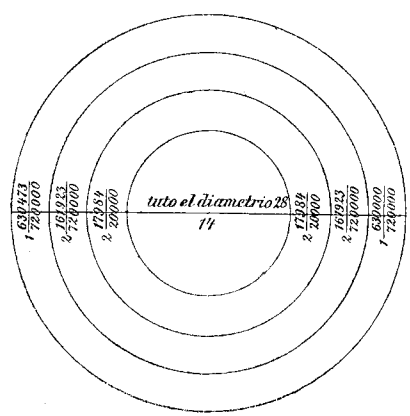


Fig. 6.

20. El' gie uno tondo, chi e 28 per diametro, del quale se vole fare 4 parti equale, e che ciaschuna parte vada al tondo (Fig. 6). Adimando, quanta parte del diametro prendera ciaschuna de queste parte. Fa cosi. Del quadrato del diametro, cioe 788, trane la quarta parte, chi e 196, e lo rimagnera 588, de lo quale 588 la radix quadrata sera lo diametro de li $\frac{3}{4}$, chi rimagnera in mezo del circhio, cioe $24\frac{89527}{360000}$ [2]), siche da $24\frac{89527}{360000}$ per fina 28 sie $3\frac{270473}{360000}$ el diametro de la quarta parte de fora. E per lo secondo quarto tray quella prima quantita, cioe 196, de 588, resta 392, e la radix quadrata, cioe $19\frac{7989}{10000}$ 3′,

1) Hier kennt also der Verfasser die Formel $d = \text{sinvers} + \frac{\sin^2}{\text{sinvers}}$.

2) $\sqrt{588} = 23{,}2487$, der Werth unseres Verfassers $= 24{,}24868$.

18. Um den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden, der kleiner ist als der Halbkreis, muss man zunächst den Bogen des Abschnittes kennen und die Sehne, welche den fraglichen Bogen überspannt, sowie den Pfeil oder den Sinus versus. Wenn z. B. der fragliche Abschnitt *acdb* (Fig. 5) wäre, dessen Sehne 8, der Pfeil 2 und der Bogen 10 ist, so muss man bestimmen, von welchem Kreis der fragliche Abschnitt genommen ist. Das findet man auf folgende Weise. Man multipliciere die Hälfte der Sehne mit sich selbst und theile dann durch den Pfeil und zu dem Ergebnis addiere man den Pfeil, so hat man den Durchmesser des Kreises, von dem der Abschnitt genommen ist.[1])

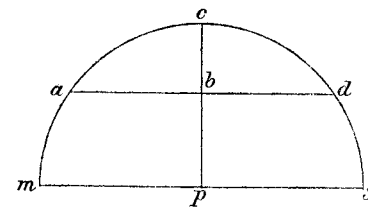


Fig. 5.

Z. B. multipliciere *ab* mit sich selbst, das macht 16, theile diese 16 durch *bc*, so kommt $pb = 8$. Dazu addiere *bc*, dann ist der ganze Durchmesser 10. Um aber den Inhalt genannten Abschnittes zu finden, multipliciere man den Halbmesser, also *pm*, mit dem halben Bogen, also mit *ac*, und merke sich das Ergebnis. Darauf multipliciere man das Stück, das man zum Pfeil hinzulegen musste, um den Halbmesser zu erhalten, also *bp*, mit der Hälfte der Sehne *ab*, und das Ergebnis ziehe man von dem Gemerkten *ab*, so ist der Rest der gesuchte Inhalt des fraglichen Abschnittes *abdc*.

19. Um den Inhalt des Abschnittes, der grösser ist als der Halbkreis, zu bestimmen, mache man es genau so, wie man es eben gemacht hat, nur dass man das zu dem Gemerkten addiert, was man oben von ihm abgezogen hat.

20. Gegeben ist ein Kreis, dessen Durchmesser 28 ist. Man will von diesem vier gleiche Theile machen, so dass jeder Theil in die Runde geht (Fig. 6). Ich frage, den wievielten Theil des Durchmessers wird jeder Theil einnehmen. Mache es so. Von dem Quadrate des Durchmessers, also von 784, ziehe seinen vierten Theil, das ist 196, ab, so bleiben 588. Die Quadratwurzel aus 588 wird dann der Durchmesser der $\frac{3}{4}$ sein, die in der Mitte des Kreises übergeblieben, also $24\frac{89527}{360000}$[2]), so dass von $24\frac{89527}{360000}$ bis zu 28 der Durchmesser des vierten Theiles von aussen gleich $3\frac{270473}{360000}$ sein wird. Für das zweite Viertel ziehe man die vorhin benutzte Zahl, also 196 von 588 ab, so bleiben 392. Davon ist die Quadratwurzel, nämlich $19\frac{7989}{10000}$[3]), der Durchmesser der zwei Viertel in der Mitte, so dass

---

3) $\sqrt{392}$ ist wirklich $= 19{,}7989$, so dass hier ganz genau gerechnet ist. Wie so genaue Werthe gefunden sind, ist nicht bekannt.

sie lo diametro de li 2 quarti de mezo, siche da $19\frac{7989}{10000}$ fina la $24\frac{89527}{360000}$
38 sie $4\frac{161923}{360000}$, | el diametro del secondo quarto. E per lo terzo quarto tray la prima quantita, cioe 196, de 392, resta 196, e la radix quadrata, cioe 14, sie el diametro del quarto de mezo, siche da 14 per fina $19\frac{7989}{10000}$ sie $5\frac{7989}{10000}$, el diametro del terzo quarto non precisamente.

21. Si tu volesse partire in 3 parte, tolle via la terza parte, e del resto la radix quadrata, como e fatto de sopra. E volendo partire in 2 parte, tolle via la mitade del quadrato del diametro, e del resto la
98′ radice, como dicho di sopra. |

22. Elle una peza de tera, la quale piu longa cha larga volte $3\frac{2}{5}$, et e $\overline{\text{p}}^{\text{ts}}$ 2. Adimando, quanto e longa e larga. Fa cossi. Fa la proporcione, cioe atroua duy numeri, che luno tenga laltro volte $3\frac{2}{5}$, chi e 5 e 17, perche 17 contiene 5 volte $3\frac{2}{5}$. E 5 e 17 multiplicato in sieme fa 85, el quale serualo. Poy fa de le $\overline{\text{p}}^{\text{ts}}$ 2 tabule, che sono 48, le quale 48 fanne $\frac{1}{4}$ de tabule, che sono 192. El quale e da multiplicare con 85 seruato, fara 16320, de la qual quantitade la radix quadrata e da partire per la proportione, cioe per 5 e per 17, da parsi luno dal lattro, et haueray la longeza e la largeza fatta.

23. Try compra una peza de tera, e ciaschuno paga tanti duchati per zozo, quanti zozi gli tocha in sua parte, e costo in tuto 144 ducati. Adimando, quanti zozi gli tocha per parte. Fa cossi. Piglia la radice quadrata de 144, chi e 12; poy troua 3 numeri, che multiplicati in si medisimi e giunte in sieme le multiplicatione abiano radice, como sarebe 2 e 3 e 6, perche 2 via 2 fa 4, e 3 via 3 fa 9, et 6 via 6 fa 36; azonto in seme 4 et 9 e 36 fa 49, la chuy radice he 7, numero partitore. Poy multiplica el numero, cioe 2, via 12, fa 24, partilo per 7, ne viene $3\frac{3}{7}$ zozi a uno; poy multiplica 3 via 12, fa 36, partilo per 7, ne viene zozi $5\frac{1}{7}$ per laltro; poy multiplica 6 via 12, fa 72, partilo per 7, ne vene $10\frac{2}{7}$
39 per lo terzo. Zonte in sieme queste 3 quantitade sono zozi $18\frac{6}{7}$, | e tanto fa la peza de la terra. E per saper la quantita de duchati per uno, fa cossi. Multiplica la prima quantita di zozi in si medesima, cioe $3\frac{3}{7}$, monta d$\cancel{\text{r}}$ $11\frac{37}{49}$; poy multiplica zozi $5\frac{1}{7}$ in si medesimo, monta d$\cancel{\text{r}}$ $26\frac{22}{49}$; poy multiplica zozi $10\frac{2}{7}$ in si medesimo, monta d$\cancel{\text{r}}$ $105\frac{39}{49}$. Azonte insieme queste 3 quantita de duchati fano in soma d$\cancel{\text{r}}$ 144, como ponessimo da prima.

24. El' e uno bocheto, che mena $\widetilde{\text{oz}}$ 12 de aqua fora de uno nauilio, ed e largo el ditto bocheto $\widetilde{\text{oz}}$ 10 e alto $\widetilde{\text{oz}}$ 12. Et vorra fare uno altro

von $19\frac{7989}{10000}$ bis zu $24\frac{89527}{360000}$ der Durchmesser des zweiten Viertels gleich $4\frac{161923}{360000}$ ist. Für das dritte Viertel ziehe die erste Zahl, nämlich 196, von 392 ab, dann bleibt 196. Die Quadratwurzel davon, das ist 14, ist der Durchmesser des innern Viertels, so dass von 14 bis zu $19\frac{7989}{10000}$ der Durchmesser des dritten Viertels gleich $5\frac{7989}{10000}$ nicht ganz genau sein wird.

21. Wollte man in drei Theile theilen, so ziehe man immer den dritten Theil ab und suche vom Reste die Quadratwurzel, wie oben geschehen ist. Um aber in zwei Theile zu zerschneiden, ziehe man stets die Hälfte des Quadrates des Durchmessers ab und aus dem Reste die Wurzel, wie ich oben sagte.

22. Es ist ein Landstück gegeben, das $3\frac{2}{3}$mal so lang als breit ist, und 2 $\mathfrak{p}^s$ enthält. Ich frage, wie lang und breit es ist. Man suche das Verhältnis in ganzen Zahlen, das heisst, man suche zwei Zahlen, von denen die eine das $3\frac{2}{5}$fache der andern ist; es ist 5 : 17, denn 17 enthält die 5 $3\frac{2}{5}$mal. Multipliciere 5 mit 17, das giebt 85 und merke das. Darauf mache aus den 2 $\mathfrak{p}^s$ Tabulae, es sind 48, die $\frac{1}{4}$ Tabula ausmachen, das ist 192. Das ist mit den gemerkten 85 zu multiplicieren und macht 16320. Die Quadratwurzel dieser Grösse ist nach dem Verhältnis 5 : 17 zu theilen, eins vom andern, so hat man die Länge und die Breite.

23. Drei kaufen ein Landstück und ein jeder bezahlt soviel Dukaten für den Zozo, soviel Zozi ihm auf seinen Theil zufallen; im Ganzen kostet es 144 Dukaten. In frage, wieviel Zozi jedem auf seinen Theil gebühren. Mache es so. Nimm von 144 die Quadratwurzel, sie ist 12. Dann suche drei Zahlen, die jede mit sich selbst multipliciert, und dann die drei Produkte zusammengezählt eine Quadratwurzel besitzen, wie es 2, 3 und 6 sind, denn $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, $6 \times 6 = 36$ und 4, 9 und 36 zusammengezählt giebt 49, deren Wurzel 7 ist, der Theiler. Nun multipliciere die erste Zahl 2 mit 12, das macht 24, theile durch 7, so kommt $3\frac{3}{7}$ Zozi für den Ersten. Dann multipliciere 3 mit 12, macht 36; theile durch 7, so kommen $5\frac{1}{7}$ Zozi für den Zweiten. Darauf multipliciere 6 mit 12, macht 72, dividiere durch 7, giebt $10\frac{2}{7}$ Zozi für den Dritten. Diese drei Grössen addiert geben $18\frac{6}{7}$ Zozi, und so gross war das Landstück. Um die Zahl der Dukaten für einen jeden zu finden, mache es so. Multipliciere die erste Anzahl Zozi mit sich selbst, also $3\frac{3}{7}$, so kommen $11\frac{37}{49}$ Dukaten, dann multipliciere $5\frac{1}{7}$ Zozi mit sich selbst, so kommen $26\frac{22}{49}$ Dukaten; endlich multipliciere $10\frac{1}{7}$ mit sich selbst, so kommen $105\frac{39}{49}$ Dukaten. Alle diese drei Summen von Dukaten zusammengezählt machen zusammen 144 Dukaten, wie wir zuerst gesagt haben.

24. Es ist eine Öffnung, welche aus einem Schiffe 12 Unzen Wasser ablässt. Diese Öffnung ist 10 Unzen breit und 12 Unzen hoch. Man will

bocheto, che menara $\widetilde{oz}$ 18 del dito nauilio a quela medesima proporcione. Adimando la largeza e la alteza. Fa cosi. Multiplica la largeza del noto bocheto per le onze de quello, che voliamo sapere, cioe 10 via 18, fa 180 area. Poy fa la proporcione de la largeza e de lalteza del noto bocheto, cioe mette 12 sopra 10, como vedi qui: $\frac{12}{10}$, esquisali sera $\frac{6}{5}$, el qual 6 e 5 e da multiplicare in siema, fa 30; el qual 30 multiplicalo con 180 di sopra, fa 5400, de la qual somma la radix quadrata[1]) e da partire per la proportione, cioe per 6 e 5, e quelo, che ne vegnero, sera la largeza e la alteza del bocheto da fir fatto. E si como 6 contiene 5 volte $1\frac{1}{5}$,
39′ cosi si contegnera quelli numeri, che vegnera, luno alo altro. |

25. El quadrato de qual numero tu voy, ouero superficie tu voy, multiplica per $5\frac{1}{3}$, el radix radicis de quel, che ne vegnera, sera el lado del triangulo equilatero.

26. E a fare uno tondo, multiplica, che area tu voy, per $12\frac{4}{7}$, e de quello, che ne viene, la radice quadrata he la circunferentia.

27. El' e uno triangulo rectiangulo per faza 10 e longo 20 (Fig. 7), e la sua area 100. A volere trare uno, che sia area 50, ouero partire quelo per mezo, quanto sera lo per facia e per longo a quela medesima proporcione? Fa cosi. Fa la proportione de la facia sopra la longeza cosi, como qui, cioe 10 sopra 20 in quella forma $\frac{10}{20}$, squisali sono $\frac{1}{2}$; poy di 1, chi e sopra la riga, via 2, che de sotto, fa 2. Poy multiplica quello 2 per la area de quello triangolo, cioe 2 via 100, fa 200, del qual 200 la radix quadrata partila per la proporcione, cioe per 1 e per 2, e quelo, che ne vegnera, sera la longeza e la facia.

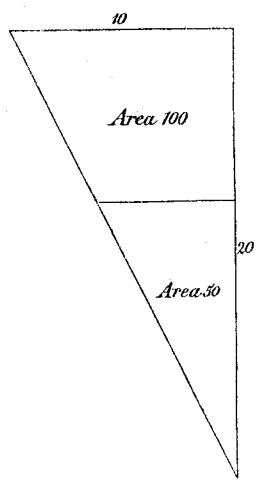


Fig. 7.

28. E se volesse $\frac{1}{3}$, piglia li $\frac{2}{3}$ de la area del tuto; e se ne volesse $\frac{1}{4}$, piglia li $\frac{3}{4}$ de la area. E se volesse li $\frac{1}{5}$, piglia li $\frac{4}{5}$ de la area del tuto, et sic de singulis, e fa como de sopra.

29. Ma nota, sel triangulo equilatero ouero isoceles, fa la proporcione de la mita de lo abaso
40 sopra tuta la perpendichulare, la quale | proporcione multiplica cun quella parte de quantita, che tu voy, operando, como ho dito de sopra, et haueray tuta la perpendichulare e la mitade de lo abaso, che se circhaua.

30. A chi volesse partire una peza de terra, che fosse per una testa

1) Radix 73 · 29 · 5; diuisa per 6 e per 5 ne viene 12 · 14 · 50 · 50 per 6, et per 5: 14 · 41 · 49

eine andere Öffnung herstellen, die 18 Unzen aus dem Schiffe abführen soll, nach demselben Verhältnis (von Breite und Höhe): ich frage nach der Breite und Höhe. Mache es so. Multipliciere die Breite der bekannten Mündung mit den Unzen derjenigen, welche wir berechnen wollen, also $10 \times 18 = 180$. Dann bestimme das Verhältnis der Breite zur Höhe der bekannten Öffnung, das heisst, setze 12 über 10, wie man es hier sieht, $\frac{12}{10}$, gekürzt wäre es $\frac{6}{5}$. Diese 6 und 5 sind zu multiplicieren, das macht 30; diese 30 multipliciere mit den obigen 180, so macht das 5400, und die Quadratwurzel dieser Summe ist durch das Verhältnis zu theilen, also durch 6 und 5, dann ist das Ergebnis die Breite und Höhe der zu konstruierenden Öffnung. Und so wie 6 die 5 $1\frac{1}{5}$mal enthält, so werden auch die sich ergebenden Zahlen sich gegeneinander verhalten.[1])

25. Das Quadrat einer beliebigen Zahl oder einer beliebigen Fläche multipliciere man mit $5\frac{1}{3}$, dann ist die vierte Wurzel des entstehenden Produktes die Seite des (ebenso grossen) gleichseitigen Dreiecks.

26. Um aber einen Kreis zu erhalten, multipliciere eine beliebige Fläche mit $12\frac{4}{7}$, dann ist die Quadratwurzel des Ergebnisses der Umfang des Kreises.

27. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck von der Grundlinie 10 und der Länge 20 (Fig. 7), und seine Fläche ist 100. Man will davon ein anderes abschneiden, dessen Fläche 50 ist, oder das gegebene halbieren: wie lang und wie breit wird es nach dem nämlichen Verhältnis sein? Mache es so. Suche das Verhältnis der Grundlinie zur Länge so wie hier, indem man nämlich 10 über 20 setzt in dieser Form $\frac{10}{20}$, gekürzt ist es $\frac{1}{2}$. Dann sage: 1, was über dem Strich steht, mal 2, das unten ist, giebt 2. Nun multipliciere diese 2 mit dem Inhalte des Dreiecks, also $2 \times 100 = 200$. Die Quadratwurzel dieser 200 theile dann nach dem Verhältnis, also von 1 : 2, so ist dann das, was herauskommt, die Länge und die Grundlinie.

28. Will man $\frac{1}{3}$, so nimm $\frac{2}{3}$ von dem Gesamtinhalte weg; will man $\frac{1}{4}$, so nehme man $\frac{3}{4}$ des Inhaltes, und für $\frac{1}{5}$ nehme man $\frac{4}{5}$ des Gesamtinhaltes und so für die übrigen, und verfahre wie vorher.

29. Merke aber, ist das Dreieck gleichseitig oder gleichschenklig, so suche das Verhältnis der halben Grundlinie zu der ganzen Höhe. Dieses Verhältnis multipliciere mit dem grössern Theile, welchen man will, indem man so verfährt, wie ich oben gesagt habe, und erhält dadurch die ganze Höhe und die Hälfte der Grundlinie, die man sucht.

30. Will man ein Landstück theilen, das an einem Kopfende 6 Capezi

---

1) Die Wurzel ist 73 · 29 · 5; dividiert durch 6 und durch 5 kommt 12 · 14 · 50 · 50 für 6, und für 5: 14 · 41 · 49.

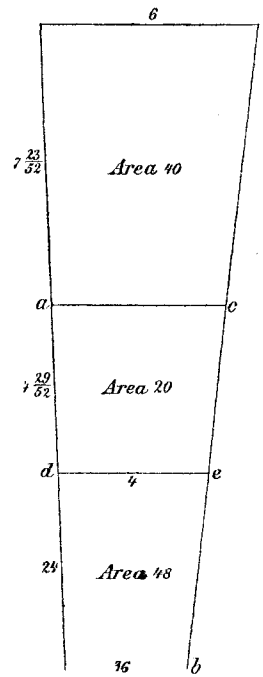


Fig. 8.

capezi 6 (Fig. 8), et per laltra capezi 4, e per longo capezi 12, e larea sua 60, prima fa cosi. Compisse la piramide in questo modo. Multiplica la testa de 6 per la longeza, chi e 12, fa 72, e partilo per la diferentia de la teste, chi e 2, ne viene 36, la longeza de la piramide. Cossi fatto, fa la area de tuta la piramide ouero de tuto lo triangulo, chi e 108, del qual 108 la radix quadrata sie $10\frac{2}{5}$ non aponto seruala. E poy fa larea de *bd*, cioe del arapente de la piramide, chi e 48; a la qual 48 azonzege quela parte de larea, che tu voy cauare de la dita peza de terra, cioe se voy partila per mezo, azonze la mita de larea de la dita peza de terra, e se voy $\frac{1}{4}$, azonze $\frac{1}{4}$, et sic de singulis. Partendo per $\frac{1}{3}$ ne troueremo adoncha $\frac{1}{3}$ de larea, chi e 20; azonto 20 a 48, fa 68, del qual 68 la radix quadrata sie $8\frac{1}{4}$ non aponto, seruala. E per atrouare donda chade la perpendichulare, multiplica la longeza de tuta la piramide per la radix de 68, perche le son le aree *dcad* e *dedb* azonte in sieme, chi e $8\frac{1}{4}$, via 36, che fa 297, e partilo per la radix de larea de tuta la piramide, chi e $10\frac{2}{5}$, che ne viene *ab* $28\frac{29}{52}$, detrato *db*
40′ 24 | resta $4\frac{29}{52}$, el caso de la perpendiculare. E per sapere la longeza de la perpendichulare, multiplica *de* per *ab* e partilo per *db*, et haueray *ac* la perpendichulare $4\frac{79}{104}$, e fatta.

31. Quando tu saperay larea de uno circhulo, e tu voray el suo diametro, azorze li $\frac{3}{11}$ de tutta larea a la ditta area, e la radix quadrata de ditta quantitade sera el diametro.

32. A volere fare uno triangulo equilatero, che sia doue volte tanto larea sua, como sia li try sui ladi azonti in sema, faray cosi. Dopia li 3 ladi del triangulo da fir fatto, fan 6, poy quadralo, cioe 6 via 6, fa 36; el quale 36 multiplicalo sempre per $5\frac{1}{3}$, che fara 192, e la radix quadrata sera el lado del triangulo adimandato; fatta.

33. E se volesse 3 volte tanto larea suo, como sarebe li ladi azonti in siema, toy 3 volte li ladi del triangulo, che sarebe 9, e poy quadra el dito 9, fara 81; el qual 81 multiplica sempre per $5\frac{1}{3}$, che fara 432, e la radix quadrata sera el lado del triangulo adimandato.

34. Quando larea de uno triangulo ambligonio e doy ladi noiando, atrouare el terzo lado, fa cosi. Parti larea del dito triangulo per la
41 mitade del lado mazore, et quello | multiplicalo per se medesimo, et quella

(Fig. 8), am andern 4 Capezi hält, und in der Länge 12 Capezi hat, und dessen Fläche 60 ist, so mache man es zunächst so. Man vollende es zu einem vollständigen Dreieck in folgender Weise. Multipliciere das Kopfende 6 mit der Länge, die 12 ist, das giebt 72, und theile das durch die Differenz der beiden Kopfenden, nämlich durch 2, so kommt 36, die Länge des ganzen Dreiecks. Nachdem diese gefunden, suche man den Inhalt des ganzen Dreiecks, der 108 ist. Von diesen 108 ist die Quadratwurzel nicht ganz genau $10\frac{2}{5}$; merke sie dir. Dann suche den Inhalt von bd, d. h. des Arapente des Dreiecks, er ist 48; zu diesen 48 füge denjenigen Theil des Inhaltes, den du von dem gegebenen Landstück abschneiden willst, hinzu, d. h., will man ihn halbieren, so addiert man die Hälfte des Inhalts des fraglichen Landstückes, will man $\frac{1}{4}$, so fügt man $\frac{1}{4}$ hinzu, u. s. w. Indem wir nun für $\frac{1}{3}$ theilen, suchen wir also $\frac{1}{3}$ des Inhalts, es ist 20. Nun ist $20 + 48 = 68$ und es ist $\sqrt{68} = 8\frac{1}{4}$, wenn auch nicht ganz genau. Auch dies verwahre. Um nun zu finden, wohin der Fusspunkt des Lothes fällt, multipliciere die Länge des ganzen Dreiecks mit $\sqrt{68}$, weil es die Flächen $dcad$ und $dcdb$ zusammengenommen sind, das ist ja $8\frac{1}{4} \times 36 = 297$, und theile durch die Wurzel aus der Fläche des ganzen Dreiecks, nämlich durch $10\frac{2}{5}$, so kommt daraus $ab = 28\frac{29}{52}$. Davon $db = 24$ abgezogen, bleibt $4\frac{29}{52}$, der Fusspunkt des Lothes. Und um die Länge des Lothes zu finden, multipliciere de mit ab und theile durch db, so erhält man ac das Loth $= 4\frac{79}{104}$, und ist gemacht.

31. Wenn man den Inhalt eines Kreises kennt, und wünscht seinen Durchmesser, so füge man $\frac{3}{11}$ des ganzen Inhaltes dem Inhalte hinzu, so ist die Quadratwurzel der erhaltenen Grösse der Durchmesser.

32. Um ein gleichseitiges Dreieck zu finden, das einen zweimal so grossen Flächeninhalt hat, als seine drei Seiten zusammengenommen sind, mache es so. Verdoppele die drei Seiten des zu suchenden Dreiecks, das macht 6, dann quadriere dies, $6 \times 6 = 36$; diese 36 multipliciere jedesmal mit $5\frac{1}{3}$, das giebt 192, dann ist die Quadratwurzel davon die Seite des verlangten Dreiecks. Fertig.

33. Will man die dreimal so grosse Fläche haben, als die drei Seiten zusammengenommen sind, so nimm die Seiten des Dreiecks dreimal, das wäre 9. Darauf quadriere genannte 9, das giebt 81. Diese 81 multipliciere immer mit $5\frac{1}{3}$, das macht 432, dann ist die Quadratwurzel die Seite des verlangten Dreiecks.

34. Kennt man die Fläche eines stumpfwinkligen Dreiecks und zwei Seiten, und will die dritte Seite haben, so verfahre man so. Man theile die Fläche des gegebenen Dreiecks durch die Hälfte der grössern Seite und multipliciere das mit sich selbst und merke das Produkt. Darauf multi-

multiplicatione serua. Poy multiplica laltro lado in si medesimo, e quelo, che ne viene, tralo del seruato, sel si puo, ouero el seruato de quello, e del resto toy la radix quadrata, la qual radice tralla del primo lado, et lo rimanente multiplicalo in si medesimo, e quelo, che ne vegnera, azonzelo a lo numero, che tu seruasti, e quelo, che vegnera, la radix quadrata sara el terzo lado adimandato.

35. A metere el mazore triangulo, che se possa metere equilatero in uno tondo, fa cosi. Piglia li $\frac{3}{4}$ del diametro, e multiplicali contra laltro $\frac{1}{4}$, chi e rimasto, e la quantita, che fara, multiplicala per 4, e la somma, che fara, la radix quadrata sera el lado del triangulo adimandato.

36. A volere la quantita de una piramide tronchata, che sera quadra, e che sia 4 per facia, cioe la baso mazore, e che sia per lo abaso menore 2, e che sia per lo asale longo 10, como apare qui per figura (Fig, 9), fa cossi. Quadra lo abaso mazore, che fara 16, poy quadra lo abaso menore, che fa 4; azonti questi doy quadrati de li abasi fanno 20. Poy multiplica luno lado del abaso con laltro lado, cioe 2 via 4, fa 8; azonto con 20 fa 28, el qual 28 e da moltiplicare con la terza parte de lo asale, chi e $3\frac{1}{3}$, che fara $93\frac{1}{3}$,
41 la quantita adimandata.[1]) |

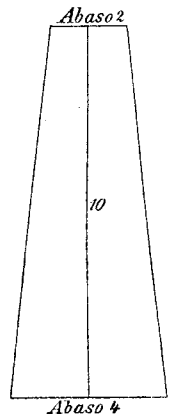


Fig. 9.

37. A volere la quantita de uno seratile, como he za segnato qui per figura (Fig. 10), che sia longo 10 de sotto, e lo abasso longo 6, e de sopra longo 8, e per lalteza 5 perpendichulariter, faray cosi. Multiplica la longeza mazore per la abasso, cioe 10 via 6, che fa 60, serualo. Poy multiplica la mitade de la longeza de sopra contra lo abasa, cioe 4 via 6, fa 24. Azonzelo cun el 60 seruato, fara 84, el quale 84 multiplicalo per la terza parte de 5, chi e la sua alteza, cioe $1\frac{1}{3}$ via 84, fara 140, la quantitade adomandata.

38. La proporcion del diametro a la circonferentia non he como 7 a 22, cioe $3\frac{1}{7}$, perche el e troppo, ne anche como e $3\frac{10}{71}$, perche el e pocho, secondo la demonstracione de Archimede. La diferentia de $3\frac{1}{7}$ ad $3\frac{10}{71}$ sie $\frac{1}{497}$, e la otaua parte de $\frac{1}{497}$ sie $\frac{1}{3976}$; azonzelo a $3\frac{10}{71}$, fara $3\frac{39831}{282296}$, e
42 questa e la proporcion del diametro a la circonferentia.[2]) |

39. El' e da sapere secondo Ptholomeo, lo circulo sie per la circonferentia 360 gradi. Ma nota, che piu grandi sarebbe li gradi di uno

---

1) Hier ist genau richtig $V = (a^2 + b^2 + ab)\frac{h}{3}$.

2) Dieser seltsame Werth von π und seine Begründung ist bemerkenswerth: Es wäre danach $\pi \sim 3{,}14109$, was sehr von der Wahrheit entfernt ist.

pliciere man die andere Seite mit sich selbst und ziehe das Ergebnis von dem Gemerkten ab, wenn es möglich ist, oder das Gemerkte von ihm, und von dem Reste suche man die Quadratwurzel. Diese Wurzel nehme man von der ersten Seite weg und multipliciere den Rest mit sich selbst, das Ergebnis aber addiere man zu der gemerkten Zahl, dann ist die Quadratwurzel aus der Summe die verlangte dritte Seite.

35. Um in einen Kreis das grösste Dreieck einzubeschreiben, das sich als gleichseitiges einbeschreiben lässt, mache man es so. Man nehme $\frac{3}{4}$ des Durchmessers und multipliciere das mit dem andern Viertel, das übrig geblieben ist. Die erhaltene Grösse multipliciere man mit 4, und von der Summe, die das ausmacht, ist die Quadratwurzel die Seite des verlangten Dreiecks.

36. Zur Bestimmung des Volumens einer abgestumpften Pyramide, die quadratisch sei und zur Seitenkante 4 habe, das heisst die grössere Grundfläche, und für die kleinere Grundfläche 2, und deren Axe 10 lang sei, wie in der beigegebenen Figur (Fig. 9) zu sehen, mache man es so. Man quadriere die grössere Kante, das macht 16, dann quadriere man die kleinere, das macht 4. Beide quadratischen Grundflächen zusammen ergeben 20. Darauf multipliciere man eine Grundflächenkante mit der andern, also $2 \times 4 = 8$, zu 20 gezählt giebt 28. Diese 28 muss mit dem dritten Theile der Axe, das ist mit $3\frac{1}{3}$, multipliciert werden, das giebt $93\frac{1}{3}$, das verlangte Volumen.[1])

37. Um das Volumen eines Prisma, wie wir es hierneben in der Figur gezeichnet haben (Fig. 10), zu finden, das unten 10 lang sei, und die Grundlinie sei 6, die obere Kante sei 8 lang, und die senkrechte Höhe sei 5, mache es so. Multipliciere die grössere Länge mit der Grundlinie, also $10 \times 6 = 60$, und merke das. Dann multipliciere die Hälfte der obern Länge mit der Grundlinie, also $4 \times 6 = 24$. Addiere das zu den gemerkten 60, so macht das 84. Diese 84 multipliciere mit dem dritten Theile von 5, welches seine Höhe ist, also $1\frac{2}{3} \times 84$, so ist das das verlangte Volumen.

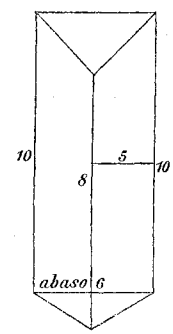


Fig. 10.

38. Das Verhältnis des Durchmessers zum Umfange ist nicht 7 : 22, nämlich $3\frac{1}{7}$, denn das ist zu gross, auch nicht gleich $3\frac{10}{71}$, weil es zu wenig ist nach dem Beweise des Archimedes. Die Differenz zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ ist $\frac{1}{497}$. Der achte Theil von $\frac{1}{497}$ ist $\frac{1}{3976}$. Addiere das zu $3\frac{10}{71}$, so kommt $3\frac{39831}{282296}$, und das ist das Verhältnis des Durchmessers zum Umfange.[2])

39. Nach Ptolemäus ist bekannt, dass der Kreis einen Umfang von 360 Graden hat. Man beachte aber, dass die Grade eines grossen Kreises,

grande circhulo, como he lo celo, che non sarebbe quello de una citade; et etiamdio e da sapere, che li diametri sie 120 gradi. Ma questi non sono gradi, como li gradi del circhulo, perche lo circhulo e mazore chal diametro piu cha 3 volte, perche la chomuna opinione tene, chel diametro sia $3\frac{1}{7}$ a la circonferentia. Ma ARCHIMENIDES dice luy, che non e cosi: dice, che lo he $3\frac{10}{71}$.

40. Notta, che dal centro de la terra a la spera de Saturno sie meia, de braza 4000 per miglio, sie 73387747, e quelo se chiama semidiametro spere Saturni. A volere sapere la circunferentia, multiplica lo diametro per $3\frac{10}{71}$, che fa $460999086\frac{56}{71}$. E per sapere, quante meia contiene in uno grado, parti la circunferentia per 360, che ne vene $1280553\frac{241}{12780}$, e tanta miglia he 1° gr^{o}.

41. El e sono 2 balle de cera, luna e per el suo diametro $\widetilde{onz}$ 4, e pexa libre 8; e una altra e per el suo diametro $\widetilde{oz}$ 6: adomando, quanto debe pexare. Dobiamo chubichare li diametri, cioe prima 5 via 4, fa 16, e 4 via 14 fa 64; per la seconda 6 via 6 fa 36, e 6 via 36 fa 216. Hore dice cossi: se 64 pexa 8, che pexara 216? Dobiamo multiplichare 8 via 216, che fa 1728, e partire per 64, che ne viene 27, e libre
42′ 27 pexara la seconda balla de $\widetilde{onz}$ 6 per diametro. |

42. Cescaduna quantita de numero diuisa per 2 altri numeri, cescaduna de le prime parte auanza la seconda, si como auanza el mazore numero el minore.

43. A volere sapere la superficie de la spera, multiplica larea del mazore circhulo per 4, et aueray la superficie, la quale se la multiplicaray per la sexta parte del suo diametro, aueray la quantita, che la tiene.

44. A volere la capacitate de una piramide rotonda, multiplica la area del abasis, cioe de la tondeza mazore, in la terza parte de la sua alteza, et haueray la sua tenuta.

wie etwa des Himmels, viel grösser sind, als die von einer Stadt sein würden. Es ist weiter zu merken, dass die Durchmesser 120 Grade haben. Letztere sind aber keine Grade, wie die Grade des Kreises, da der Kreis mehr als dreimal so lang ist als der Durchmesser, weil die gewöhnliche Meinung sagt, dass der Kreis das $3\frac{1}{7}$fache des Durchmessers sei. Aber Archimedes selbst sagt, dass das nicht so ist: er sagt, es sei $3\frac{10}{71}$.

40. Merke, dass vom Mittelpunkte der Erde bis zu der Sphäre des Saturn 73385747 Meilen sind, 4000 Ellen für die Meile, und das nennt man den Halbmesser der Sphäre des Saturn. Um den Umfang kennen zu lernen, multipliciere man den Durchmesser mit $3\frac{10}{71}$, so macht das $460999086\frac{56}{71}$, und um zu wissen, wieviele Meilen er auf einen Grad enthält, theile diesen Umfang durch 360, dann ergiebt sich $1280553\frac{241}{12780}$, soviele Meilen enthält ein Grad.

41. Gegeben sind zwei Wachskugeln. Die eine hat einen Durchmesser von 4 Unzen und wiegt 8 Pfund, die andere hat einen Durchmesser von 6 Unzen, ich frage, wieviel sie wiegen wird. Wir müssen die Durchmesser kubieren. Also erstens $4 \times 4 = 16$ und $4 \times 16 = 64$, und für die zweite $6 \times 6 = 36$ und $6 \times 36 = 216$. Nun sprich so. Wenn 64 wiegen 8, wieviel wiegen 216? Wir müssen 8 mit 216 multiplicieren, das giebt 1728, und durch 64 dividieren, dann kommt 27. Also wiegt die zweite Kugel von 6 Unzen Durchmesser 27 Pfund.

42. Wenn man eine beliebige Zahl durch zwei andere Zahlen dividiert so wird jeder erste Theil den zweiten um soviel übertreffen, als die grössere Zahl die kleinere übertrifft.

43. Um die Oberfläche einer Kugel zu bestimmen, multipliciere man den Inhalt eines grössten Kreises mit 4, so erhält man die Oberfläche. Wenn man sie mit dem sechsten Theile ihres Durchmessers vervielfacht, so erhalt man den körperlichen Inhalt.

44. Um das Volumen einer runden Pyramide zu finden, multipliciere man den Inhalt der Grundfläche, das heisst der grössten Rundung, mit dem dritten Theile ihrer Höhe, so hat man das Volumen.

Tabula Sinuum. (360 : 120)							**Tabula Sinuum.** (22 : 7)						
Arcus augmentati per dimidium gradum.				Corde mediate.			Arcus augmentati per dimidium gradum.				Corde mediate.		
Gr.	m^a	Gr.	m^a	Gr.	m^a	2^a	Gr.	m^a	Gr.	m^a	Gr.	m^a	2^a
0	30	179	30	0	31	25	0	30	179	30	0	29	59
1	0	179	0	1	2	50	1	0	179	0	0	59	59
1	30	178	30	1	34	14	1	30	178	30	1	29	57
2	0	178	0	2	5	38	2	0	178	0	1	59	55
2	30	177	30	2	37	2	2	30	177	30	2	29	53
3	0	177	0	3	8	25	3	0	177	0	2	59	51
3	30	176	30	3	39	46	3	30	176	30	3	29	47
4	0	176	0	4	11	7	4	0	176	0	3	59	43
4	30	175	30	4	42	27	4	30	175	30	4	29	37
5	0	175	0	5	13	46	5	0	175	0	4	59	30
etc.		etc.		etc.			etc.		etc.		etc.		
85	0	95	0	59	46	19	85	0	95	0	57	3	18
85	30	94	30	59	48	35	85	30	94	30	57	5	47
86	0	94	0	59	51	15	86	0	94	0	57	8	22
86	30	93	30	59	53	17	86	30	93	30	57	9	57
87	0	93	0	59	55	3	87	0	93	0	57	11	29
87	30	92	30	59	56	34	87	30	92	30	57	13	5
88	0	92	0	59	57	48	88	0	92	0	57	14	14
88	30	91	30	59	58	45	88	30	91	30	57	15	10
89	0	91	0	59	59	27	89	0	91	0	57	15	50
89	30	90	30	59	59	51	89	30	90	30	57	16	13
90	0	90	0	60	0	0	90	0	90	0	57	16	22

IV.

DIE ALGEBRA DES INITIUS ALGEBRAS AD YLEM GEOMETRAM MAGISTRUM SUUM.

Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum.

Einleitung.

Von der nachfolgenden Arbeit eines deutschen Mathematikers des XVI. Jahrhunderts haben sich vier Handschriften erhalten. Diejenige, welche mir zuerst zu Händen kam, scheint mir die vorzüglichere zu sein, aber keine von allen vieren ist die Originalhandschrift. Jede hat beim Abschreiben an einer oder der andern Stelle Auslassungen, durch Gleichklang der Worte veranlasst, an anderer Stelle wieder Zusätze gemacht. Der eigentliche Text ist jedoch, so weit sie ihn enthalten, ein und derselbe. Jede einzelne Handschrift hat aber die Orthographie nach ihrer Schreib- oder Mundart geregelt, so dass ich gezwungen war, einer derselben genau zu folgen und von Angabe der Abweichungen im Allgemeinen abzusehen, so dass unter dem Texte nur wirkliche Textänderungen kurz bemerkt sind.

Die Handschrift, welcher ich folge, bewahrt die königl. Universitätsbibliothek zu Göttingen unter der Bezeichnung *Codex Gotting. Philos. 30.* Es ist eine Papierhandschrift in Folio von 205 beschriebenen und numerierten Blättern. Sie enthält der Reihe nach:

Blatt 1′—150′: Den im Nachfolgenden abgedruckten Text. Auf Blatt 1 steht der Vermerk: „Auf einer hiesigen Auction erkauft (vid. Manuale A. 1808 p. 77).“ Blatt 1′ enthält folgende Inhaltsangabe des ganzen Werkes:

„*Libri* Algebrae *sunt octo.*

Primus de octo equationibus et demonstrationibus earundem.

Secundus de quantitatibus additis et diminutis seu pregnantibus.

Tertius de numeris rationalibus communicantibus atque surdis trium tractatuum.

Quartus de proportionibus tam rationalibus quam irrationalibus, proportionalitatibus et medietatibus.

Quintus de binomiis et de comitibus eorundem secundum 13 numeros irrationales.

Sextus de clavibus numerorum in genere ad cunctas coniecturas propositionum sive questionum.

Septimus de areis datis corporum atque superficierum perquirendis.

Octavus de datis absolutis numerorum secundum claves examinatis.

Auf Blatt 2 befindet sich der Titel: *„Algebrae Arabis Arithmetici viri Clarissimi Liber ad Ylem Geometram praeceptorem suum.*

Anno MDXLV. 2da Septembris foeliciter incipit."

Auf derselben Seite hat ein späterer Besitzer geschrieben:

„Georgius Manitius Lowitz MDCCLIIj."

Blatt 2′ ist leer, auf Blatt 3 beginnt dann der „Prologus in Algebram". Nur die drei ersten Bücher sind vorhanden, aber an der Spitze von Blatt 151 steht der Vermerk: „Librum quartum in alio volumine invenies. Siquidem quintum." Dass dieser zweite Band sich erhalten hätte, ist mir nicht bekannt.

Blatt 151′—176′: „Algorithmus de datis (Jordani Nemorarii)."[1] Darin Blatt 152—153 eine Einleitung aus späterer Zeit.

Blatt 176′—185: Anhänge zur vorhergehenden Arbeit.

Blatt 186—187: Arithmetische Notiz, beginnend: *„Minuta est quadrata."*

Blatt 187′—189: *„Residui regula vera. Numeros, qui per propositum numerum divisi datos numeros residuant, invenire."*

Blatt 190—202′: *„Tractatus de tribus notis."*[2]

Blatt 203—205: „Fragment der Trigonometrie des Levi ben Gerson."[3]

Auf Blatt 160, einem eingelegten Zettel, sind folgende Gleichungen geschrieben:

„Aequationes.

6 ȝȝ̇ + 1 ȝ̇ aequalis 5 ꝛ + 115920. facit?

1 ȝȝ + 1 ꝛ aequalis 4 ȝ + 3 ꝛ + 2. facit?

1 ß̃ + 10 ȝȝ̇ + 18 ꝛ + 352 aequalis 88 ȝ + 328 ꝛ. facit?

1 ß̃ aequalis 44 ȝ + 92 ꝛ — 16 ȝȝ̇ — 45 ꝛ + 48. facit?

1 ȝꝛ — 6 ß̃ aequalis 12 ȝȝ — 52 ꝛ — 60 ȝ + 96 ꝛ + 80. facit?

1 ȝꝛ + 27 ß̃ + 463 ȝ + 22950 aequalis 113 ȝȝ̇ + 669 ꝛ + 4245 ꝛ. facit?

3 bi ß̃ + 513 ꝛ + 1080 ȝ + 96 ꝛ aequalis 4 ȝꝛ + 66 ß̃ + 3 ȝȝ̇ + 620?

---

1) Abgedruckt in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik II, S. 125—166 und Zeitschrift für Math. und Physik XXXVI, 1—23; 41—63; 81—95; 121—138.

2) Abgedruckt in Bibliotheca Mathematica 3. Folge I, 380—390.

3) Abgedruckt in Bibliotheca Mathematica 2. Folge XII, 103—107.

facit 1 ℭ ist 10. frag nach den andern radicibus, so diese aequation vermag. Auch wie die Gegenaequation beschaffen sey, darinn obige wahre radices alhie die gedachten, vnd alhie die gedachten in obiger die wahren seindt etc.“ [1])

Worauf sich die Behauptung CANTOR's, Vorlesungen II², 612 gründet, dass unsere Handschrift im Besitze des Schreibkünstlers STEPHAN BRECHTEL, der in Nürnberg 1574 starb, gewesen sei, ist mir nicht bekannt. Dem Dialekte nach dürfte süddeutsche Herkunft wohl richtig sein.

Die drei andern Handschriften unserer Algebra besitzt die königl. öffentliche Bibliothek zu Dresden. Auch sie konnte ich, wie die Göttinger, durch die Liberalität der beiderseitigen Bibliotheksvorstände in den Räumen der hiesigen königl. Gymnasialbibliothek benutzen, und sage ich dafür allen betheiligten Faktoren verbindlichsten Dank.

Von den Dresdner Handschriften ist die am sorgfältigsten ausgeführte die, welche heute die Bezeichnung *Mspt. Dresd. C. 405* trägt. Sie ist auf Pergament vorzüglich geschrieben, wie der Einband ausweist, für Kurfürst AUGUST von Sachsen. Dieser Einband ist nämlich von rothem Maroquin, mit Goldschnitt und Goldpressung das Wappen des genannten Fürsten und seiner Gemahlin ANNA darstellend. In dem Wappen des Kurfürsten stehen die Initialen: A(ugust) H(erzog) Z(u) S(achsen) K(urfürst). Ihre Entstehungszeit ist also zwischen die Jahre 1553—1586 zu setzen, und sie ist daher jedenfalls später entstanden als die 1545 angefangene Göttinger Handschrift.

Es sind 170 beschriebene Quartblätter, denen drei Vor- und vier Nachblätter, sämtlich ebenfalls Pergament, hinzugethan sind. In ihr ist einzig und allein unsere Algebra enthalten, der sich aber am Schlusse ein Fragment eines vierten Buches anschliesst, das aber dem oben mitgetheilten Inhaltsverzeichnis entsprechend als fünftes zu bezeichnen wäre, da es von den Binomien und Recisen EUKLID's handelt. Während das Göttinger Manuskript, wie ich oben andeutete, den süddeutschen Ursprung verräth, ist die Sprache der Handschrift *C. 405* so ausgesprochen sächsisch, dass man auch dadurch seinen Ursprung nach Dresden oder Leipzig verlegen

1) Aus dem Wortlaut geht wohl unzweideutig hervor, dass der Verfasser dieser Aufgaben wusste, dass jede derselben mehr als eine Lösung besass, und dass durch Veränderung der Vorzeichen die positiven Lösungen (das sind seine wahren) sich in gleich grosse negative (das sind seine gedachten), und zugleich die negativen in gleich grosse positive verwandeln lassen. Dass seine Angabe, $x = 10$ sei eine Lösung der letzten Gleichung, nicht zutrifft, hebt die Wichtigkeit der eben hervorgehobenen Kenntnis unseres Verfassers für die Geschichte der Algebra nicht auf.

würde, wenn die Beschaffenheit der Handschrift das nicht schon von selbst an die Hand gäbe. Diese Handschrift entbehrt des im Göttinger Codex enthaltenen Titels. Sie beginnt nämlich auf dem mit 1 bezeichneten Blatte sofort mit: *„Prologus. Hie hebet sich ahn das Buch* ALGEBRE *genandt Gebra vnnd Almuchabola tzu deutsch“* u. s. w. Das im Mspt. Gott. Philos. 30 auf Blatt 1^b enthaltene Inhaltsverzeichnis hat sie zwischen dem *Prologus* und dem Briefe des INITIUS ALGEBRAS AD YLEM *magistrum suum* eingeschoben, fügt aber noch ein *„Nonus liber Compilatio super Algebram tam latina quam theutunica“* hinzu, was wohl die Absicht des Schreibers unserer Handschrift andeuten soll, eine solche Sammlung von Aufgaben hinzuzufügen.

Die zweite Dresdner Handschrift: *Mspt. Dresd. C. 349* ist auf Papier in Folio von 155 Blättern. Da das erste Blatt, das neuere Schmutzblatt nicht eingerechnet, mit II bezeichnet ist, so dürfte ein Blatt, auf dem der *Prologus in* ALGEBRAM gestanden haben wird, verloren gegangen sein. Die Blätter und Lagen sind vielfach verbunden. Zwischen Blatt 41 und 42 ausserdem 6 nicht bezeichnete Blätter eingeschoben. Wenn man die Reihenfolge so nimmt: II, III, 137′, 137, V′, V, VI′, VI, VII—XLI, XLII—51, Eingelegte Blätter 6, 5, 1, 2, 3, 4, Blatt 52—78, 90—136, 138—150, 80—89, 79′, 79, so ist der vollständige Text der drei ersten Bücher vorhanden, nur fehlt am Ende ebenfalls ein Blatt, die letzte halbe Seite des Göttinger Manuskriptes. Das vorliegende Manuskript beginnt also auf Blatt II mit den Worten: *„*INITII ALGEBRAE *Arabis viri clarissimi Ad sommum Mathematicum eo tempore geometram* YLEM *Prologus feliciter incipit.“* Hier hat irgend Jemand über INITII mit Bleistift die Bemerkung gemacht: ANITII (BOETII)? Ebenso steht neben *sommum* am Rande: *Dominum?* Beides natürlich ganz unzulässige Konjekturen. Der Dialekt dieser Abschrift nähert sich mehr der Göttinger Handschrift als dem *Mspt. Dresd. C. 405,* ist aber doch ein anderer, als der der erstern.

Der letzte mir bekannte Codex unserer Algebra ist das *Mspt. Dresd. C. 8.* Dass er unsere Algebra, wenn auch nur theilweise enthält, ist dem Verfasser des Katalogs entgangen. Er beginnt nämlich nicht wie die andern mit dem Titel: INITII ALGEBRAE *viri Clarissimi* u. s. w., sondern erst mit dem 9. Kapitel des ersten Buches der ganzen Arbeit: *„Capitulum nonum de secunda propositione* ALGEBRAE *Arabis in sua Gebra et Almuchabola eiusque expositio.“* Ausserdem fehlen und sind augenscheinlich überhaupt nie vorhanden gewesen die Kapitel 20—25 des ersten Buches und das ganze zweite Buch. Das 19. Kapitel füllt nämlich gerade die Vorderseite von Blatt 13, dann ist Blatt 13′ leer und auf Blatt 14^r beginnt der *Liber tertius* ALGEBRAE. Dafür hat aber unsere Handschrift dasselbe Fragment eines vierten Buches erhalten, das auch *C. 405* aufbewahrt hat. Im

Ganzen umfasst sie 66 in den untern rechten Ecken mit Bleistift gezählte Folioblätter in Papier. Zwischen Blatt 29 u. 30 liegt ein Konvolut Zettel, auf denen hier und da ein paar Zahlen geschrieben sind. Blatt 64 und 65 sind leer, auf Blatt 66 finden sich ein paar geometrisch-algebraische Konstruktionen. Es werden nämlich das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten 4 und 8 und das Rechteck mit den Seiten 8 und 12 durch Vermittelung eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 6 und 12 sind, in ein Rechteck zusammengezogen mit den Seiten $\sqrt{80}$ und $\sqrt{180}$, den Hypotenusen der beiden benutzten rechtwinkligen Dreiecke. Darüber steht:

„$\sqrt{14400} = 120$, *tantumdem de* $\begin{array}{r} 96 \\ 24 \\ \hline 120. \end{array}$“

Die vorliegende Arbeit hat bis jetzt die Aufmerksamkeit der Geschichtsforscher der Mathematik nur insofern erregt, als in derselben die wundersamsten Kombinationen und Verwechslungen von Persönlichkeiten vorkommen, und man mit einigen von ihnen überhaupt nichts anzufangen wusste. Wer sich aber die Mühe giebt den nachfolgenden Abdruck wirklich durchzulesen, wird dagegen über die Kenntnis unseres Autors in der Algebra erstaunt sein, und nur bedauern, dass nicht auch die versprochenen Bücher 4—8, beziehungsweise 9, sich erhalten haben. Nach Andeutungen im Texte der erhaltenen Bücher müssen die verloren gegangenen auch *Gleichungen des dritten Grades* behandelt haben. Dass unser Buch nicht auf Muhamed ben Mûsâ Alchwarîzmî zurückgeht, ist klar, obwohl der deutsche Bearbeiter diesen wohl kennt, aber ihn mit dem Propheten Muhamed verwechselt. Ob das Werk überhaupt in seinem lateinischen Texte wirklich einen Araber zum Verfasser hat, oder ob der deutsche Kommentator sich einen solchen fingiert, lasse ich dahin gestellt. Trotz der Willkür, mit welcher Zeit- und Personenfragen behandelt werden, sind doch manche Bemerkungen, die von guter Geschichtskenntnis zeugen. So wird z. B. den Indern nachgerühmt, dass sie hervorragende Rechenmeister gewesen seien; auf sie wird mit Recht die Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades zurückgeführt, die sogenannte *Regula virginum.* Da auch die Ta-yen-Regel mit ihrer Begründung behandelt wird, so würde, wenn der lateinische Text wirklich eine Übersetzung aus dem Arabischen darstellt, die Bekanntschaft mit dieser Regel auch den Arabern zugestanden werden müssen.

Wenden wir uns jetzt zur Feststellung des als Yles bezeichneten Geometers, über den ich hoffe, volle Klarheit geben zu können. Die von dem angeblichen Verfasser unserer Algebra, soweit sie lateinischen Text besitzt, dem Yles zugeeigneten Lehrsätze sind nichts weiter als die ersten

sechs Lehrsätze des 2. Buches der Geometrie EUKLID's, so dass die Wahrscheinlichkeit vorliegt, EUKLIDES sei mit YLES gemeint, was ja nach CANTOR dadurch fast zur Gewissheit würde, als YLES sich mit einem arabischen Worte decken soll, das EUKLID als *Stoicheiotes* bezeichnen würde. Das alles blieb aber nur Konjektur, besonders noch im Hinblick darauf, dass im deutschen Kommentare unserer Algebra selbst darauf hingewiesen wird, dass im 2. Buche EUKLID's, der mit Namen genannt wird, dieselben Lehrsätze sich finden, welche INITIUS ALGEBRAS als dem *dritten* Buche der Geometrie des YLES entnommen angiebt. Was Letzteres, nämlich die Erwähnung eines dritten Buches, angeht, so ist das darauf zurückzuführen, dass man die Erklärungen, Petitionen und Axiome des ersten Buches EUKLID's als ein selbständiges Buch annahm, dann die Lehrsätze des ersten als das zweite und folgerichtig das zweite als drittes bezeichnete. Nun hat mir aber das *Msc. Mathem.* 8^0. *8* der Landesbibliothek zu Kassel den Schlüssel geliefert, aus welchem die Identität zwischen YLES und EUKLIDES wohl sicher hervorgehen dürfte.[1]) Diese Handschrift, ein Kommentar zu den acht ersten Büchern EUKLID's, beginnt folgendermaassen:

„Commentum in librum introductorium elementorum.

Credimus suae quemque artis et auctorem et disputatorem optimum esse, quae etiam cogitatio tunc eruditissimum divi PLATONIS pectus attigit, dum conductores sacrae arae de modo et forma eius secum sermonem conferre conductos ad EUCLIDEM geometram ire iussit, scientiae eius cedens, immo professioni. Fuit enim EUCLIDES teste LAERTIO geometra Megarensis insignis, vel, ut alii dicunt, EUCLIDES non est proprium nomen, sed appellativum, id est *Ysagogicus,* ELIAS autem est eius proprium nomen, et dicunt, PLATONEM non remissise ad personam, sed ad librum, qui dicitur EUCLIDES, id est *Introductorius.* Non enim fuisse PLATONEM et huius libri auctorem contemporaneos horum opinio est. Non autem aestimandum, quod PLATO propterea, quia ignarus geometriae vel inferior cuiquam mortalium fuerit, arae sacrae conductores responso vacuos reiecerit; cessit enim non doctiori, sed professioni. PLATO enim philosophiam, EUCLIDES vero, vel secundum alios ELIAS, geometriam profitebatur. Haec de auctore libri sufficiant."

Hieraus geht unzweideutig hervor, dass im Mittelalter geglaubt wurde, der eigentliche Name des Verfassers der Elemente sei ELIAS, und EUKLIDES sei der Name seines Werkes. Dass ELIAS und YLES nur Formen ein und

1) Auch diese Handschrift habe ich in dem hiesigen städtischen Archive benutzen dürfen, was ich hier dankend anerkennen möchte.

desselben Wortes sind, ist augenfällig. Es ist hier also eine Verschiebung insofern eingetreten, als das Wort *Stoicheia,* das sich mit *Ysagogicus* dem Sinne nach deckt, für Übersetzung des Eigennamens EUCLIDES gehalten, und umgekehrt jene *Stoicheia* als der wirkliche Name EUKLID's mit ELIAS-YLES übersetzt wurden. Wenn wir heutigen Tages sagen: „Er kennt seinen EUKLID gut", so begehen wir damit eine ähnliche Verwechslung, da wir ja auch den Verfassernamen für sein Werk einschmuggeln.

Es ist wohl kaum zweifelhaft, dass auch die Form ELIAS für den Verfasser der Elemente auf arabische Tradition zurückgeht, und nur wegen des andern Übersetzers nicht die Form YLES gewählt ist. Dem deutschen Kommentator unserer Algebra aber, der im XVI. Jahrhundert von einem dritten Buche des YLES las, zugleich aber auch dieselben Sätze im zweiten Buche EUKLID's fand, ist die Identifikation beider nicht klar geworden. Auch im Kommentar des AN-NAIRIZI zum EUKLID ist der Theil, welcher sich mit den Erklärungen, Petitionen und Axiomen des ersten Buches befasst, vollständig in sich abgeschlossen und bildet einen Abschnitt für sich, so dass es gar nicht unwahrscheinlich ist, dass bei den Arabern wirklich eine andere Zählweise der Bücher beliebt worden ist, besonders bei kommentierten Ausgaben.

Die Arbeit selbst zerfällt von selbst in zwei Theile. Der erste umfasst die lateinische Abhandlung nebst der Übersetzung des deutschen Bearbeiters, der zweite dann dessen ausführlichen Kommentar. Wäre nur der lateinische Text nebst Übersetzung erhalten, so würde aus der ganzen Arbeit nicht viel zu machen sein, da erst der Kommentar zeigt, wie dieser oft sehr unklare Text aufgefasst werden muss. Liest man den Kommentar, so sieht man, dass in dem Texte wirklich das erkennbar enthalten ist, was darüber gesagt ist. Es würde aber ohne solche Beihilfe für einen erstmaligen Leser schwer fallen, alles das sofort in dem Texte zu erkennen. Der lateinische Text giebt sich als eine Übersetzung aus dem Arabischen aus, seine Form jedoch hat nichts von arabischen Texten an sich, wie sie in andern lateinischen Übersetzungen des Mittelalters uns erhalten sind, so dass man zweifelhaft sein könnte, ob die behauptete Abstammung Wirklichkeit ist, doch glaube ich trotz alledem sie aufrecht erhalten zu müssen. Die für die technischen Ausdrücke gebrauchten Zeichen aber sind die im XVI. Jahrhundert üblichen und stammen sicherlich nicht aus dem Arabischen, sondern sind aus Italien importiert, worauf schon die Multiplikation der Potenznamen, nicht die Addition derselben hinweist. Die Formen der Potenzen der Unbekannten sind der Reihe nach

	ℳ,	ℨ,	ʒ,	ꝛ,	ʒʒ,	ß̃,	ʒꝛ,	ꝟiß̃,	ʒʒʒ,	ꝛꝛ
für	x^0,	x^1,	x^2,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	x^8,	x^9

und werden gelesen: *Dragma, res* oder *radix, zensus, cubus, zensus de zensu, sursolidum, zensicubus, bissursolidum, zensus zensui de zensu, cubus de cubo,* Die Zeichen + und — sind hier nicht nur als Additions- und Subtraktionszeichen, sondern als wirkliche Vorzeichen gebraucht worden. Das benutzte Wurzelzeichen ist ein starker Punkt mit daranhängendem nach oben gezogenem Schwanze, also so: $\int$. Ihm wird unmittelbar angehängt das Zeichen derjenigen Potenz, als deren Wurzel es gebracht werden soll; so ist $\int_{\mathfrak{z}}$ die Quadratwurzel, $\int_{\mathfrak{cl}}$ die Kubikwurzel, $\int_{\mathfrak{ccl}}$ die neunte Wurzel u. s. w. Im Codex *C. 8* ist diese Angabe nicht neben das Wurzelzeichen, sondern oben gleichsam als Exponent geschrieben. Sollen mehrere Grössen addiert und dann aus ihnen zusammen die Wurzel gezogen werden, so steht neben dem Wurzelzeichen nicht das Funktionszeichen, sondern die Abkürzung cs, d. h. *communis,* das Funktionszeichen aber hinter dem ganzen Ausdruck, der ausserdem noch in einem Winkelhaken (*Gnomon*) eingeschlossen ist. Z. B.

$$\int_{\mathrm{cs}} \underline{|8 + \int_{\mathfrak{z}} 22}, \quad \text{das ist} \quad \sqrt{8 + \sqrt{22}}.$$

Dieser Gnomon hat dabei die Bedeutung, dass das von ihm Eingeschlossene keine Länge sondern eine Potenz bedeutet. So ist die einfache 8 eine Länge oder einfache Zahl, dagegen $\underline{|8}_{\mathfrak{z}}$ ein Quadrat von acht Flächeneinheiten, dessen Längeneinheit $\int_{\mathfrak{z}} \underline{|8}$ ist. Ebenso wäre $\underline{|8}_{\mathfrak{cl}}$ ein Würfel von 8 Kubikeinheiten und $\int_{\mathfrak{cl}} \underline{|8}$ die dazugehörige Kante u. s. w. Ein zweifacher Punkt mit dem Schwanze an dem letzten bedeutet stets die Wurzel aus der Wurzel. Z. B. $\int_{\mathfrak{cl}} \underline{|88}$ würde heissen Kubikwurzel aus der Kubikwurzel von 88. Sie ist mit $\int_{\mathfrak{ccl}} 88$ identisch, wird aber nur benutzt, wenn der Radikand eine sogenannte Mediale im Euklidischen Sinne ist.

Nach einer kurzen Einleitung des deutschen Kommentators, die an Abenteuerlichkeit und Durcheinanderwerfung von Zeiten und Thatsachen ihres Gleichen sucht, folgt ein dem supponierten Verfasser, Initius Algebras, zugeschriebener Brief an seinen Lehrer Yles, der ihn gebeten haben soll, ihm zu erklären, wie aus den Sätzen seiner Geometrie die in der mittelalterlichen von den Arabern stammenden Algebra betrachteten sechs Unterfälle der Gleichungen des ersten und zweiten Grades gefolgert werden können. Darauf werden die ersten sechs Sätze des zweiten Buches Euklid's in der erwähnten Weise durchgenommen, und aus ihnen die gewöhnlichen Gleichungformen und Auflösungen bewiesen. Es sind das bekanntlich

$$ax = b;\ ax^2 = bx;\ ax^2 = b;\ ax^2 + bx = c;\ ax^2 + c = bx;\ ax^2 = bx + c.$$

Zu jeder wird ein abenteuerliches Beispiel, in welchem Männer der verschiedensten Zeiten in Beziehung mit einander gebracht werden, gestellt

und aufgelöst. Nun erst beginnt die eigentliche Algebra oder, wie unser Verfasser sie nennt, Gebra und Almuchabola, für ihn ist ja ALGEBRAS der Verfasser des Buches. Nach Besprechung der cossischen Zeichen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{z}$ u. s. w. werden dann die von unserem Verfasser beliebten acht Arten der Gleichungen behandelt, die sich bei weitem über das hinaus erstrecken, was in dem vorbereitenden Briefe auseinandergesetzt ist. In seine erste Gleichung sind alle Formen eingeschlossen, die aus $ax^n = bx^{n-1}$ entstehen, und obwohl er sie nur bis $n = 9$ ausdehnt, so ist doch durch die Bemerkung, dass es nicht üblich sei, weiter zu gehen, angedeutet, dass die Wirkungsweise auch auf die folgenden Potenzen sich erstreckt.

Ähnliches gilt von allen übrigen Gleichungsformen. So gehen die nächsten drei auf $ax^{n+m} = bx^n$ zurück, wo m höchstens gleich 4 genommen wird, weil man eben höhere Wurzeln als die vierte nicht auszuziehen gewohnt war. Da aber unser Bearbeiter die Wurzeln bis zur 9. Potenz auszuziehen lehrt, so ist für ihn eine Ausdehnung bis zu diesem Punkte nicht unwahrscheinlich. Alle übrigen Gleichungsformen kommen auf $ax^{n+2m} + bx^{n+m} = cx^n$ für $m = 1$ bis 4 zurück, auch hier diese Einschränkung nur der Gewohnheit des Rechnens verdankend.

Aus einer spätern Stelle geht übrigens hervor, dass der deutsche Bearbeiter in einem der nicht erhaltenen Bücher die Lösung der Gleichungen des dritten Grades zu geben verspricht. Da bei Abfassung der Arbeit die *Ars magna* CARDANO'S noch nicht erschienen war, sie ging ja erst 1545 in Nürnberg aus der Presse hervor, so kann diese Wissenschaft doch nur aus anderer Quelle, die wohl eine arabische sein dürfte, geflossen sein. Der Verlust des Restes unserer Arbeit, Buch 4—8, wäre daher in geschichtlicher Hinsicht doppelt zu bedauren.

Das zweite Buch beschäftigt sich mit der Rechnung positiver und negativer Grössen, letztere wirklich als *negative* bezeichnet, während die positiven *affirmati* heissen, die negativen freilich hin und wieder auch *diminuti*. Es werden alle Rechnungsarten mit solchen Grössen dargelegt. Der Verfasser kennt sie alle, nur die Division mehrgliedriger Grössen durcheinander ist ihm eine unmögliche. Auch die Rechnungen mit allgemeinen Brüchen wird gelehrt, hierbei auch die Division solcher durcheinander. Die Zeichenregeln sind vollständig gegeben, wenn auch nicht so kurz und bündig, wie z. B. in der Wiener Algebra im *Codex Vindob. Palatinus 5277.*[1]) Dagegen ist in einer beigefügten Tafel mit doppeltem Eingang das Resultat der Multiplikation aller möglichen Zeichenkombinationen gegeben, wobei auch die rein negative Zahl sich findet in der Form: $-\mathfrak{R}$.

1) Siehe CANTOR, Vorlesungen II², S. 425.

Das dritte Buch, das letzte vollständig und mit deutschem Kommentar erhaltene, ist in drei Traktate getheilt. Das ganze Buch handelt von Wurzeln und von Zahlentheorie. Im ersten Traktate lehrt der deutsche Bearbeiter das Ausziehen der Wurzeln und zwar für die ersten sechs Grade, während er für die 7. bis 9. Wurzel nur sagt, man solle das bisher Gesagte verallgemeinern. Der lateinische Text dieser ersten 9 Kapitel lehrt eigentlich nicht das Wurzelausziehen, sondern das Erheben einer zweitheiligen Grösse auf die ersten neun Potenzen. Da aber das folgende Kapitel angiebt, diese Potenzerhebung sei nur geschehen, um die Wurzelausziehung zu ermöglichen, so hat eben der deutsche Bearbeiter es vorgezogen, diese Wurzelbestimmungen schon in den vorhergehenden Kapiteln mit zu behandeln. Die Binomialkoeffizienten stellt er übersichtlich in der Art her, dass er die Zahl 10001 nach und nach auf die aufeinanderfolgenden Potenzen erhebt. Er erhält so folgende Formen:

1000900360084012601260084003600090001
100080028005600700056002800080001
1000700210035003500210007000 1
1000600150020001500060001
100050010001000050001
10004000600040001
1000300030001
100020001
10001

Auch eine Tafel der neun ersten Potenzen der neun Einer ist vorhanden, weil sie zur Ausziehung der betreffenden Wurzeln unumgänglich nöthig sei. Die Ausziehung der Wurzeln wird im übrigen *mutatis mutandis* genau so gelehrt, wie wir es heute bewirken würden, wenn wir nicht durch die Logarithmen einen leichteren Weg einschlagen könnten. Der Bearbeiter weist aber auch darauf hin, dass man bequemer statt der vierten oder sechsten, achten oder neunten Wurzel, die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel, dieselbe Wurzel aus der Kubikwurzel, dieselbe Wurzel aus der Quadratwurzel der Quadratwurzel, oder endlich die Kubikwurzel aus der Kubikwurzel benutzen könnte. Dieser erste Traktat erstreckt sich zunächst nur auf die Auffindung der betreffenden Wurzeln aus vollständigen Potenzen.

Der zweite Traktat des dritten Buches ist fast vollständig zahlentheoretisch. Aufsuchen aller Divisoren einer Zahl, dabei also auch Bestimmung der Primzahlen, wobei Verfasser weiss, dass man die Unter-

suchung erst mit der grössten in der zu untersuchenden Zahl enthaltenen Quadratwurzel zu beginnen braucht, Bestimmung des grössten gemeinsamen Maasses zweier Zahlen sind die Themata der ersten drei Paragraphen. Das vierte Kapitel dagegen giebt die Lösung des sogenannten Restproblems, das als Regula Ta-yen bei den Chinesen schon um Christi Geburt bekannt war, das im Abendlande sich zuerst um 1228 bei Leonardo von Pisa hat finden lassen, das dann im Anfang des XV. Jahrhunderts in einer Zeitzer griechischen Handschrift angetroffen ist, das endlich um die Mitte des XV. Jahrhunderts einem gewissen Frater Fridericus des Kloster St. Emeram zu Regensburg und kurz darauf Regiomontan bekannt war. Auf den Inhalt will ich hier nicht eingehen, da ich in der Anmerkung zu dem betreffenden Kapitel eine genaue Darstellung des Gedankenganges gegeben habe, ich möchte hier nur darauf aufmerksam machen, dass unser deutscher Bearbeiter auch die Erweiterung des Problemes auf nicht theilerfremde Divisoren, wie die ursprüngliche Aufgabe und auch der lateinische Text sie fordert, durchführt, und auch die Bedingung kennt, unter der im zweiten Falle die Aufgabe unmöglich wird. In moderner Form, die aber dem Wesen nach mit der hier auseinandergesetzten zusammenfällt, hat Gauss die Aufgabe in den *Disquisitiones arithmeticae* behandelt.

Die zwei folgenden Kapitel handeln von den vollkommenen, mangelhaften und überschiessenden Zahlen. Auseinandersetzung des einfachen falschen Ansatzes, der auf Yles-Euklides zurückgeführt wird, und des doppelten falschen Ansatzes, der auf die Araber zurückgehe und bei ihnen *Itata* heisse, ist der Inhalt der drei folgenden Kapitel. Hier wird darauf besonders Gewicht gelegt, dass durch beide Methoden nur solche Aufgaben gelöst werden können, die in Gleichungsform geschrieben auf Gleichungen des ersten Grades führen, und an einem bestimmten Beispiel, das eine rein quadratische Gleichung geben würde, gezeigt, dass nur die Lösung solcher Gleichungen zu einem richtigen Ergebnis führen könne, während sowohl der einfache wie der doppelte falsche Ansatz unmögliche Lösungen ergeben.

Das zehnte Kapitel, dessen Ursprung der deutsche Bearbeiter auf den Aliabras Indus, also überhaupt nach Indien verlegt, verlangt die Auflösung unbestimmter Aufgaben des ersten Grades durch ganze rationale Zahlen *(numeri rationales integri)*. Bis jetzt galt Bachet de Méziriac als erster, der in seiner Diophant-Ausgabe von 1621 diese Forderung der ganzzahligen Lösung gestellt habe. Da die älteste erhaltene Handschrift unserer Algebra aus 1545 stammt, das Original daher noch älter sein muss, so ist also diese Forderung schon mindestens 66 Jahre früher gestellt worden. Die hier gegebene Lösung ist keineswegs die Bachet's, sondern stimmt mit der jetzt gebräuchlichen überein. Für die Lösung sehe man

die Anmerkung zu dem betreffenden Kapitel. Mit diesem geschichtlich wichtigen Probleme schliesst der zweite Traktat.

Der dritte Traktat handelt endlich von den irrationalen Wurzeln und der Rechnung mit solchen. Zur Anwendung und Begründung kommen in moderner Art geschrieben folgende Formeln:

$$\sqrt[n]{a \cdot b^n} \pm \sqrt[n]{a \cdot c^n} = \sqrt[n]{a(b \pm c)^n};$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) \pm \sqrt{4ab}};$$

$$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(a+b) \pm \sqrt[3]{27a^2b} + \sqrt[3]{27ab^2}};$$

u. s. w.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}; \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m \cdot b^n}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m \cdot b^n}};$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^n}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^n}}};$$

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}.$$

Die angenäherte Ausziehung der Wurzel wird durch die Formel bewirkt

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^n}.$$

Der Bearbeiter gebraucht für b stets eine Potenz von 10, speciell mit Vorliebe 100 und lässt zu einer noch weiteren Annäherung immer die Formel benutzen:

$$\sqrt[n]{a^n + b} = a + \frac{b}{n_1 a^{n-1} + n_2 a^{n-2} + n_3 a^{n-3} + \cdots + n_{n-1} a + 1},$$

das sind dieselben Formeln, welche nach Staigmüller der Tübinger Professor Scheubel zur selben Zeit gebrauchte. Den Nenner des Bruches nennt er dabei die Distanz zwischen den Potenzen a^n und $(a+1)^n$ und im Verhältnisse dieses Zuwachses der Potenz beim Wachsen der Wurzel um eins müsse auch der Zuwachs b der vorliegenden Zahl zu dem Zuwachs der um eins gewachsenen Zahl stehen. Die speziellen Fälle

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2n+1};$$

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1} = a + \frac{b}{3a(a+1) + 1}$$

werden an Beispielen gezeigt.

Über das Fragment eines vierten, eigentlich fünften Buches brauche ich hier mich nicht auszulassen.

| Prologus in Algebram.[1]) 3

Hie hebet sich an das Buch Algebrae, des grossen Arismetristens, geschrieben zu den zeithen Alexandri vnd Nectanebi, des grossen Grecken vnnd Nigromantis, geschrieben zu Ylem, dem grossen Geometer jn Egypten, jn Arabischer Sprach genant *Gebra vnnd Almuchabola,* das dann bey vns wirdt genant *das Buch von dem Dinge der vnwissenden zall.* Vnd ist aus Arabischer Sprach jn kriechisch transferirt von Archimede, vnnd aus kriechisch jn das Latein von Apuleio, vnd wird genandt bey den Welschen *das Buch de la cosa,* das dann aber wird gesprochen *das Buch von dem ding;* wann aus einem vnbekanten dinge findet man das wesen der zal vnd gantzen essentz, das dann gewesen ist die frage ze wissen. Vnnd aus disem Buch finden wir, das der Machomet[2]) in seinem Alkoran vermeldet von disen Regeln, vnnd nennet sie auch Gebram vnd Almuchabolam. Sie werden auch gebraucht von den Indiern, vnnd nennen sie *Aliabra vnd Aluoreth,* das ist das Buch, das Aliabras zu den zeiten Alexandri aus Arabischer sprache jn jndische gesatzt hat, vnd wird bey jnen gesagtt *das Buch Aluoreth,* das ist von dem Dinge abermals, oder *das Buch der Coniecturation,* dann wir schatzen oder achten, die zal sej ein ding, vnd ist bej den Indischen ein Rechen vbung gewesen mehr dann bej allen andern volkern.[3]) Sie gaben auch das gemelte Buch | durch etliche grunde ge- 3′
leutert, als es Algebras gesagt hatt, vnnd ist geschrieben erstlichen von Algebras zu Ylem[4]), dem grofsen Geometer, der do was preceptor oder

1) Das Wort Algebram bedeutet hier sicherlich nicht unsere heutige *Algebra,* sondern den angenommenen Verfasser Initius Algebras. Für unsern Kommentator, der diesen Prologus geschrieben hat, hat die Algebra den Namen *Gebra und Almuchabola.*

2) Das ist natürlich Verwechselung des Muhamed ben Mûsa Alchwarîzmî mit Muhamed dem Propheten, wie ja auch im Vorhergehenden wunderlich genug mit Zeit und Thatsachen umgesprungen ist.

3) Der deutsche Kommentator weiss also, dass die Inder vorzugsweise im Rechnen ausgezeichnet waren. Er kommt mehrfach auf diese Eigenschaft zurück.

4) Über die Persönlichkeit des Yles und seine Beziehung zu Euklides sehe man die Einleitung. Die Verwechselung zwischen Euklid dem Geometer und Euklid

vorfarn EUCLIDIS des fursten zu Megarien, mit grossem fleis vnnd leitung. Wann zu den gezeithen was ALGEBRAS der kostlichste vnd berümtist in der zal von PYTHAGORA her, vnnd furter nie kheiner gewest, der so grundliche ding von den zalen hett gesatzt. Wann pey PYTHAGORA bifs auf PLATONEM, vnd von PLATONE bifs auf ARISTOTELEM was gewenlich, das sie alle ding durch die zalen wolten demonstriren. Des wir dann noch finden in den Texualien ARISTOTELIS, das er viel ding demonstrirt durch Mathematicam, vnnd finden auch durch die Zalen als durch himlische Grunde die schetze der Natur. Wir finden auch noch bei vns, das do von allen Meistern ye bifs auf vnser zeitt nicht scherpfers in der zal ist funden worden, dann das do sein die zaln vnd das Buch ALGEBRAE, vnnd laut zu vnserm Teutschen mit seinen geclerten anhengen, jnmafsen hernach volgt, wann es an jme selbst schwer ist in Latein gesatzt, darumb zu cleren not ist.[1])

4 | *INITII ALGEBRAE Arabis, Viri Clarissimi, ad Summum Mathematicum eo tempore Geometren YLEM Prologus foeliciter incipit.*

Dein begern zu erfüllen, du liebhaber vnser zalen, des wir vns nicht wenig von dir verwundern, der du bist der gröste vnter den vnsern, ein vnüberwindlicher Geometer, der ich dich meiner zal ergrundung thun soll, vnd deine kunst die meine beweist, binn ich nicht gesinnet, der zusetzen werden vber dich newes gefunden habe, sonder aber, als du mutest ze wissen meine wis vnd form der Linien Bipartiten vnnd Tripartitis, das ist der Linien Natur in zwei vnd drei getheilt, bin ich vngezweifelt, deine grofsmutigkeit werden clein achten mein selbst vorgenomene weise, wiewol

---

von Megara, der hier sogar ein Fürst von Megarien wird, ist ja seit DIOGENES LAERTIOS eine ganz gewöhnliche.

1) In der Dresdner Handschrift *C. 405* ist hier folgende Inhaltsanzeige des ganzen Werkes eingefügt:

Primus liber: de octo aequationibus et demonstrationibus earundem.

Secundus liber: de quantitatibus additis et diminutis sive pregnantibus.

Tertius liber: de numeris rationalibus communicantibus atque surdis trium tractatuum.

Quartus liber: de proportionibus tam rationalibus quam irrationalibus, proportionalitatibus et medietatibus.

Quintus liber: de binomiis et de coniunctibus eorum secundum 13 numeros irrationales.

Sextus liber: de clavibus numerorum coniecturis propositionum sive questionum.

Septimus liber: de areis datis corporum atque superficierum perquirendis.

Octavus liber: de datis absolutis numerorum secundum claves examinatorum.

Nonus liber: compilatio super Algebram tam latina quam theutunica.

vorhin jn der zal nie angetast vnd gehört. Yedoch, so dein gemute mich wirdet vornemen, wirstu mich defs mit deinen demonstrationibus vnd beweisungen bezeugenn, vnd dir bald zu gedechtnus fallen mein cleine erfindung. Bitt dich fleifsiger aufmerkhung, ansehung, was vbung ich habe deiner zwigespalte vnd drigespalte Linien, vnd die in die zal gebrachtt nicht wenig zu verwundern hast, das ich aus deiner werden kunst solle saugen, das du von mir begerst zu wissen. | Verwundert mich, aus was 4'
Ohren dir solch mein zal vorkhomen sei, als du schreibst von ZITHEO, dem Singer, vnd LAMENO[1]), dem Arismetico, die mir bekant sein. Bin ich nicht wissens fragen, das ich mich des hette vormessen, von deiner Achtparkeit bey jnen zu berhumen, sondern aus jren fragstuck meiner gefunden Art gebraucht, die du jnen mit vil hubscher beweisung deiner Geometrei aufgelost hast, sind sie fort zu mir, deinen vnwirdigen jungen, khumen, aus deiner Anwejsung jnen ettwas derhalben arithmetice zu ostendiren, das dir dozumal vnbedacht gewest, das sich solchs zu der zal sollte gemefsen haben. Vnd fragst gros verwundern deiner partiten vnd tripartiten linien, die do nest angesehen vnd daraus gezogen die Gebra vnd Almuchabola, das also bei vns wol ze verwundern, die zal so weit vmb sich zu begreifen. Vnter andern meldestu, das noch kheiner vber mich der zaln sei erfunden von vnsern vatter PYTHAGORA her, des du mich vnwirdigen lobest, dann alle mein erfindung aus deinen bipartitis vnd tripartitis linien gezogen ist, vnd grofsmutigkt mich, das ich meine sect mit deiner werden kunst mag bewisen. Dein vorbild, dein augen nie abgebrechen, werde ich dir solchs vorwerfen vnd sehen lassen, was | newes sey, das dein vrsach 5
nicht vorgangen sey in deinem Buch von der linien bipartitis gesaget, des ich dich erinnern würde, hastu forpas meinen fleis zuvormerken deiner lehr mir gethan. Aper meldestu, dich nicht vorsehen hettest meiner vbung, des mir deine harpfe wortt gesaget von der Linien Bipartitis vnd Tripartitis einfürung gegeben haben, auch kaum, das ich solches so weit habe bracht in Gebram vnd Almuchabolam, das ich mag finden aus deinen Linien eine bekhante Zal des vnbekhanten vnd fragenden dings. Vnd wiewol solchs noch gleicherwis bei vns vnmöglich ist den vnvorständigen, will ich deiner liebe solche mein cleine gefundene seckt vnuorholen haben bei dir pleibenden, auf das nicht gemeiner man spreche, gewachsen sein vber dich, das dir dann vorkleinung brechtt. Vnd wie wol dein werde kunst meine sect beweist, wirdt sie dennoch schwerlich hieher aufszudrucken, wol ermessen hast, meine arbeit gethan deiner erclerten proposition auslegung

1) Diese Namen sind wohl fingiert; ich konnte wenigstens keinen derselben in mir zugänglichen Werken auffinden.

eraigen werden, vnd wie ich aber bei mir Gebram vnd Almuchabolam aus deinen linien erfunden habe, will ich setzen zum ersten von deiner bipartitis linien, die du auch zu schetzen der zal hast zugeaignet, vnd als-
5 dann | von den tripartitis, wie die soll in die Bipartitis reducirt werden, das man ernstlich muge haben den eingang jn Gebram vnd Almuchabolam, aus was Grunde sie anfengklich entspreufst. Wenn die gemeldte Gebra vnd Almuchabola neher kheinen anfang khan schöpfen, dann aus den gemelten Linien, die du dann aus kunstlichen propositionen hast gesatzt vngezweifelt deiner Geometrej clerlich aufsgedruckt, vnd jtzlicher Geometer vnd fleifsiger der kunst in gedechtnus fueren, vff das er besser möge ergrunden vnser Gebram vnd Almuchabolam. Vnd volgett hernach von der gemelten Linien Bipartitis Ylis das erst Capitel.

Capitulum primum de linea bipartita Ylis *Geometris (!).*

Du sagest in deinem dritten Buch von der Natur der Linien, nachdem vns ein ytzlich linien vnzerthailt genandt wirdt ein *Continuum*, das do an im selbst vnzerthailt gesprochen, vnd khan auch erstlich ein ytzlichs continuum anderst nicht gethailt werden, dann jn zway thail. Vnd wie wol wir sprechen, sie moge in funfe, sechs oder mehr thail gethailt wer-
6 den, | so ist doch nach dem vorstande der Natur ein ytzliche thailung erstlich gespalten vnd khan auch in mehr tail nicht gethailt werden, dann in zwei thail, vnd dasselbige wider in zwei, das gegen der gantzen Linien vorpas zu viel thailen gezalt wirdtt. Sam also, wir wollen setzen, die Linien ab sey gethailt in 7 thail vorstentlich, vnd sey das erste bc. Sprich ich, das ab in zwei gethailt ist in puncten c. Setzen wir d den andern punct. Also sprich ich, das ac gethailt ist in zwai thail gegen den punct d, vnd also wirdtt gegen der gantzen Linien gesaget in drei thaile, vnd doch ein ytzliches Continuum wirdt gesprochen in zwei thail erstlich zu thailen. Vnd hierumb sagstu nit vnbilligen, von der zweigespaltenen Linien habe ich gedachtt in meiner Gebra vnd Almuchabola von dem dinge gesprochen, die weil die Linien vnzerthailt ein Continuum ist, das do gantz ist und kheine vorstentliche dissection an jme selbst nit hatt, so mag ich sie wol nennen ein ding, das noch vnzertailt ist vnd gantz gerechennt gegen der zal, die do noch kheinen namen jn die gesatzt hatt, das ist das
6′ Continuum. So aber der gantzen Linien zehen die zal eroffnet ist | vnd dergleich gesatztt ist, vnd vor zehen gerechent, vnd soll alsdann gethailt werden in dem Sinne gegen dem dinge in zwei thail, sprechen wir, das

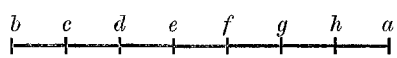


Fig. 1.

das ein thail continuum ist ein ding, vnd das andere zehen an der zal minus ein ding, vnd das zusamen gesetzt ist zehen, das was die gantze Linien. Also wird gesagt ein ding Gebra, vnd 10 minus ein ding Almuchabola[1]), vnd ist vnser erster eingang zu sagen von dem dinge, das dann in Gebra vnd Almuchabola vor ein Radicem vnd wurtzel genomen wirdt, wann alle ding mögen hieraus entspringen. Es ist auch die gantze Gebra vnd Almuchabola auf die Bipartiten Linien gegrundt. Gleicherweis ein ytzlichs continuum erstlich zu thailen nicht mehr thaile khan an sich nemen dann zwei, also vermag auch ein gemelte Linien nicht mehr dann aus ir selbst beschreiben ein superficien, der dann nicht mehr dann zwo dimensiones vormag, darumb werden die Gebra vnd Almuchabola allein den planitien zugeaignet. Aber als tripartita linea sich etwas weiter erstrecket, wollen wir seiner zeitt genugsam volg thun. Wie nun dein linea bipartita sol gewerificirt werden, | neme ich vor deine sechs gesatzte pro- 7
positiones des dritt Buchs von den bipartiten Linien vnd jrer naturenn, vnnd wie ich aus den gezogen habe gebram, das ding, vnd Almuchabolam, die zal minder dasselbigen dings. Nach welcher naturen dann ein jtzliche Linien erstlich gethailt wirdtt, setze ich dein erste proposition, vnd ereugen dir die also lautende:

Capitulum secundum de prima propositione Ylis *lineae bipartita eiusque natura et essentia.*

Linea bipartita ducta per aliam id potentialiter efficiet, quod tota in quamlibet eius partem producit, et si expletum una earum coniunctum dividit, reliquam quantitatem renasci necesse est.[2])

Vnd laut zu vnserm deutschen also:

Ein jtzliche zerthailte Lini in etzliche thail so die durch ein andere gefurth wirdt, so schreibt sie mit jrer machtt, das dann aus der gantzen jn jtzlich thail der zuthailen zusamen entspreufst. So dann solches entsprofsen durch der Linien eine gethailt wirdtt, so erheischt not, die andere werde wider gros geboren zu werden. | 7′

1) Dieser Unterschied zwischen Gebra und Almuchabola dürfte sich wohl nur an dieser Stelle finden. Später kennt aber der Kommentator sehr gut auch den Begriff *restauratio*.

2) Euclides II, 1 (ed. Ratdolt 1492): Si fuerint due linee, quarum una in quodlibet partes dividitur, illud, quod ex ductu alterius in alteram fit, equum erit his, que ex ductu linee indivise in unam quamque partem linee particulatim divise rectangula producentur. Das Korollarium von *et si* an ist bei Euklid nicht vorhanden.

Da wir aber vnser Gebram vnd Almuchabolam aus deinen Continuis gezogen vnnd pracht habenn in den vorstande der zalen, so wisse, das wir jnn negsten Capitel gesetzt haben, das ein Continuum vnzerthailt gedachtt wirdtt vor ein ding, das kheinen namen der zaln hat, alſs dann ein vngethailte Linien ist. Aber die gethailte Linien, gesprochen partita, wirdet nit der zal gemeſs, wann sie vorstentliche thaile jn jr hatt, vnnd werden genandt vnitates gebrae, das sind vnitates des dings in potentia vnd auch der quotient des Almuchabola, den man tailet in der Equation. Dann also offte vnitas ist in dem ding, das ist in gebra, so offte ist der quotient in Almuchabola, vnd also offte vnitas in dem quotient, so offt ist das ding in Almuchabola. Das seind vier proportionalisch zal gesatzt, daraus wir vnser Regeln gesatzt vnd transponirt haben.

Setzen wir lineam partitam *ab* (Fig. 2) getailt in vorstentliche thail, *ac* die linien vngethailt vnd gantz, jn massen die proposition cleret, vnd setzen den gantzen Superficien *ab* in *ac* sei 60 an der zaln. Nun sprechen wir, nach der proposition, das *ac* in *ab* gemultiplicirt beschreibe den gantzen superficien

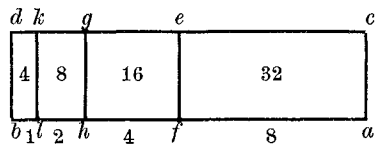


Fig. 2.

Prima aequatio.
ꝛc ꝛc

8 *acdb*, das seind | 60, so mus von noth *ac* sein ein einig ding, das in vnitates *ab* wirdt gefurt vnd 60 machen in potentia, darumb mus *ab* der quotient sein des superficies, das seind vnitates des dings Gebrae *ac* in potentia. So nun *ab* der quotient ist, so thailen wir 60, Almuchabolam, durch 15, Gebram, das seind durch vnitates *ab*, kombt 4. Also sprechen wir, das das *ac* sey 4 aus der zal, das was das ding, die gantze vnzerthailte Linien. Nun ist das ding 4 vnitates werdt gewest in longitudine; darumb seind vnitates gebrae auch worden 4 in potentia, wann 8 in potentia vermag 32, vnnd 4 in potentia 16, vnd 2 vermag 8, vnnd 1 vermag 4. Vnd solchs zubeweisen vnd menschlich vernunfft einzubilden vornemlichen, wollen wir den text figurlich zusetzen ein Beispil, auf das der text clerlicher zu vernemen sey mit leichter anweisung.

Es sitzen bey einander vier philosophi, nemlich Plato, Euclides, Pythagoras vnd Aristoteles. Werden zureden mit Algebrae dem groſsen
8′ Arismetro in einer | collation sprechende: Liber Algebras, wir vntherein-ander wollen gern wissen, wie alt ein yeder in sonderheit sey, dann wir alle vier seind 1455 jhar altt; vnd Euclides ist noch so alt als Aristoteles, vnd Plato noch so altt als Euclides, so ist Pythagoras noch so alt als Plato. Nun mach vns das durch dein Gebram vnd Almuchabolam,

vns zubeweisen dein erste gesatzte Regel gezogen aus der partita linea Ylis des grofsen Geometers. Anttwort Algebras: Ich setze jr seit alle alt das gantzen superficie *ac* in *ab*, das ist 1455, nach eurer sage, das nenne ich Almuchabolam, das ist die zal, deme das ding *ac* Gebrae gleichen mus mit allen rectangeln, wann die proposition sagett, das *ac* in ytzlich thail *ab* aller Rectangeln macht gleich als *ac* in *ab*. Nun ist *hl*, Euclides, noch so alt als *lb*, Aristoteles, so ist *fh* Plato noch so alt als *lh* dann Euclides. Auch so ist *af*, Pythagoras, noch so alt als Plato, so erheischt not, das das erste 1 in der zal, das ander 2, das dritt 4 vnd das viert 8. Vnd so diese 15 vnitates gefurth werden durch *ac*, ein ding, das dann Continuum ist vnd khein discretion der zal hatt, so khomet der superficies: also werden die 15 vnitates in potentia gleich dem superficie 1455. | So dann die gemelten 15 vnitates sein der quotient des dings continui *ac* 9
gegen den superficien, so thailen wir den superficien durch 15, khombt nach der proposition die zal des dings *ac* continui 97. Wann eine Lini jn die ander gemultiplicirt erwechst der superficies, darumb von not wider gethailt den superficiem durch der Linien eine, geporn wirdt die andere der proposition. Noch so alt ist Aristoteles 97 jar, vnd ist der Rectangel *kdlb* jn potentia, vnd sein vnitas jn der lenge 1. Nun multiplicir wider *ac* in *hl*, khombt 194, so alt ist Euclides, vnd ist das andere rectangulum, das aus der vnzerthailten Linien jn die gethailten erwechst. Als dann die proposition auswist, multiplicir 97 in 4, khombt 388, so alt ist Plato, vnd ist das dritt Rectangulum, vnd sein vnitates in der lenge sein 4, vnd ytzlich in potentia ist 97, darumb heisen sie vnitates Gebrae in potentia. Nun multiplicir 97 mit 8, khomen 776; so alt ist Pythagoras. Solche Rectangel alle zusamen geben den gantzen superficiem nach aller Form vnd weise gesatzter proportion der Linien partita vnd inpartita, das ist der zerthailten vnd unzerthailten linien. Nun volget das dritt Capitel von der andern Linien partita Ylis, | des geometers. 9'

Aristoteles	97
Euclides	194
Plato	388
Pythagoras	776
Summa	1455

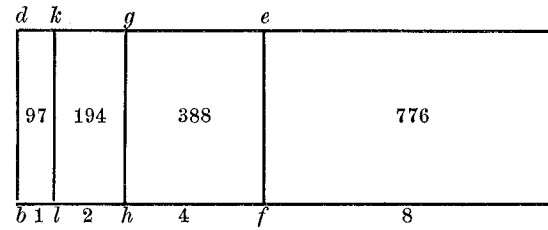


Fig. 3.

Capitulum tertium de linea partita Ylis, *eiusque essentia ac natura propositio secunda.*

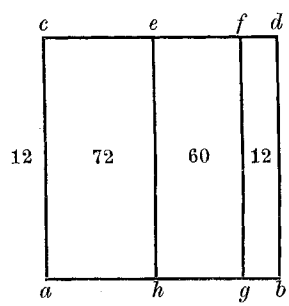
Partita linea in se ipsam ducta, descriptum aequum est indivisae eiusdem in omnes suas partes divisas.[1])

Vnd laut zu vnserm teutschen also:

Die zerthailte Linien, so sie in sich selbst gefurt wirdt, so beschreibt sie den gleich, so dieselbige in alle jre thail gefurt wirdt.

Vnd die proposition sampt der vorigen werden auch gesatzt von Euclide im andern Buche an der ersten vnd andern proposition, wann er was ein junger Ylis des grosen Geometers.

Von diser proposition einzufueren vnter andern Regeln Gebrae et Almuchabolae, so nennen wir vor, inmassen vorgesagt, zu setzen die ungethailte Lini vor ein ding, so die in sich selbst gefurt wirdt, beschreibt
10 vns ein quadrat, des Radix ist die lini continua, vnd | vnwissent der zaln gesatzt. So dann die gethailt wirdt in vorstentliche thaile der zal gemes, so erwechst aus den tailen jn die gantzen linien gleich dem vorigen quadratt. Setzen wir (Fig. 4), die zerthailten Linien *ab* sey vnitas, *gh* vnd *ah*, vnd *ac* ist vnwissent, so setzen wir ein ding als vnwissent. Also nach der ersten proposition *ac* in *ab* macht 144, Almuchabolam, darumb ist *ab* aber der quotient. Thailen wir 144 in *ab* 12, so khumen 12; also ist ein ding *ac* in longitudine 12, vnd der erste Rectangel in potentia ist 12, der ander 60, der dritt 72, vnd jre vnitates in der lenge seind in potentia jr jtzlich 12, vnd solche Rectangel machen auch 144 gleich dem quadrat. Vnd diese gemelte proposition Ylis setzen die Indij nicht, vnd sagen, es sey genugsam in der ersten proposition ausgedruckt, dann wo *ab* in so vil thail partirt wirdt oder ist, das ist in vnitates, souil dann das ding werden wirdt, so ist es superficialiter gemultiplicirt, als die erste clerlich aufsgedrucket hatt. Ist dann die Linj jn souil thail gethailt, so vil das ding werth ist, so ist nit noth das ding zu suchen, sonder es ist bekant, vnd
10′ hierumb weistu in | nachuolgenden bericht, warumb dise gesatzte proposition von den Indiern nicht gesatzt ist, vnd wie sie den Text Algebrae



Secunda aequatio.

ʒ · ℭ

Fig. 4.

1) Euclides II, 2: Si fuerit linea in partes divisa, illud, quod ex ductu totius linea in se ipsam fit, equum erit his, que ex ductu eiusdem in omnes suas partes.

gescherpft haben, ist noch zur zeitt nichtt vorstentlich zu wissen, sondern dem text ALGEBRAE gemes zu sagen.[1]) Vnd solche proposition leicht einzubilden, wollen wir abermals dem Text ein vornemlich Exempel addirn also lautende leichter begreifung zu dem Eingang dis Buchs.

LAMENO, der grofse Arismetist, fraget ALGEBRAM in einem fragstucke, wie der grosse ALEXANDER hette geben dem PLATONI, ARISTOTELI vnd auch dem PYTHAGORA etzlich marck golds zu verzern zu Athenis vff der hohen schule, die hetten sie vorkaufft ye 1 mk so theuer, souil der marck gewesen waren, vnd doch hatte PYTHAGORAS 6 mal alsouil zu verzern als ARISTOTELES, so hatte PLATO auch funfmal alsouil sam ARISTOTELES, vnd des goldes was in der summa 8649. Nun wolte ich gern wissen, wie theuer eine Marckh geben worden were, vnd wieuil geldes yeder zu vorzern hette.

Setzen wir *ac* sey ein ding des geldes, *cd* gleicherleng des geldes. Nun *ac* in *cd* macht ein quadrat, pey vns gesprochen ein ʒ, das ist 8649 gleich in der zal, den multiplicirn mit 1 ʒ, wirdt 8649 ʒ. Nun ist ein | itzlich latus radix des zensus, darumb radix von 8649 ist 93: souil Marck, vnd souil eine Marckh gegolten *dc*. Nun hat ARISTOTELES von dem ʒ 1, PYTHAGORAS 6, vnd PLATO 5 der linien *cd* von dem gelde, das sind 12 radices gleich dem zens in potentia. haben wir vorgesagt, das *cd* sey der quotient der superficie, darumb theile zens durch quotienten 12, khombt der Rectangel in potentia *bhdg* ARISTOTELES, vnd den magstu auch in die zal fueren (Fig. 5).

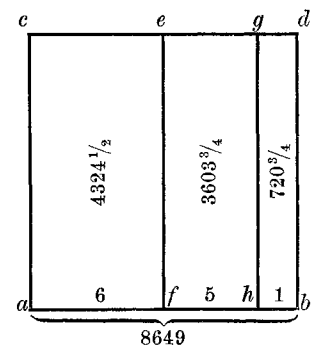


Fig. 5.

Capitulum quartum de linea bipartita YLIS *geometris eiusque natura et essentia.*

Bipartita linea ducta si fuerit in alterutrum eius partem, coaequum est, quod ex eadem fit in se ipsam, et alterius per alteram. | [2]) 11'

Vnd laut zum deutschen also:

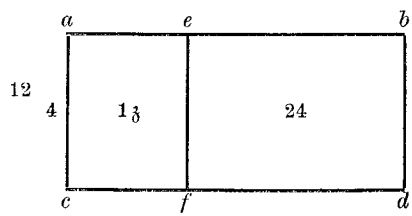
Ein ytzliche zwigespalten Linien so die wirdt gefurt jn

1) Wieder ein Beispiel für die Kenntnis des deutschen Bearbeiters, was indische Rechenkunst betrifft.

2) EUKLIDES II, 3: Si fuerit linea in duas partes divisa, illud, quod fit ex ductu totius in alterutram partem, equum erit his, que ex ductu eiusdem partis in se ipsam et alterius in alteram.

jrer thail eins, welches das sey, so ist das gleich deme, was aus dem selbigen thaile khombt jn sich selbst vnd aus dem selbigen gefurt in das ander.

Solche gesatzte proposition wird vns beschrieben in der dritten proposition EUCLIDIS seins andern Buchs. Wie wir nun vnsere dritten Regel Gebrae et Almuchabolae aus diser proposition gezogen haben, setzen wir die bipartiten Linien *cd* sey eines thails vnwissent der zal *cf*, vnd das *df* sey aus der zal 24 inpotentia, vnd der gantze superficies *abcd* sey 40 in numeris. Nun zu ergrunden das eine thail vnser Bipartiten, die dann nach der gesatzten proposition beschreiben thut 1 ʒ der zal vnwissent gesatzt, so saget eigentlich die proposition, der gantze superficies erwachse aus der gantzen Linien *cd* gefurt in *cf*, oder aber aus *cf* in sich vnd *cf* in *df*. So nun *fd* ist wissent gesatzt 24 in potentia, so die gezogen werden von 40, Rest 16, das ist der zins des Radix *cf*, in longitudine vnd in numeris 4, also ist der quadrat 16 vnd | radix, das ist das ding, das vnwissent war in der lenge vnd potentia, was 4. So wir nun haben gefunden, das das aus der bipartiten Linien eines thails in sich entspringt in longitudine vnd potentia, vnd das ander thail *fd* wissent ist in potentia, so sollen wir auch ergrunden, was das in longitudine sey. Saget uns die proposition, das das eine thail in der lenge in sich vnd dasselbig in das ander beschreibt den gantzen superficiem *abcd*. Hierumb ist *cf* der quotient von 24 in potentia gegen *fd* in longitudine, wann aus *cf* in *fd* wirdt *ebfd*, das ist 24. Wann thaile 24 in 4, khumbt 6, das ist *fd*, also ist die gantze linien bipartita in longitudine 10, vnd das eine thail ist 4 in numeris, vnd das andere 6, vnd das ding, das vnwissend was in longitudine vnd potentia, was radix des zensus *aecf*. Vnd von solcher proposition haben gesatzt die Indij grosse heimlichkeit zu erfaren vnd auszugrunden die zalen[1]), jn massen wir dauon sagen werden, auf das wir aber angeregter Exempel vorgesatzt Ordnung hatten, wollen wir den Text cleren.



Tertia aequatio.

ʒ · ℳ

Fig. 6.

2′ HIPOCRAS gab auf ein zeit dem GALENO gellt, jme | zu kaufen des holtzes Aloes in der messe zu Athenis in die Apotecken gehorig. Nun aus vil warf GALENUS das gelt in seinen Beutel vnter anders sein geltt, das jme vnwissent was, das er auch vorhin im beutel gehabt hette, doch

1) Auch hier wieder die Erwähnung der Inder als grosser Algebraiker.

merket er seine empfelhnis jme gethan: so theuer man gebe 1 ℞ aloes, souil ℞ sollt er bringen, vnd er hette jme darnach zalt. Also da er kame gen Athenis, da fand er 40 fl im beutel, die gab er den khaufman nach empfelnis Hypocratis, vnd sprach: gebt mir, als auch Hipocras geschrieben hatt, vnd sonderlich so gebt mir das ℞ auch jm gelde des holtzes Aloes, dann ich habe sunst mehr auszurichten, vnd fast mir es ein vnd verwart mirs. Also am widergang fraget er jn, ob er es jm aufsgericht hette; antwort jme der kaufmann: jr habet beide souil sich geburt, vnd jr habet besunder des vor 24 fl. Das zeiget Galenus an. Do in nun Hipocras auf dem widerkhomen ersahe, fraget er jnen, wie er die sachen hette aufsgericht. Antwort Galenus: Ich wais nicht, wieuil ich vorhin jm peutel gehabt habe, so habe ich nicht gefragt, wieuil | 1 ℞ gestehe, sunder er 13
saget, ich habt seiner vor 24 fl vnd wir baide vor 40 fl. Also werden sie der sachen vnwissent, vnd schicken nach dem Algebra, vnd baten jn nach ergangner sachen, solchs sie bede durch die Gebram vnnd Almuchabolam zu entscheiden. Algebra sprach: Wir setzen Hipocratis ℞ sein *cf*, ein vnwissent ding in longitudine vnd potentia, vnd Galeni ℞ sein *fd* in potentia 24 in numeris. Nun geldtt *cf* das ding souil als des ℞ sein. Nun das ist in longitudine ein ding, vnd gilt auch 1 mal ein in potentia den quadrat oder zensus. Nun aus der proposition, so ist der vnwissent zensus *aecf* mit 24 in numeris *edbf* gleich 40, dem gantz parallelogramum *cbad* in numeris. Zeuch ab *ebfd* vom gantz superficie, restant 16, der zensus *aecf*, des latus ist radix, das ist 4, nach der proposition in sich selbst. Also ist das ding 4 werdt in longitudine, das sind die ℞ Hipocratis, vnd ytzlichs hat gegolten 4 gulden, das ist 16, das was der zens in potentia. Nun ist 24 in numeris nach der proposition aus *cf* in *fd*, darumb thailen wir 24 mit 4, khomen 6 ℞, gehorn | Galeno, wann 4 der 13'
ist von 24 in potentia gegen *fd* in longitudine. Vnd so haben wir bewisenn vnser dritte Regel in vnser Gebra vnd Almuchabola. Nun folgett von dem funften Capitel die vierdte proposition Ylis des grossen geometris.

Capitulum quintum de quarta propositione Ylis *lineae bipartitae eiusque natura et essentia.*

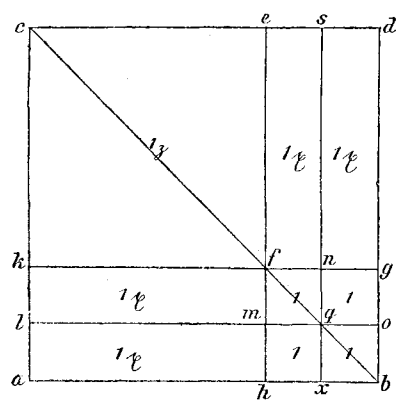
Quod ex partita nostra in se ducta describitur, coaequabitur numero et mensura utraque parti in se et alterius per alteram bis. Patet omnia crescentia gnomone lineam bipartitam in infinitum quantitate describere.[1])

1) Euclides II, 4: Si fuerit linea in duas partes divisa, illud, quod fit ex ductu totius in se ipsam, equum est his, que ex ductu utriusque partis in se ipsam et alterius in alteram bis. Auch hier ist das Korollar: *Patet omnia* bei Euklid nicht vorhanden.

Vnd laut zu vnserm Teutschen also:

Das dann khomet aus vnser zwiegespalten Linien in sich gefurt, wirdt gleich an der zal vnd mensur einem itzlichen thaile der Bipartiten in sich gefurt vnd eines thails in das ander zwir. vnd herumb wirdt offenbar, das alle die quadrangel, die do wachsen sind bei dem diameter durch den Gnomon, das ist durch den Winckelhacken oder Radicem, beschreiben die linea
14 bipartita mit jrer quantitet zu wachsen on ende zu ergrunden. |

Vnd aus solcher haben wir gezogen vnser vierdte Regel Gebrae et Almuchabolae. Sie wirdt auch gesatzt in der vierdten proposition des andern Buchs Euclidis. Wir nennen Gnomonem oder die Supplemente vor die Radix, wann ein jtzlicher quadrat wechst mit zweien Radicibus vnd dem gnomo, den sie geben, zu erfüllung der quadratur. Darumb, soofft der circumscribirt wirdt, macht er mit den Supplementa den quadrat wachsent in vnitate, vnd macht in longitudine die linien bipartita. Als wir setzen *cekf* (Fig. 7) sollen wachsen vnitate mit den radicibus circumscribirt *klfm* das ist ein ℛ, vnd *esfn* der ander Radix, vnnd pleibt vacuum, in das die quadratur nicht erfullett wirdt, vnnd ist gnomo genant. So dann der quadrat wirdt *fnmq*, so ist *fnmq*, der quadrat erfult, vnd *lq* die linien ist zerspalten worden in *m*. Also mogen wir furter das quadrat *clqs* auch circunscribirn, als jtzunden gethan wurde, *ab* gespalten in *x*. Das mochte geschehenn nach der proposition one ende. Wir nennen auch einen ytzlichen wachsenden quadrat circa diametrum | vor 1 ʒ, der in der lenge vnd



Quarta aequatio.

℞ ℛ + ʒ

Fig. 7.

14′

potentia vnwissent ist. In der lenge ist sein zu der zal vnwissent, damitt er wechst, vnd in potentia hat er kheinen Namen, sonder aber die radices vnd der zens zusamen seind in numeris vorgelegt. Also wir setzen wollen *cekf*, der vnwissent ʒ, ist circumscribirt mit 4 radicibus *kflm* vnd *lmah* vnd *efsn* vnd *sdng*, die do auch vnwissent sein, dann allein, das sie den namen haben, das jr 4 sein. Nun sein der ʒ vnd 4 radices zusamen 45 in numeris vnd gezelte thaile in der zal oder vnitates in numeris der linien *ca* vnd *cd* ist *cagdsf*, vnd zu der Completur des quadrats ist gesprochen der gnomo *fmx*. Nun wollen wir setzen, der quadrat in der lenge *kf*

ist ein ding, das ist ℭ, vnd so ich die linien *kf*, das ding, in sich füre oder radicem, wird ʒ oder quadrat, welcher mit abgemelten 4 radicibus ist 45 in numeris, was mögen die radices vnd der zensus sein in numeris gesondert von einander. So mercke, das wir haben eigentlich gesatzt, das dem quadrat gebrechen ist der gnomo *fmh*, so ich den quadrire, wird *fghb* vnd erfult die gantz quadratnr *acdb*, welcher gnomo ist *fghb* ist gesatzt von 4 distinguirten vnitaten in numeris, die do erwachsen aus dem halben thail der radices | in sich gefurt, wann yede seithen des Quadrats zwo 15
seithen circumscribirt ad crescentiam. So ich nun solche 4 unitates zu 45 thu, die dann jme gleich seind in der zal, wann es sein 4 vnitates von dem gantzen quadrat in numeris, so erwechst 49, das ist die gantze quadratur *cadb*, vnd radix 7 *a* durch *b*. So nun des gnomoni seiten *fg* von der bipartiten *ab* gezogen wirdt, das sind zwo vnitates *xb* in numeris, von 7, restant 5, das ist *ah* vel *kf*. Also sprechen wir, das *ah* der radix ist 5, vnd das in sich ist 25 in numeris, der ʒ, welcher mit seinen 4 radicibus 45 machtt, inmassen wir gesatzt. Vnd solchs zu vnterrichtung menschlichs sinnes vnd figurlich einzubildenn mit leichtem Exempeln, setzen wir dem Text zu mit verlaubung ALGEBRAE[1]) also:

SALOMON schickt ESOPUM gehn Damasco zu khaufen Samett vnnd Scharlach; gab jme 45 fl. Do er dohin kham, kaufet er ein Samett so theuer, souil er da elen nam, vnd 4 eln Scharlach so theuer die eln, sam des Sametts was, vnd als er vor konig SALOMON kam, fragt SALOMON, was das kostet. Antwort ESOPUS: Nun rath, Khonig, du gabst | mir 45 fl, 15′
dauon hab ich kaufft souil des sametts, so theuer man ein eln geben hatt, vnd 4 Eln Scharlach so theuer 1 eln sam des Samets ist: nun sage mir khonig, was ein eln kost des Samets, wieuil der sein, vnd wieuil ich vor 1 eln scharlach geben hab. SALOMON entsatzte sich vnnd sandte nach ALGEBRAM, jm solchs durch Gebram vnnd Almuchabolam zumachen. Als das ALGEBRAS vernam, sprach er zum konig SALOMON: Durchlauchtiger konig, hastu doch selbst vil Regeln jn der zal gesatzt, die nach dir genandt sein, als regula SALOMONIS[2]), so man ordine converso practicirt regulam HALI HABENRIGEL, so man die zalen setzt in die vier proportionalische zaln der aufgab nach, als wir nachuolgend sagen werden. Verwundert mich, das ich dich solchs durch mein Gebram vnnd Almuchabolam berichten soll. SALOMON antwort: Du berumbter Arismetrist ALGEBRA, deine Regeln straffen

1) Hieraus ist klar, dass alle diese wunderbaren Aufgaben dnrch den deutschen Bearbeiter hinzugefügt sind.

2) Hier wird also die *Regula Salomonis*, d. h. das sogenannte Rückwärtsrechnen, auch *regula sermonis* genannt, dem Könige SALOMON zugewiesen. Siehe CANTOR, Vorlesungen II², 247.

die meinen, denn mir noch nie kundig gewest, was durch die surdischen vnnd jrrationalischen zaln solle volfurt werden, vnnd sage mich mit andern, so sich nennen Arithmeticos, zu jrren schwerlichen, vnnd gebe dir preis vor
16 allen | vnter der sonnen erbeitten in der zal, vnnd wollest mich solchs deiner Gebra vnnd Almuchabola thun berichten, welcher Gebra vnnd Almuchabola zu demonstriren jn zal, jn mas vnnd jn gewichtte geschaffen, jnmassen ich gesatzt hab Sapientiae undecimo, nichts von ist, es wirdt aufgelest vnd soluirt. Algebras antwort: So setzen wir des Samets eln sey *kf*, ein ding in longitudine. Nun kosten die ein ding 1 mal eins, das ist der vnwissent ʒ *kfce*, vnd ist das gelt des samts, bei vns gesagt ziens oder tribut, in potentia des dings in longitudine. Nun sind des scharlachs 4 vnitates in numeris, kost eine, souil des dings *kf* ist in longitudine, das was ein ding *kf*. So mus der scharlach kostenn in potentia, die wir supplementum oder paralellogramum nennen. Also waren 4 radices der zens oder die 4 supplementa in potentia mit dem ziens *kfce* 45 in numeris gleich, inmassen vorgesagett. Nun so wir die 4 Supplementa mediren, das ist mit dem gnomone circumscribiren auf bede seiten, so durch die bipar-
16′ titen Linien erwechst ad crescentiam des ziens bey | diameter, so gebricht zu der Quadratur der vorgemelte Gnomo, welcher, so er quadrirt wirdt, durch sein circumscribirt des Supplements vnitates, der dann zwo in numeris sein, wirdt 4. So die zu 45 addirt werden, wirdt 49, das ist die gantze bipartita in sich; *ab* 7, der radix in numeris, von welchen abgezogen die zwo Seithen Gnomonis restant 5, vnd das was das ding in longitudine *kf*, die eln des sammets, vnd das ziens, tribut, ʒ oder geldt 25, das ist der eln. Nun hat etzliche eln des Scharlachs souil golten, sam des Samts gewesen ist in longitudine, das was 5; nun 4 mal 5 macht 20, das sind die vier supplementa in potentia vnd das geltt des Scharlachs. Also haben wir bewisen vnsere vierdte Regel Gebrae vnd Almuchabolae. Nun folget von dem sechsten Capitell die funffte proposition Ylis des grofsen Geometris.

Capitulum sextum de quinta propositione Ylis lineae tripartitae eiusque natura et essentia.

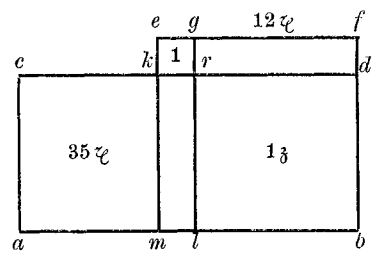
Aequale quidem est contentum sub aequalium medietate in se sectionum tripartitae lineae, quod sub inaequalibus cum tetragonismo inter utrasque
17 *complectitur.* | [1])

1) Euklides II, 5: Si linea recta per duo equalia duoque inequalia secetur, quod sub inequalibus totius sectionis rectangulum continetur, cum eo quadrato, quod ab ea, que inter utrasque est sectiones, describitur, equum est ei quadrato, quod a dimidio totius linee in se ducto describitur.

Vnd laut zum deutschen also:

Es ist gleich, das do ist vnter den gleichen sectionibus oder halben thailen jn sich gefurt der tripartiten Linien dem, das gehalten oder beschriben wirdtt aus den vngleichen thailen gemelter linien, mit sampt dem quadrat der zwischen beiden sectionibus der gleichen vnd vngleichen thailen erfullet wirdt.

Von diser proposition zu reden vnd einzufueren vnser funfte Regel Gebre vnd Almuchabole, welche auch EUCLIDES an seiner funften proposition seines andern Buchs ercleret, sollen wir eigentlich aufmerkhung haben mehr dann mit vorgesatzten propositionibus, wann sie etwas dapfer vnd schwerer ist, dann die vorgesatzten. Zum ersten vnd eingang diser proposition nennen wir (Fig. 8) die Linien *ab* vor den radicem des gantzen parallelogrami *ad*, wann wir wissen, so *bd* in *ab* gefürt ist, das *ab* radices seindt, jnmaſsen wir vormals gesatzt haben, das eine jtzliche Linien des superficies ist sein radix: die setzen wir ex numeris ist 12. Nun *bd* ist radix des ziens vnwiſsent ex numeris, vnd *ar* das parallelogramum ist ex numeris 35, solchs zusamen, der vnwissende census vnd 35 ex numeris, ist *ad* das gantz parallelogramum, welchen dann gleich sein die 12 radices *ab* in die seithen *bd* gefurt des vnwissenden zens. | Nun stehet die frage, was der vnwissende zensus sei, 17′ vnd was ein jtzliche section der Linien sey in potentia *ab* vnd longitudine, das ist, was das gantze parallelogramum sei jn Numeris *ad*, das alsouiel mach als die radices *ab* in *bd*, die seithen des ziens der vnwissent was. Saget vns klerlich die proposition: vnd das halbthail der Linien tripartitis in sich gefurt es sei gleich dem parallelogramo *ar* in numeris, das dann entspringet aus den inequalen sectionen mit sampt dem quadrat *kg*, das dann zwischen den zweyen sectionen geformirt wirdt. Nun ist das halbtheil der radices in sich 36, wenn die gantze radices 12 sein, dauon das halbe thail 6 mus sein in numeris in longitudine, das ist in potentia 36. Das were das halbe thail der radicis in numeris potentie. Davon zeuch das parallelogramum *ar* dragmarum in numeris, so bleibt *kg* das quadrat, als dann gesagt ist, das medietas radicum mehr vormag in sich dann *ar*, das quadrat zwischen zweien sectionen, vnd restat vnitas, wann *ar* in numeris ist 35, vnd *mf* das halbe thail in sich ist 36, vnd also ist des *kg* quadrats radix vnitas in der lenge *ml*. So die von der medietet radicum



Quinta aequatio.

ℳ + ʒ ℛ

Fig. 8.

18 *mb*, die 6 was, wirdt gezogen | restat *lb* 5 in numeris, das was der radix des ziens oder tributs, dann wir nennen den zens. So aber der zu der medietet gethan wirdt, erwechst *al*, die ander section inequalis. Also ist eins *al* 7 in numeris, die ander *lb* 5, das sein die 12 radices, welche dann in potentia der ersten section inaequalibus *al* in *db* ist 35, das parallelogramum *ar*, die ander *lb* 25, der vnwissent ziens, macht in numeris 60, das ist auch *ab* 12 radix in potentia in *db* das jm 5 gleich.

Das aber vornemblich sei, nach deme die materien an jr selbst schwer ist, sagen wir also figurlich.

Algus der philosophus schickt aus Esopum gein Paris Saffran zu kaufen die kuchen zu bestellen. Esopus kauft souil lott, so theuer man 1 lot gab, behilt 35 ℞. Vnterwegen ward er mit dem hunger begriffen, hette nichts, damit er sich gesettigen mochte, begegnet jm also Zuterich der Koch mit haisen fladen vnnd Butterwecken sprechende: wann her
18′ Esope? Esopus antwortt: Lieber, mein herr | Algus hatt mich vmb saffran geschickt, die kuchen zu bestellen, des hab ich kaufft souil loth, so theuer man es gab, vnd habe mich mit essen nicht versorgett. Dieweil du ein koch bist, vnd des Saffrans auch bedarffest, bit ich dich, du wollest mit mir beuthenn, wollest mir deine 12 stuck fladen vnd puterwecken vor meinen saffran geben; welcher geringer ist, soll dem andern zugeben. Zuterich gieng das ein. Also satzten sie sich vnnd rechneten, das die 12 stuckh Zuterichs 35 ℞ besser waren dann der saffran. Also gab Esopus die 35 ℞ zu, as vnterwegen alsouil fladen souil es mehr waren dann der wecken, die vbrigen pracht er seinem philosopho dem Algo, vnnd sagt jm, wie es ergangen, sprechende: Souil der fladen mehr wahren dann der wecken, souil hab ich jr gessen, vnd kostet doch jtzlichs stuckh souil sam des saffrans was. Nun rath wieuil hab ich fladen geessen, wie theuer hab ich das loth kaufft, vnd wieuil ist sein gewesen. Algus entsatzte sich vnd schalt Esopum. Er antwortet jme vnnd saget: Hastu doch grosse ding jn der zal geschrieben, den Algorismum de integris, de fractis etc[a.][1]), kanstu
19 das nicht machen | durch deine neben gesatzten Regeln, dauon viel wirdt gehalten? Algus antwortt: Du hast in allen dingen behende anschlege, wir wollen senden nach dem Algebra. Also khame Algebras. Nach Gelegenheit der sachen sprach er: Wir setzen, Esopum gekaufft haben 1 lot umb 1 ding *lb* in longitudine. Nun sind des auch gewesen 1 ding, das ist in sich der ʒ *lbrd*. Nun hat er Zuterich gegeben 35 ℞ in numeris *ar*,

---

1) Das bezieht sich natürlich auf den *Algorismus de integris* des Sacrobosco, der ja vielfach einem Philosophen Algus zugeschrieben wird. Der *Algorismus de fractis* dürfte dagegen der des Iohannes de Lineriis sein sollen.

das parallelogramum. Soliches 1 ʒ *ld* vnd *ar* seind gleich dem gantz parallelogramo *ad*, ist der Safran 1 ʒ vnd 35 in numeris. Nun kosten die 12 stucke auch souil, vnd doch jedes jn sunderheit kost souil, als des saffrans gewesen ist, das was *lb* vel *db* geführt in *ab*, macht 12 radices oder ding, wann *bd* ist gesetzt ein ding. Nun ist *ab* 12 mal ein ding, macht 12 radices, die halb seind 6, ist *mb* in longitudine, die in sich selbst, wird *mf*. Dauon zieh die 35, jnmassen oben gesagt, das das halbe thail nach der proposition tripartite mehr vermag in sich dann *ar* ex numeris in dem quadrat *kg*, vnd restat 1 in numeris, des radix ist *lm*, gezogen von 6, *mb*, restat 5, souil des Saffrans lot gewesen, vnd auch die | wecke 19′
haben kost itzlichs *ld* 25 ₰. *mb* 6 zu *lm* wird 7, souil ist der fladen gewesen, haben kost 35 ₰: solchs zusamen macht 60 ₰. Nun die 12 stuckh kost ye eins souil ₰ als der loth gewesen, der was 5 loth *bd*, die seithen des quadrats, in *ab* 12 facit auch 60. Vnnd hat geessen 2 fladen, wann jr zween mehr seind dann der wecke, vnd also haben wir figurlich bewisen vnsere funfte Regel Gebre vnnd Almuchabole.

Nun volget von der sechsten Regel der linea tripartita Ylis des groffen Geometris.

Capitulum septimum de sexta propositione Ylis *lineae bipartitae et tripartitae eiusdemque natura et essentia.*

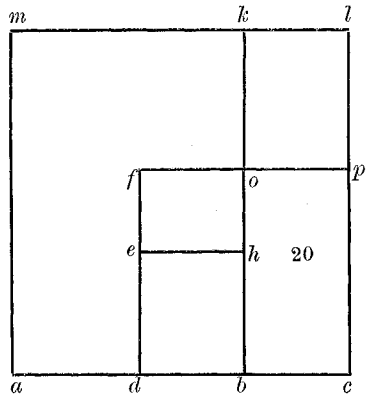
Quod ex bipartita equali in se producitur cum eo, quod ex adiecta in totam tripartitam fit, aequum est ei, quod constat ex adiecta et aequali in se.[1])

Vnnd laut zum teutschen also:

Das dann aus der gleichen gespalten Linien bipartita khomendt mit dem, das aus der Linien hinzugesatzt in die gantze tripartita erwechst, ist gleich deme, das dann geschehet aus der hinzugeworffen vnnd gleichen bipartita in sich gefurt. | 20

Aus diser sechsten proposition haben wir genomen vnser sechste Regel Gebre vnnd Almuchabole. Wir nemen *al* vor einem vnwissenden ziens jn longitudine vnd potentia (Fig. 9), vnd doch wissen wir, das parallelogramum *bl* ist ex numeris 20, und *ak* seind 8 radices in potentia des ziensus. Nun wolten wir gern wissen, was der ziens in numeris were, vnd was seine seithen *ac* in longitudine. Saget vns die proposition, das die bipartita gleich gethailt *ab* sein 8 in numeris, wann *ak* sein 8 radices

1) Euklides II, 6: Si recta linea in duo equalia dividatur, alia vero ei linea in longum addatur, quod ex ductu totius iam composite in eam, que iam adiecta est, cum eo, quod ex ductu dimidie in se ipsam, equum est ei quadrato, quod ab ea, que constat ex adiecta et dimidia in se ipsam ducta describitur.



Sexta equatio.

20′ ℳ + ꝛ ȝ

Fig. 9.

des ziens in potentia: darumb mueffen *ab* 8 sein jn longitudine. Nun war *db*, das halbe tail, 4: saget die proposition, das *db* in sich gefurt mit sampt *bl* 20, das dann 36 macht, sey gleich *de* in sich gefurt. Nun radix von 36, das war *dc* 6 in numeris, so ist *db* 4 gesatzt, wann *ab* waren 8 radices, seind gleich gethailt in *db*. Also so *dc* 6 ist vnd *db* 4, so ist *bc* 2 ex numeris, vnd also were *ad* auch 4, wann ime *db* gleich ist, wann *ad* ist der Linien halbthail mit dem *db* der radix. Nun haben wir *dc* 6 ex numeris, so *ad* der halbe | thail, 4 hinzukhumbt, ist *ac* die gantze Linie in longitudine 10: sprechen wir, der zens ist in longitudine 10 radicum vnd in potentia 100, vnd *ak* seind 80, das sein 8 radices in potentia, vnd *bl* ist 20, das macht 100, vnd *bc* ist 2 jn longitudine, die adiecta, macht 20 in die gantze tripartita *ac*. Vnd also fueget sich wol, solchs auch figurlich einzubilden.

Nichomachus der grofs Arismetrist hatte etzliche Bucher jn Mathematica, die wolten kaufen Aristeus vnnd Apolonius, die zwei grosen Mathematici. Nun bot Nichomachus ein Buch so theuer, souil er der hette. Aristeus sprach: ich hab 20 fl, so hat mein geselle 8 Bucher auch ydes so theuer sam du eins gibst. Wir setzen wahr vmb wahr vnd lassen es
21 gleicher seithen gleich sein. Nun 20 fl, die mein seind, vnd die acht Bucher meines gesellen jn arithmetica, so ist der stich gleich, jnmassen du begerest. Nichomachus der war des zufrede, vnd also khamen sie zu Boetio, dem grosen jnterpreten, der fraget, was sie vmb die bucher geben hetten. Appolonius antwortt: Ich hette 8 Bucher, die stach ich daran, so gab mein Gesell Aristeus 20 fl, vnd souil der Bucher Nichomachj gewesen, so theuer sind die Bucher baider seits eins am stich gegeben, vnnd rath Boetius, was die Bucher gestanden haben, die Nichomachi gewesen seind, vnd wie theuer jtzlichs am stich gegeben worden sej beide seits, vnd wieuil Aristeus vor die 20 fl Bucher nemen soll. Aristeus sprach: Lieber Boetius, du hast nun die maisten Thail in Arithmetica getransferirt, bericht vns, wann ich vnd Appolonius sein zween Geometrici vnd der zaln so grundtlich nicht erfaren, damit mir vmb meine 20 fl recht geschehe. Boetius entsetzte sich vor der Sachen also sagende: Ich bin solcher fragstuckh nicht gegrundt, auch so wiest es mein Arithmetica nicht aus. Jr solt euch Nichomachum haben lassen machen, der do gefunden

hat falsi coniecturae propositionem oder Regula lancis genant.[1]) Also besante ARISTEUS | NICHOMACHUM. Antwortet er: Jch khan vormerken, das 21′
solche frage durch die Errores genant nicht aufgelost mogen werden, vnnd gab jme anweisung an ALGEBRAM. Also sprach ALGEBRAS: Mich befrembt ARISTEUS vnd APPOLONI von euch grosfen geometris, vnd von BOETIO vnd NICHOMACHO, die do weit jn den zaln bekant sein vnd geschrieben haben, das jr kunst do wendet, vnnd soll euch solchs durch mein Gebram vnd Almuchabolam berichten, vnnd doch viel seind, die sich nennen Arithmeticos, zuvormuten die vnd dergleichen frage durch Regulam lancis zu machen NICHOMACHI, durch Ligar, durch Pagamenti vnd durch ander dergleichen noch von jnen gesatzt vnd schwerer hergehenden, vnd sprach: jr saget eigentlich, das NICHOMACHUS hab gepott vnd am stich geben ein Buch so theuer, so uil der gewesen sein. Setzen wir *ac* (Fig. 9) sein die Bucher ein ding, costen *al* den zens in sich, vnnd souil machen auch 20 fl ARISTENJ vnd die acht Bucher APPOLONJ. Nu ist das parallelogramum *bl* 20, vnd souil costen dj Bucher ARISTEI, vnd die zal derselben ist vnwissent in longitudine *bc*. Nun die Bucher APPOLONJ seind 8 jn longitudine *ab*, bipartita linea in equalia gethailt, vnd kosten das parallelo|gramum *ak*, 22
vnd ye eins ist so theuer angeschlagen, alsuil NICHOMACHI Bucher waren, der dann waren *ac*, das was gesatzt ein ding, das waren 8 ding oder Radices, die dann erfullen mit den 20 fl den gantzen zens, dem sie gleich gesatzt sein am stich. Nun saget die proposition, das die 8 radices halb *db* 16 thun in numeris mit *bl* 36 machen gleich *dc* in sich, also ist *dc* radix 6, vnd das ander halbe thail der Radix *ad* darzu ist 10 in numeris. Also waren der Bucher *ac* NICHOMACHI 10, die kosten in potentia 100, den ʒ; die 8 Bucher APPOLONJ *ab* kosten 80 fl, dann jtzlichs cost 10. So nun die gantzen Linien *ac* ist 10 Bucher, vnd APPOLONIUS hat 8, so mus *bc* 2 sein in numeris. Also, freundlicher ARISTENE, due nimbst 2 Bucher vor deine 20 fl, der jtzlichs gleich kost dem stich nach.

Vnd also haben wir bewisen vnser sechste Regel Gebre vnd Almuchabole.

Nun volgen die Propositiones ALGEBRAE Arabis seiner Gebra vnd Almuchabola, die er aus den gesatzten propositionibus Ylis, seines Praeceptoris, gezogen hat, vnd laut die erst also: | 22′

---

1) Hier wird also NIKOMACHUS als Erfinder der *regula falsi* bezeichnet, die später als Erfindung der Araber hingestellt wird, und von ihnen *Itata* genannt sei.

Capitulum octauum de prima propositione ALGEBRAE *in sua Gebra et Almuchabola ex digestis propositionibus* YLIS *enucleata.*

Sunt autem ea, quae sunt in Gebra et Almuchabola, earum, quae fiunt potentia in numeris, unitates rei in longitudine.[1])

Hie hebet sich an das Buch vnd die erste proposition ALGEBRE seins ersten Buchs von seiner Gebra vnd Almuchabola, die er dann anfenglichen hat gezogen aus den gemelten vnnd gesatzten propositionibus YLIS, seines meisters des grossen Geometers, welcher text ALGEBRE zumal schwer ist gesatzt anfenklich berurt, der dann von ALIABRA, den jndischen maister gebessert ist worden[2]), jnmassen wir den jm teutschen auch einziehen wollen, vnd zu seiner zeit lateinisch nach dem deutschen setzen, das man ALGEBRAM teutsch vnd lateinisch haben mag, durch seine propositiones, vnd ALJABRAM seiner spros von jme gesatzt lateinisch, derhalben wir gruntlich der Gebra vnnd Almuchabola gegrundet mogen werden, vnd laut solche gemelte proposition ALGEBRE zu Deutsch also:

Es sind die ding, die do jn der kunst Gebra vnd Almu-
23 chabola sind, vnitates des dings, welcher ding, die do seind | jn der lenge der linien vnd jrer macht jn den zalen absolutis, das ist offenbar gesagt vnd gesatzt.

Von dieser proposition einzufueren sollen wir mercken, das ALGEBRAS hat genomen die vnitates des dings in Gebra vor radices, vnd des dings potentz vor ein zensum, vnd solchs ding vnd zensus seind vrsache der, die jn numeris absolutis gesatzt. Sam also ein jtzliche Lini definite quantitatis in der lenge, die do hat kheinen namen der zalen, vnd doch jre potentz in der zalen ist 25, sprechen wir, das *ab* die linien ist ein vnitas vnd ein ding oder figur der zufindenden zalen; so ich sie in sich fuere, macht ein quadrat, das ist gesprochen bei vns ein zensus, der dann auch vnwissent ist, das ist der tribut von dem ding, das seind 25 jn numeris. Also ist die figur in Gebra der linien *ab*, die do jn der lenge 5 was in numeris vnd in potentia 25 auch in numeris. Vnd hierumb setzen wir jn Gebra allweg ein ding, das ist ein figur der zalen in der lenge, vnnd ein zens, das ist ein figur in potentia der zalen, vnd also sprechen wir, das in Gebra die zal sey absoluta, das ist, das dann offenbar ist der zens vnd

---

1) Im *Codex Gottingensis Philos. 30* ist durch Überschreiben von Zahlen dieser Satz so umgemodelt: „Sunt autem ea, quae sunt in Gebra et Almuchabola unitates rei, earum, quae in longitudine fiunt, potentia in numeris.“ Alle Handschriften stimmen aber in der Fassung überein, die wir aufgenommen haben.

2) Auch hier wieder der Hinweis auf die Verbesserung der Algebra durch die Inder.

radix. Von diesen dreien stucken saget vns die gemelte proposition, das alle stuck in Gebra vnnd Almuchabola seind vnitates des dings, welcher | ding, die do seind in der lenge in der zal vnd jrer potentz in den zalen, 23'
sie vrsach sein, das ist radix vnd ʒ, die do sind vrsach der offenen zal. Also cleret vns die gemelte proposition ALGEBRE der ding, so in der kunst Gebra vnd Almuchabola gebraucht werden, so, in dem so er spricht: unitates rei, das sein vnitates des dings. Als wir vor gesagt haben, das die gemelt linien *ab* was 5 in numeris, vnd doch anfenglich was gesetzt ein ding, also was die erste vnitas *ab* continua eine figur vnd form des dings, das wir wissen wolten in der leng, das was 5, das ding in numeris, vnd 25 in potentia was der zensus *ab* sein form, vnd also haben wir gefunden, das vns not ist, weither zuwissen der ding notturft jn Gebra, das ist des Radix, zensus vnd der zaln der forme, dann radix jn longitudine ist 1, vnd ʒ in potentia. Und nachdem aber die Gebra auf der zalen gegrundt ist, volget von der zaln erstlich das Neundt Capitel.

Capitulum nonum de secunda propositione ALGEBRAE *Arabis in sua Gebra et Almuchabola eiusque expositio.*

Dragma est unitas actualis absoluta, qua numerus collectione in cumulum multitudinis crescit, quae quidem in Gebra et Almuchabola quantitates numerorum vocentur. | 24

Hie saget vns ALGEBRAS von dem ersten stuckh seiner Gebra vnd Almuchabola, vnd laut zum teutschen also:

Dragma, das ist ein bekant gewichte der zaln, das dann genenndt, gezellt vnd gewogen wirdt, in der zaln ist ein vnitas, die so gegenwertig vnbeschwert ist von allen vnbekanten dingen, sonder plos vnd lauter wissent gezelt, genendt vnd geponderirt ist in der zal, damit dann die zal anfenglich erwechst in den Hauffen zusamen gelesen jn die manigfaltigkeit. Welche dragma dann in Gebra vnd Almuchabola werden gesprochen die quantitates der zaln.

Von dem dragma zu reden, jnmassen vns die proposition clertt, nennen wir dragmam vor ein jtzliche wissende zal die do kheine beschwerung hett, das ist das sie weder grosser noch cleiner moge werden. Wann 4, 5 oder 7 oder aber ein andere zal khunen an jr substantz pleiben, des namen khein andern form noch augment noch decrement an sich nemen, als dann radix thun mag. Als ich spreche 4 radices, die mogen jres pleibenden namens quaternarii verendern werden. Wann 4 radices von 144 dem quadrat grosser sein an der zaln, wann von 64, vnd dan noch 4 radices allenthalben genent

werden, vnd hierumb werden gesagt, das Radices numeri respectivi seind,
24′ | jnmassen hernach volgt. Aber dragma sein an jm selbst plosse zaln gesprochen in Gebra vnd Almuchabola, vnd darumb die Arabi dragmam setzen, das dann ein pondus ist, als man noch in den Apotecken gebraucht, was gewonheit bey jnen zu der zeiten, das sie alle jre tribut, zins vnd geldt durch gewicht in bezalunge namen, vnd was dragma bei jnen das gewonlichste gewichte der zalen vnter dem Volke. Hierumb noch gebraucht werden in den Apoteck, wann zu den zeithen Galeni vnd Hipocratis was khein gewenlicher gewicht bei den Arabis dann dragma, das dann mit seiner besondern figuren hernach volgent wird bezeichent also ℋ.[1]) Es sprechen bei vns etzliche, dragma werde genomen vor eine gemeine muntze der moneten, als guldenn, pfennig. Sagen wir auch nach vnser Gebra vnd Almuchabola, das Dragma billicher hie werde genomen vor ein pondus, dann vor eine moneten. Vrsach ist die: wann eine jtzliche monet mag geheisen werden mit mehr vnitatibus dem Radix gleich, wann ein gulden ist ein monet, vnd gulde dragma der gilt mer groschen dann eine silberne vnd dragma pfennig geltt, vnd werden doch beide dragma genent. Das ist dragma nicht der apotecker oder Arabischen, dann sie nennen dragma das pondus nach gemeinen lauf in der zaln der granen, die dann gewenlichen
25 bei allen volckern ein gewicht, ein zal | vnd ein schwer haben, vnd hierumb hat Algebras gesagt dragmam, das dann ein vnveringklich pondus ist, wann 1 ℓ, 1 ℥, 1 lot vnd dergleichen sind bei allen Nationibus nicht in gleichen brauch oder pondus. Alsdann ist dragma, das dann vnverruckt bei allen nationibus gebraucht wurdet, wann es nach den granen genomen vnd abgeponderirt wirdet, damit die Regel sanative der Medici in einer form gehalten mogen werden, inmassen die von Auicenna, Galeno, Hypocrate, die alle Arabes gewest seind, beschrieben sind. Vnd der vrsach, das khein zal mocht besser gesprochen werden jn pleibenden wesen, dann durch dragma, hat sie Algebras angenomen mit den Arabischen Ertzten gleichmessig jn seiner Gebra vnd Almuchabola zu gebrauchen, vnd haben wir also geclert das erst gebrauchendt stuckh jn Gebra, das ist dragma. Nun volget von dem ding, das wir radicem nennen, das zehente Capitel.

Capitulum decimum de tertia propositione Algebrae *Arabis in Gebra et Almuchabola eiusque expositio.*

ꝛ *Res est substantia numeri impregnata unitatibus longitudine, qua census in potentia crescit. ipse namque et causae in coniecturationibus*

---

1) Das Zeichen ℋ für Dragma wird in den Dresdner Handschriften Φ geschrieben.

quaestionum radices quedam nomine totius numerorum geniturae appellare ceperunt.[1]) | 25′

Hie saget Algebras von dem andern stuck seiner Gebra vnd Almuchabola, das ist von dem ding oder ℭ, vnd laut zum Deutschen also:

Das ding ist ein substantz, die do geschwengert ist mit den vniteten in der zal zu gebern durch die leng einer linien, welcher linien lenge der ʒ mit macht erwechst, vnd solche gesatzten ding jn unser Gebra vnd Almuchabola seind vrsach der zal zu finden in den fragstucken. vnd sie haben genomen den namen radix, das wir rem nennen, radicem, das ist eine seiten oder leng des quadrats, die do vnwissent genandt ein ding ist, vnd solcher ding gemelter Gebra vnd Almuchabola seind erstlich vrsach aller geberenden zalen durch die leng der Linien.

Von diser proposition Algebre zu nemen einen schrifftlichen sin, so haben wir vormals gesagt, das ein ding mag grosser vnd cleiner genomen werden vnvorrucktes namens. Als wir setzen 4 radices, das sein 4 ding, in der leng von 144, die seind grosser dann 4 radices von 64, vnd seind doch in longitudine, das ist in der seithen des quadraten, ytzliche vor ein ding gerechent, vnd wie wol die vier ding von 144 in der leng geschwengert sein, wann jtzlich | ding hat zu gebern 12 vnitates in numeris, 26
also desgleichen von 64 sein 4 ding ytzlichs 8 vnitates zu gepern. Vnnd hierumb nennet Algebras rem ein geschwengerte substantz der zalen, die do geschwengert ist mit unitates in der lenge in numeris gegen den zensus zurechnen in numeris. Vnd hierumb mogen wir setzen ein ding, das zu gepern hat vnitates jn der zalen, vnd das nennen wir radicem oder rem, von welchem dann zu gebern muglich ist alleine zaln, jnmassen wir dann angezaigt haben. Welchs dann mit besondern zaichen wirdt figurirt jn nachvolgenden Capitel. Wann vrsprunglich der grundt zu fassen, es were ein quadrat vnwissent gesatzt *abcd* (Fig. 10), das sein, *ab* wer vnwissent. Nun nach vnser Gebra vnd nach rechten verstandt, so wirdt genandt *ab* eine Lini schwanger, ein ding, das do tragen mag alle zalen, wann dem ʒ ist noch kheine aufgelegt, vnd gleicherwis das *ab*, das einige ding in der leng geschickt zu gepern ein

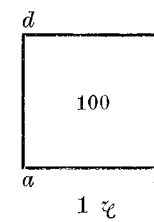


Fig. 10.

1) In der Handschrift *C. 8* ist der Wortlaut dieses Paragraphen durch übergeschriebene Zahlen in folgender Weise berichtigt: „Res est substantia numeri impregnata unitatibus, qua census longitudine crescit in potentiam. Ipse namque est causa totius geniturae numerorum in coniecturationibus numerorum. Nomine quidem radicem appellare ceperunt.“ Das stimmt auch mit der deutschen Übersetzung besser überein.

jtzliche zal, also ist auch der tribut des dings zu wagen in pecunia eine jtzliche zal, die jme aufgelegt ist oder wurde. Nun legen wir auf den
26′ zens | 100 dragmas argenti, so were *ab* das ding in longitudine, beschwerdt mit 10 vnitatibus in numeris. Legen wir dann auf der Linien 9 in numeris, so ist der tribut 81 dragmas, also were das ding in longitudine 9 in numeris vnd 81 in potentia. Vnd solchs ist der vorstandt in vnser Gebra, das wir nennen cosam, das ist ein radix oder res gesaget. Nun folgett das eilfte Capitel von dem dritten stuckh, das ist vom zenso.

Capitulum undecimum de quarta propositione Algebrae *eiusque expositio.*

ʒ *Zensus est potentia radicis in se descripta, qua res longitudine in superficiem ab aequalibus ad aequalia pariendum numerum denudanda crevit.*

Hie saget vns Algebras von dem dritten stuckh seiner Gebra vnd Almuchabola, das ist von dem zens, vnd laut zum deutschen also:

Zensus ist ein Macht des radix in sich gefurt, welcher macht das ding in der lenge gesatzt in einem superficiem von gleich zu gleich ist gewachsen, vff das do wurde entplöst die geberende
27 zal, von der wegen dann das ding gesatzt was. |

Diser proposition einen vorstentlichen schriftlichen sin einzufueren, so gibt vns die proposition zu verstehen, was ʒ sey in vnser Gebra vnnd Almuchabola, saget, das zensus sey, dadurch das ding oder den radix in den superficiem quadrieren in sich gefurt etlicher weyse. do ein ding, das do einig ist, so dasselbig gesatzet oder geschatzet wird in dem werdt, oder jm selbst gleich, so ist das sein zins oder tribut, vnd wird bey vns genandt gleicher weis als ein geldt des dings, wann ein jtzlich ding in der weltt nicht hoher khan gewirdigt werden oder verkaufft, dann alsuil als an jm selbst geachtt. Also wird ʒ pej vns genandt als ein Tribut des dings, wann ein mas verschlossen jn einem vafs zuverkauf wird geacht als ein vnwissent ding. Nun solchs am einem valorem vnd werdt anzuschlagen, das es werdt were, antworten wir nach vnser Gebra vnd Almuchabola, das es nit hoher khan verkaufft werden, dann vmb sich selbst, dann ein jtzlich ding ist sein selbst werdt, vnd also ist derselbig werdt bei vns gesatzt ein ʒ, das ist ein guldt oder valor des dings. Dann ein ding, das do vnbekannt ist, khan keiner zal zugeeigent werden der guldung dann das ding selbst. Nemen wir vor, solchs besser zu bedeuten, damit wir
27′ grundtlich bericht werden, | was der ʒ in vnser Gebra sey: Es kauft einer vom andern ein buch umb ein gelt zu bezalen vff etlich zeitt. So die verscheintt, hat er des gelts nicht, damit er bezalen mag, wirdt jn allem rechten ertheilt, die weil das Buch nicht geergert worden ist, das er sich

mit seinem gut mus wider bezalen lassen. Also solche Bezalunge wirdt bej vns gesprochen ein ziens, das Buch mag 1000 fl haben golten, vier oder funf, noch dennoch ist der ziens oder bezalung recht wider mit dem ding, vnd also hastu vorstentlich, das do erstmal seinen vniteten nach wirdet das ding in longitudine gesatzt, vnd alsdann sein valor, das ist in potentia, angeschlagen so hoch, als es an jm selbst ist. Wir mogen auch den gemelten zensum nennen ein quadrat, der do von gleicher lenge zu gleicher lenge ist erwachsen, jnmassen vns die proposition weyset. Aber so verstentlich zu begreifen, ist es schlechten menschen zu dunckel, vnd hierumb nennet es ALGEBRAS zensum. Vnd also haben wir clerlichen, das do radix gepirdt zensum, vnd die zwey geberen vnitates in numeris. Nun volget von der eigenschafft diser dreier stuckh, dragma, radix, zensus das 12 capitel.

Capitulum duodecimum de quinta propositione ALGEBRAE *eiusque expositio.* | 28

His itaque dispositis, in Gebra ordine, quo sibi succedunt signis non numero, omnis superficierum et solidorum series inseritur, atque cuilibet proportionati continue inmutabiliter communicet.

Nach gemelten dreien stuckhen saget vns ALGEBRAS von diser proposition, vnd laut zum deutschen also:

Die do sind in Gebra also geordnet der ordnung, als sie nacheinander volgendt der zaichen nit mit der zal, in solcher ordnung wird angezaigt die nacheinander volgung thun alle zalen der superficien vnd solidorum, auch welche Ordnung einer yeden proportionalitet vnverruckt gemeine ist.

Inmassen wir die cleren wollen, zum ersten sagt die proposition: so die gemelten drei stuckh werden gesatzt in der ordnung, der sie dann nacheinander volgendtt mit den zeichen, sagen wir, das zum ersten ist gesatzt dragma, die wir bei vns figurlich schreiben ℳ, ϕ, welcher dann in der ordnung vorbeschrieben volgt der Radix, den wir figurlich signiren ꝛ[1]), solchen volget nach der ʒ, von welchem wir gesaget haben, der do entspreufst aus den ꝛ in sich gefurt. So nun solche drei zaichen ℳ, ꝛ, ʒ jener ordnung, wie dann angezaigt, gesatzt, | so entspringen aus jnen alle 28′
andere nachvolgende zaichen, nicht der offen zal not zu sein, wann sie allein proportionaliter dinet jn der zaln. Wann wir wissen, das jn dreyen zaln die extremi quadrati sein vnd im vierten cubi, jm funften ʒ de zenso,

1) Das Zeichen für *res* also ꝛ ist in der Göttinger Handschrift geradezu ein geschriebenes deutsches *x* (ꝛ), so dass also die Entstehung von *x* aus diesem Zeichen sehr wahrscheinlich ist. Das Zeichen für *census* ist ebenso ein deutsches ʒ; es wird ja auch mit *zens* oder *ziens* identifiziert.

vnd so sie also fortpas gesatzt werden die obgemelten signa, so machen sie bedeutlich die natur aller proportionen. Also wir setzen wollen duplam proportionem continuam in numeris, sehen wir, das der dritt in der ordnung der proportionalitet continua ein quadrat ist, der viert ein cubus, der funfft ein zensus de zens. Aber die gesatzte proportion dupla dienet allein, soweit sich jr zal ausspannet. Aber die | proposition mit den signis gesatzt,
29 die ist allein proportionaliter dienen, wann in einer ytzlichen proportionalitet continua werden die nomina der superficien zalen vnd solidorum vnuerruckt gehalten. Es ist auch in disen signis nicht anderst zu halten, dann wie es jn andern continuen proportionaliteten gehalten wirdt, also das die speties continua, disiuncta, eversa, permutata etc. gehalten werden. Wann gleicherleiweyse die proportion ꝛ̈ ist ad ʒ, defsgleichen ist ʒ ad cubum vnd ꝛ̈ ad ʒʒʒ; darumb auch ꝛ̈ ad ꝛ̈ sam ʒ ad ʒʒʒ, vnd dergleichen der andern signa, die wir dann darstellen haben in ꝛ̈ꝛ̈, vber den nicht not ist zugehen, jnmassen hernach die vrsach ereugen soll. Ist auch von Algebra weither nicht gesetzt dann durch diese drei Zeichenn ℋ, ꝛ̈, ʒ, die dann continue proportionales sein, vnnd aus jn entspringen alle nachvolgende signa mit jren caractern geschrieben, jnmassen bei vns gewonheit ist vnnd angezaigt. Bin auch guter zuversicht, ein yeder fleissiger schuler, ehe vnd er auch anheb vnsere Gebra, jm sollent vorhin bekant sein die proportiones, proportionalitates vnd medietates numerorum. Wann vns
29′ die ding alle einzufueren wurde sehr weitleufig, | vnd darumb allein einzufueren, was vns in Gebra vnd Almuchabola not ist, setzen wir bedeutlich caracteres gemes den superficien vnd corporibus, vnd, wie die erwachsen angezaigter continua proportionalitate, wollen wir satzen vnnd aufsdrucken jn nachuolgendem Capittel.

Dragma	ℋ	1
Radix	ꝛ̈	2
Zensus	ʒ	4
Cubus	ꝛ̈ꝛ̈	8
Zensus de zenso	ʒʒʒ	16
Sursolidum	ß	32
Zensi cubus	ʒꝛ̈ꝛ̈	64
Bissursolidum	ßß	128
Zensus zensui de zenso	ʒʒʒʒ	256
Cubus de cubo	ꝛ̈ꝛ̈ꝛ̈ꝛ̈	512

Capitulum tredecimum de sexta propositione Algebrae eiusque expositio.

ꝛ̈ꝛ̈ *Cubum, quem primum radix in censum produxit, ipse quidem ab aequalibus per aequalia ad aequalia soliditetur et in altitudinem crescit, regularissimum omnium corporum, quo solo et tetragono superficie vel planitie eius cuncta metiri habent.*

In hienachgemelten stuck saget ALGEBRAS, was ꝛ[1]) sey, vnd laut zum deutschen also:

Cubus, den do erstlich pflantzet radix durch den zensus, der erwechst von gleicher leng durch gleich gleichlich in die hohe, vnd ist das aller richtigte corpus vnter allen andern corpora, mit welchen allein vnd dem quadrat, der sein planum ist, damit er wechset, alle corpora gemessen werden. | 30

Sollen wir wissen vnd aufmerkung haben, das der cubus wirdt gebraucht in Gebra gleichmessig erstlich durch den ꝛ gesatzt ein ding, welchs so das in sich gefurt wirdt, erwachst der zens, so dann der noch einmal in den zens gefurt wirdt, erwechst cubus, darumb mus man hier hinen gebrauchen das ꝛ cubice, jnmassen dann hernachmals volgen wirdtt, dann er hie alleine mit seinem signo, vnd nicht mit wissender zaln, gleich wie der zens, gebraucht wirdt. Sie haben auch ꝛ vnd ʒ einen ꝛ, jnmassen die proposition sagett, das des ꝛ planicies sey der tetragonus, welcher seiner seithen in plano, der ꝛ in altitudine erwechst: Darumb spricht er: *ab aequalibus ad aequalia aequaliter soliditetur et in altitudinem crescit,* vnd dergleichen sein alle, die do wachsenn in gleicher proportion, wann ℋ ad cubum in gleicher proportion als ꝛ gegen ʒꝛ, also auch ꝛ gegen ʒʒ, als ʒʒ ist gegen bißß, und seind alle in den radix cubica, jnmassen dann die gesatzte figur der signa ausweist, die deme einem ytzlichen ℋ ist gemes, das du dann mit einer zal hast zu vorsuchen, die dann continua proportionalis ist, dabei du erkennen mogest die proportion der zalen gegen den signa. Vnd von dem cub wollen wir, zur zeit den Algorismus setzen, bas ercleren, wie er in der zal sol gebraucht werden. | 30′

Capitulum decimum quartum de septima propositione ALGEBRAE *eiusque expositio.*

Census de censo ipsum est quadratum quadrati, cuius radix contra cubum ducta, vel census in se, a solido in planitiem relabata quadratura. ʒʒ

Hie volget von dem ʒʒ, der dann erwechst von dem radix in den ꝛ gefurdt oder aus dem ʒ in sich selbst gefurt, vnd laut zu vnserm deutschen also.

Zensdezens, das ist ein quadrat von einem quadrat, des radix wirdt gefurt wider in den ꝛ, oder der zens in sich selber, vnd wirdt genant ein quadratura, die do khumbt von solido gefallen in die planitiem.

---

1) Das Zeichen für den *cubus* ist das Anfangs-*c* mit darangehängter Endsilbe *us* (9), die der Bequemlichkeit halber umgekehrt geschrieben ist (ꝛ).

Wann ein jtzlich corpus, so das in sein radicem gemultiplicirt wird, erwechst in den plan, vnd darumb kumbt ʒʒ von cℓ in seinen ꝛ gefurt, oder aber aus dem quadrat in sich selbst gefurt, vnd wirdt genandt zensdezens regularis Gebrae. Wann gleicherweis ʒ radicem hat, also hat ʒʒ radicem radicis quadratam vnd wirdt von den superficien in plano gemelter proportion der signa gefunden. Defsgleichen cubus de cubo wirdet regulare Gebre von den corporischen zalen, wann er radicem cubicam hatt. Von den zweien wir dann aus dem zenso die superficien vnd aus dem cubo die
31 corpora reguliren, darumb ist | ʒʒ regulatiuum der superficien aus ʒ, vnd cℓℓ der corpora aus cℓ, vnd wirdt hie auch gebraucht mit den zaichen zu coniecturiren, jnmassen wir dann vormals rem oder radicem gesatzt haben. Denn, so wir setzen in vnser Gebra 1 ʒʒ, das ist, das zu viermalen jn die multiplication ist gegangen vnd von dem radix zum vierten mal prolongirt ist, dann 16 ʒʒ ist zu 2 mal 2 vnd zu 2 mal 2 von 2 dem radix wirdt geweitert werden, darumb heisen wir es quadratum de quadrato, des radix ist von dem ꝛ radix. Als von 16 ist 4 radix, von welchen 4 ist radix 2, also ist radix des ʒʒ 16 in der zal 2, welches zensdezens, so wir erstlich ein radix gesetzt haben, das ist ein ꝛ wer 2, valor des dings in numeris, vnd das ding wer 2 vnd sein ʒʒ wer in numeris 16. Vnd also ist auch jm cubo vorgesatzt, ꝛ cubica ist das ding etc. vnd defsgleichen auch in den nachuolgenden Signis als ß vnnd ßiß aigentlich aufsdruckt wirdt. Volget von dem sursolido vnd bissursolido das 15 Capitel.

Capitulum decimum quintum de octava propositione Algebrae *eiusque*
31′ *expositio.* |

ß, ßiß *Sursolidum simul et bissursolidum ductiones quedam radicum contra soliditatem, quae a corporeitate in planiciem et ab eadem in eandem irradicabilem recedunt. Ipse enim radicem gerunt non censicam, non cubicam, sed quo tunc loco ductione a radici alterari ceperunt.*

Hie saget Algebras von den sechsten vnd achtenn signo, das ist von dem sursolido vnd bissursolido, vnd laut zum deutschen also:

Sursolidum vnd bissursolidum seind fierung etlich der radix wider die soliditet, welche dann von den corporischen zalen in die plan, vnd von der plan wider die corporischen zalen vngeregulirt fallen oder wachsen, wiewol sie radices gepern vnd haben, haben aber nicht quadratam noch cubicam, sundern dann der fuerung jrer stadt, so weit sie dann von den ꝛ erstlich sein ausgezogen oder gegangen.

Von disen signis sursolidi vnd bissursolidi laut der proposition werden

hiemassen gesatzt von ALGEBRA, sam die vorgemelten signa gesatzt seind worden zu coniecturirn in Gebra vnd Almuchabola, vnd wiewol sie kheinen radicem regulirn nicht haben, als cubicam oder tetragonicam, noch auch nicht radicem ȝȝ | doch so werden jre radices genant an der statt, so weit 32
die dann von dem ersten radicem gewandert haben, als sursolidam vnd bissursolidam, von welchen dann zu irer zeit zu extrahirn wir sagen werden in vnserm andern Buch, wann die zwei signa vnter allen signis exempt vnd ausgenommen seindt. Hierumb spricht die proposition: *irradicabilem,* id est, non regularem, wann alle andere signa mogen durch gesatzte extraction der radix volfurt werden, jnmassen durch maiores nostros vnd vnsere vorfarn gesatzt sein als radix ȝcℓ, quasi ein cℓ des ȝ. Dann radix cubica von 64 ist 4, das ist der zens, des ist 2 sein radix. Gleich ist auch zugesprochen radix ccℓ von 512 ist 8, vnd radix von 8 ist 2, vnd also seind dise signa gegrundett auf die corpora vnd superficies, die da radicem haben, jre latera secundum proportionem duplicatam et triplicatam. Wann die superficienn haben die proportion gegen jren latera proportionem duplicatam, vnd die corpora triplicatam, aber die zwei signa supersolidum vnnd bissursolidum, als 32, das dann sursolidum ist, seind exempta, dann sie haben quintuplicatam vnd septuplicatam laterum vnd gleichwol 2 vor jren radicem, als 64 ȝcℓ oder 512 ccℓ. Aber allein, das | der nicht ge- 32′
regulirt ist vnnd in vsu oder gewonheit der schlechten Arithmetic nicht ist, dann wir von disen radicibus sonderlich werden sagen, zuerfordern jre radices, als dann die proposition saget: *radicem gerunt* etc. Also nennen wir jre gemelten radices sursolidam vnnd bissursolidam, wann die durch funffte vnd sibende multiplication von dem radix aufsgewandert haben, jnmassen ȝȝ der vierten Multiplication extendirt ist von dem ꝛ̃. Auch soltu mercken, das die zwei signa werden hierumb genant sursolida, das ist surda solida, dann sie entspringen aus den corporibus vnd superficiebus zusamen gemultiplicirt an surdischen vnd irrationalischen section als an der funfften vnd siebenden stadt der Multiplication. Nemen wir 4, das ist ein quadrat vnnd superficies, vnd nemen 8 den cℓ. So wir nun sprechen 4 mal 8 ist 32, das khan nicht haben ꝛ̃, dann proportio corporum ist sesquealterirt gegen den superficiem, wann duplicatum vnd triplicatum seind sesquialteri, welcher dann weder duplicata noch triplicata ist. Vnd desgleichen bissursolidum. Von 8 das dann ist cℓ vnd 16, | das dann ist ȝȝ, wirdt 128, das dann 33
auch kheinen regulirten radicem hatt, sondern sursolidam. vnnd von solchen ductionibus wirdt noch vil demonstrirt, indem man findet, das sie gleichermas 2 pro radici ß̃ vnd biß̃ haben, jnmassen die andern regularen signa in der figura gesatzt ȝcℓ, ȝȝȝ, ccℓ.

Capitulum decimum sextum de nona propositione ALGEBRAE *eiusque expositio.*

ȝcℓ, ȝȝȝ, ccℓ *Caeterae namque ductiones regularem quandam compositionem superficierum duplicatae vel corporum triplicatae proportionis laterum habent mutuo (scilicet inter se corpus ad corpus, superficies ad superficiem), vero quemadmodum laterum atque superficierum aut corporum atque superficierum ad invicem constabit sesquialtera nota proportio.*

Hie saget ALGEBRAS von den andern dreien seiner zal ȝcℓ, ȝȝȝ vnd ccℓ, vnd laut gemelter text zum Deutschen also:

Die andern signa vnd fuerung oder multiplicirung der zalen, die haben eine geregulirte satzung mit zwei lateribus als die superficien duplicata jrer latera, die corpora triplicata jrer laterum, aber so die vnnereinander jtzliche proportionirt wirdt
33′ oder werden, als | latus gegen andere laterum, oder linien gegen linien, superficies gegen einem andern superficie oder Corpus gegen einem andern corpore, so ist ein Latus gegen einem andern latus als ein simpel linien gegen der andern. Aber ein superficies gegen dem andern ist als der latera duplicata, das ist in sich gemultiplicirt; der corpora proportio ist als der latera getriplicirt. Also ist zu concludiren, das ein corpus gegen den andern ist mit jren superficien in solido, als ire superficies der corpora gegeneinander in plano. Auch so ist ein superficies gegen den andern duplicata, in welcher dann die proportion der laterum gegeneinander ist in longitudine duplicata. Aber so man proportionirt ein corpus gegen einem superficien, das ist sesqualterirt. Wann duplicatum ist der superficien vnd triplicatum der corpora; so man nun

1 ꝟ
2 · 3 ꝛ
4 · 6 · 9 ȝ
8 · 12 · 18 · 27 cℓ
16 · 24 · 36 · 54 · 81 ȝȝ
32 · 48 · 72 · 108 · 162 · 243 ß
64 · 96 · 144 · 216 · 324 · 486 · 729 ȝcℓ
128 · 192 · 288 · 432 · 648 · 972 · 1458 · 2187 biß
256 · 384 · 576 · 864 · 1296 · 1944 · 2896 · 6374 · 6561 ȝȝȝ
512 · 768 · 1152 · 1728 · 2592 · 3888 · 5782 · 12748 · 12922 · 19683 ccℓ[1])

1) Unter diesem Dreieck steht in *C. S* die Unterschrift: „Figura omnium ductionum, superficierum, solidorum et proportionalitatum.“ In den beiden andern Dresdner Handschriften fehlt die Zusammenstellung vollständig.

duplicatum vnnd triplicatum zusamen rechent in der proportion, so seind die sesqualterj, das seind sursolidi vnd bifsursolidi.

Von disen dreien signis den text gleichmessig dem vorstandt einzufuren, nemen wir vor vns ʒcℓ als 64, der dann ist ein zens des cℓ 8, welcher dann 8 hat vor sein latus rationale vnd wirdt geheifen ʒcℓ, wann sein duction an der sechst stat ist vnd hat gemeinschaft | mit dem cubo 34
vnd zens. Mit dem cubo 8 dann der cℓ 8 wirdt aus dreien duplen, so wirdt diser aus 2 mal 3 duplen. Also von wegen der drei duplat hat er gemeinschafft mit dem Cub von 8 des ꝛ ist 2, der hie mit 6 duplen geduplicirt wird, das ist 4, also ist ꝛ von 64 cubica 4, des vrsach ist 64 ein cℓ des ʒ 4. Es wirdt auch genandt cℓʒ, das ist cubizens von wegen der 6 dupla. Wann der ziens wirdt aus zweyen dupla, so ist das zu dreimal zwey. Also mit dreien duplen wer es 8, vnd aber mit zwir 8, das wer 8 mal 8, das wer 64, von wegen der 2, vnd also ist es regularis ductio, wann es hat duplicatam proportionem mit 8 superficien vnd mit 4 dricorpora, welcher radix cubica von 8 vnd zensica von 4 gleich sein in 2. Aber ʒʒʒʒ, die achtest duction aus von 2 dem radix, entspreufst aus 8 duplen vnd hierumb, das ʒʒ mit 4 duplen erwechst, vnd diser mit 8, wird duplicatum, also ʒ de ʒʒ, 256, wann 256, das ist ʒʒ die achtest duction von 2 aus; des radix ist 16, das ist ʒʒ; des radix radicis 2, vnd hat also dise duction eine geregulirte proportion mit den superficien. Von dem letzten signo ccℓ das | ist cubus ab cubo, welcher dann die neundte auf- 34′
furung ist von dem radice, wann der aus den neun duplen khumbt. Nun 9 duplum das ist triplum triplati, wenn aus drei duplen wirdt 8, aus den andern auch 8, aus den dritten auch acht, das ist 8 mal 8 zu 8 mal ist 512. Des Radix radices cubica ist 2, vnd das letzte signum in gemelter Gebra ist auch regulare mit den Corporen, vnter welchen alle signa ß vnnd biß khein regulirt convenientz nicht haben, dann sie quintuplicatam lateram haben vnd septuplicatam, welche proportion khein convenientz haben mit den corporibus, wann sie weder duplicata noch triplicata seint vnnd an surdischen stetten gesatzt werden, inmassen darnach jn vnserm dritten buch von jren radicibus gesagt wirdt.[1])

Nun volget das 17 capitel Algebre von den vergleichungen, welche dann entspringen aus jetzt gesatzten Zeichen.

---

1) Die von unserm Verfasser angewendeten Zeichen sind also folgende:

	ℳ,	ꝛ,	ʒ,	cℓ,	ʒʒ,	ß,	ʒcℓ,	biß,	ʒʒʒ,	ccℓ,
das ist	x^0,	x^1,	x^2,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	x^8,	x^9.

Capitulum decimum septimum de decima propositione ALGEBRAE *eiusque expositio.*

35 *Omnium ductionum ordinis proportionalis descripti | octo aequationes Gebrae et Almuchabolae invenimus, quarum quaelibet signis ad duas aequales restaurando vel minuendo partes reducitur.*

Hie saget ALGEBRAS was vor Equationes entspringen aus vorgesatzten Signis vnd ductionibus, vnd lautet zum teutschen also:

Von allen fuerungen oder multiplicirungen der proportionalischen satzung der signa vorbeschrieben finden wir acht aequationes Gebre vnd Almuchabole, welcher equationes jr jtzliche mit vorgemelten signis zuthailen, das ist zu zweien gleichen thailen bracht wirdt mit gebung oder nemung der affirmirung vnd negirung, jnmassen hernach volgen wirdt zu seiner zeit der equationes demonstrationes einzufueren.

Welchs aber werden die gemelten equationes, wollen wir dir ordine setzen.[1])

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{H}\\ \mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}\\ \mathfrak{c}\\ \mathfrak{z}\mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}\mathfrak{c}\\ \mathfrak{b}\mathfrak{i}\mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}\mathfrak{z}\mathfrak{z}\end{array}\right\}\text{aequatur}\left\{\begin{array}{c}\mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}\\ \mathfrak{c}\\ \mathfrak{z}\mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}\mathfrak{c}\\ \mathfrak{b}\mathfrak{i}\mathfrak{z}\\ \mathfrak{z}\mathfrak{z}\mathfrak{z}\\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}\end{array}\right.$$

35′

Die erst equation der gemelten signa ist, wann zwei einander vergleicht werden, die nach ordnung der proportionalischen Satzung nacheinander volgen, vnnd khein Intermis gesetzt wirdt, vnnd seind hie gesatzt die signa diser equation. Wann jre proportion ist inmassen | $\mathfrak{H}$ vnd $\mathfrak{z}$ gegen einander gesatzt, das wir vns dann haben zubewaysen jm 12. capitel, wann sie continui proportionales seind, hierumb mus sein $\mathfrak{H}$ gegen $\mathfrak{z}$ als $\mathfrak{z}$ gegen $\mathfrak{z}$, vnnd hierumb wirdt die erste equation genant, wann ein signum dem negstvolgenden vergleicht wirdt.

---

1) Die von unserm Verfasser aufgestellten Gleichungen sind in neuerer Bezeichnung folgende:

I) $ax^n = bx^{n+1}$, $n = 0 \ldots 8$; II) $ax^n = bx^{n+2}$, $n = 0 \ldots 7$;

III) $ax^n = bx^{n+3}$, $n = 0 \ldots 6$; IV) $ax^n = bx^{n+4}$, $n = 0 \ldots 5$;

V) $ax^n = bx^{n+1} + cx^{n+2}$, $n = 0 \ldots 7$;

VI) $bx^{n+1} = ax^n + cx^{n+2}$, $n = 0 \ldots 7$;

VII) $cx^{n+2} = ax^n + bx^{n+1}$, $n = 0 \ldots 7$;

VIII) $\left.\begin{array}{l} ax^n = bx^{n+2} + cx^{n+4} \\ bx^{n+2} = ax^n + cx^{n+4} \\ cx^{n+4} = ax^n + bx^{n+2} \end{array}\right\}$, $n = 0 \ldots 5$; $\left.\begin{array}{l} ax^n = bx^{n+3} + cx^{n+6} \\ bx^{n+3} = ax^n + cx^{n+6} \\ cx^{n+6} = ax^n + bx^{n+3} \end{array}\right\}$, $n = 0 \ldots 3$;

$$\left.\begin{array}{l} ax^n = bx^{n+4} + cx^{n+8} \\ bx^{n+4} = ax^n + cx^{n+8} \\ cx^{n+8} = ax^n + bx^{n+4} \end{array}\right\}, \quad n = 0, 1.$$

ℳ ꝛ ʒ cℓ ʒʒ ꝑ ʒcℓ ƀiꝑ	aequatur	ʒ cℓ ʒʒ ꝑ ʒcℓ ƀiꝑ ʒʒʒ ccℓ

Die ander vergleichung ist, wann zwei signa durch das mittel vbergangen einander werden vergleicht vnnd auch nach ordnung nacheinander volgenden egesatzten proportionalischen satzungen, welche satzung vorgleicht wirdt dem superficie. Wann die erst gesatzte regel vnd equation ist vorgemelt, hat die natur der linien, wann sie khein intervallum hat, das ist khein jntermission, sondern continue volgendt in forma der linien. Aber dise gesatzte hat ein Intervallum jn forma der Linien eins signums, welchs nach ordnung vbergangen wirdt, jnmaſsen die figur clerlich auſsweist durch die signa.

Die dritt equation ist, wann do zwei signa vbergangen | werden 36
jn ehegemelter satzung oder proportionalischen ordnung. Solchs hat die

ℳ ꝛ ʒ cℓ ʒʒ ꝑ ʒcℓ	aequantur	cℓ ʒʒ ꝑ ʒcℓ ƀiꝑ ʒʒʒ ccℓ

natur der corpora, welche dann zwei jntervalla haben oder media proportionalia. Solchs wirdt dann durch den cℓ volfurt, als vnsere dritte equation verlautern wirdt, dann sie seind alle proportionalia. hierumb mus die proportion sein ℳ ad cℓ als ꝛ zu ʒʒ, zwischen welchen dann allemal zwei signa jntermis sein vnd alwegen proportion der corporen ist. Wann, so wir setzen ein comutabilen numerum der proportionen, jnmaſsen wir jm 12 Capitel gesagt haben: So dragma, das ist ein vnitas actualis, wirdt vorgleicht 8 cℓ, wird von not corpus gegen corpus geproportionirt, darumb sein corpora, die proportion triplicata latera haben. hierumb radix cubica von 8 wirdt nach der equation werden valor. So wir nun ꝛ gegen ʒʒ proportioniren, das ist 2 gegen 16, wirdt aber die gemelte proportion gehalten, in welcher satzung vntermischt ist ʒ vnd cℓ, das der form der dritten equation, jnmaſsen die figur auſsweist.

Die vierdt aequation wird vorstentlich aus disen signis gezogen, so dann drei signa werden intermittirth | jn gemelter ordnung der propor- 36′
tionalischen satzung, vnd diese aequation wirdt auch dem superficie vor-

ℳ ꝛ ʒ cℓ ʒʒ ꝑ	aequantur	ʒʒ ꝑ ʒcℓ ƀiꝑ ʒʒʒ ccℓ

gleicht; wann so ℳ wirdt vorgleicht ʒʒ, werden drei signa intermittirt, vnd radix radicis quadrata ist der valor. Vber disen saltum diser dreier signa ist nicht gewonheit, wann so mann transgressum hat vber 4 signa, so kheme radix vf sursolicam, der dann bei vnsern Arithmeticis jn gewonheit vnd brauch nicht ist. vnd wie wol wir von dem jn vnserm dritten buch sagen werden mitt einfurenden demonstrationibus, lassen wir das hie zur zeit pleiben vnd wollen transgressive hiemit eingezogen haben, die do durch ordnung der

ductiones vnd ordnung multiplicationis geschehen mögen. vnd so wir nun transgressum hetten mit sechsen signa, so erheischt nott, das ℋ mus sich vorgleichen biß, welchs radix bifsursolica ist valor, vnnd also dergleichen wollen wir hiemit eingebracht haben. Wie die signa gemelter equation stehen sollen weist aus die Figur.

37 Die funfft aequation wirdt vormerckt aus ge|melten signis, so drei signa nach einander volgent, vnd die letzten zwei werden vergleicht den ersten jn gemelter proportionalischer satzung, welche auch den superficiebus, jnmassen wir jn den sechst propositionen Ylis demonstrirt haben, vnnd diese satzung daraus gezogenn, welche dann nach ordnung der aequation also gesetzt werden wirdt.

ȝ	ȝ		ℋ
ȝ	ȝȝ		ȝ
ȝȝ	ȝȝȝ		ȝ
ȝȝȝ	ß		ȝȝ
ß	ȝȝ	aequantur	ȝȝȝ
ȝȝ	biß		ß
biß	ȝȝȝȝ		ȝȝ
ȝȝȝȝ	ccȝ		biß

Die sechste Equation gemelter signa wird vormerckt in gedachter proportionalischen satzung, wann do drei signa nacheinander volgent, vnnd die ersten zwei werden vorgleicht dem dritten, welche aequation abermals den superficien wird zugeaignet, wann sie continue nacheinander volgent sein. vnd wie wol wir sprechen, das die ersten zwei dem letzten vorgleicht werden, so geschicht intermissis des mitteln, jn dem, das das erst dem
37′ letzten gleicht mit den mitteln, vnd stet in der figurn also mit jren | signis:

ℋ	ȝ		ȝ
ȝ	ȝȝ		ȝ
ȝ	ȝȝȝ		ȝ
ȝȝ	ß		ȝȝ
ȝȝȝ	ȝȝ	aequantur	ȝȝȝ
ß	biß		ß
ȝȝ	ȝȝȝȝ		ȝȝ
biß	ccȝ		biß
			ȝȝȝȝ

Die siebende Equation vorberurter Signa angezaigter proportionalischer satzung oder ordnung ist von dreien signis, welche ohne mittel nacheinander volgenden, vnd das erst vnd letzt werden vergleicht dem mitteln, welche mit den negsten vorgesatzten zweien vorgleicht den superficien vnd

nicht den corporischen zaln, jnmassen die nachvolgende figur aufsweist, wie gesatzt:

ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ	aequantur	ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ

Die acht Aequation wird gesatzt von dreien signis nacheinander volgende in gemelter ordnung der proportionalischen satzungen, doch dermassen, das eine ordenliche saltirung geschehe, vnd alle wege zwei einem vergleicht oder equirt werden, vnnd wirdt vf egemelte siben regeln gegrundt; vnd hierumb wird sie nach den negsten dreien jn drei theil gespalten, vnd noch jeder aber in drej nach den ersten gesatzten. Zum ersten, wann do saltus geschicht eines signi, welchs alsdann soll werden vorgleicht auf das letzt den ersten zweien, | aber das erst den letzten zweien, 38
aber das erst und letzt dem mitteln; vnd nach solchen radix tetragonica gibt valorem nach der andern Equation. Zum andern, so aber transgressus geschicht mit zweien signis gleichmäfsig der dritten Aequation vnd alfsdann saltum abermals, das erst vnd letzt dem mitteln, aber das erst vnd ander dem dritten, aber das letzt vnd mittel dem ersten, nach den negst dreien gesatzten aequationibus, vnd alfsdann radix cubica beweist den valorem. Zum dritten, so der saltus geschicht mit dreien signis gleich der vierdten gesatzten Equation vnd also die saltua abermals vorgleicht werden nach negst gesatzten dreien: das erst dem letzten vnd mitteln, aber das letzt dem ersten vnnd mitteln, aber das erst und letzt dem mitteln, vnd alfsdann radix radicis beweist valorem nach der vorgenanden vierden equation vnd wird mit jren signis dreifaltig also gesatzt in neun gespalten species.

Durch die funfft Equation zu machen alsdann durch die andere

ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ	aequantur	ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ

Durch die sechste zu machen alsdann durch die andere

ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ	aequantur	ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ
ꝛ	ꝛ		ꝛ

Durch die siebende Equation
darnach durch die andere.

38′

ℋ	ȝ	aequantur	ȝȝ	
ℰ	cℓ		ß	
ȝ	ȝȝ		ȝcℓ	
cℓ	ß		biß	
ȝȝ	ȝcℓ		ȝȝȝ	
ß	biß		ccℓ	

Durch die funfften darnach durch die dritten				Durch die sechsten darnach durch die dritten			
cℓ	ȝcℓ	aequantur	ℋ	ℋ	ȝcℓ	aequantur	cℓ
ȝȝ	biß		ℰ	ℰ	biß		ȝȝ
ß	ȝȝȝ		ȝ	ȝ	ȝȝȝ		ß
ȝcℓ	ccℓ		cℓ	cℓ	ccℓ		biß

Durch die siebende alsdann
durch die dritten

ℋ	cℓ	aequantur	ȝcℓ
ℰ	ȝȝ		biß
ȝ	ß		ȝȝȝ
cℓ	ȝcℓ		ccℓ

Durch die funfft alſsdann durch die vierdt.				Durch die sechst alsdann durch die vierdt.			
ȝȝ	ȝȝȝ	aequantur	ℋ	ℋ	ȝȝȝ	aequantur	ȝȝ
ß	ccℓ		ℰ	ℰ	ccℓ		ß

Durch die siebend darnach
durch die vierdt.

ℋ	ȝȝ	aequantur	ȝȝȝ
ℰ	ß		ccℓ

Capitulum decimum octavum de prima aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Primam aequationem dinoscimus duorum signorum sibi invicem mutuo sequentium esse aequipolentiam. Minus per maius omnium aequationum esse comittendum, ut multitudo in aequatione subsumpta unitatem signi aequipollentem accipiat, huius tum rei perquirendae primae aequationis solutam radicem expedivimus.

Hie saget ALGEBRAS von seiner ersten equation Gebrae et Almuchabole, vnd laut zum teutschen also: | 39

Die ersten Aequation erkennen wir zweier signa ein vorgleichung sein, die do nach einander volgent sein one Intermiss: also solle das minste signum durch das meiste am namen gethailt werden jn allen equationibus, vff das die manigfaltigkeit der zalen jn der Equation vfgenomen die vnitet ergreife des vorgleichendenn zeichens vnd darnach des fragenden dings der ersten equation haben wir aus verricht den vfgelosten radix.

Dise Equation durch einen schrifftlichen Sin den text gleichmessig zu jncorporiren, so laut die erste Equation also: Wann jn einer Coniecturation zwei signa aneinander volgendt werden vorgleicht, so solle allemal das cleinste am namen, das ist, das weniger ductiones hatt, durch das meiste gethailt werden, das ist, das do mehr ductiones hat, vnd was do kompt, beweist die frage. Vnd jn solcher Equation haben wir vorgesaget, das ℳ vd ꝛ̃ seind die ersten zwei signa, die einander vorgleicht werden, so soll das ℳ, das ist absolutus numerus, durch ꝛ̃ gethailt werden, das ist durch radicem, wann ꝛ̃ an des Bedeutung grosser dann Numerus ist, jnmassen wir vorgesatzt haben, das dem ꝛ̃ ein jtzliche zal moge vfgelegt werden, | 39′ vnd mit den ℳ, welche nicht grosser khonnen werden, dann sie an jn selber gesatzt sind, auch so wol ꝛ̃ an der ersten duction vnd nicht dragma. Vnd solche equation haben wir bewisen in vnserm andern capittel, sagende von der linien bipartita, daher sie dann vrsprunglich geschopfet wirdt, auch dopei mit einem Exempel eingefurt ist worden. Nun finden wir in gemelter proportionalischer satzunge, das dise gegenwertige Equation neun modos equandj heltt, jn den sie wirdt nach gemeinem Lauf der signa equirt.

Der erst modus equandi ist, wann ℳ wird vergleicht ꝛ̃. Als wir setzen 12 ꝛ̃ gleich 84 ℳ, wirdt gefragt was ꝛ̃ werde sein. Saget die Equation, wir wollen thailen 84 ℳ in 12 ꝛ̃, facit 7; also ist das Ding 7, wann 7 mal 12 macht 84, vnd ein ꝛ̃ ist 7.[1])

Der ander modus, wann do ꝛ̃ wirdt vorgleicht ʒ. Sam 4 ʒ gleich 20 ꝛ̃. thailen wir 20 jn 4, khomen 5, das ist der ꝛ̃ werdt, wann 1 ʒ von 5 ist 25, das machen 4 in numeris 100. Nun 20 radices | von gemelten 1 ʒ 40 machen auch 100, wann 5 mal 20 ist auch 100.

Der dritte modus ist, wann ʒ vergleicht wirdt ꝛ̃. Sam also 40 ʒ gleich 4 ꝛ̃. thailen wir ʒ in cubum, facit 10, vnd das ist ein radix werdt, wann 4 ꝛ̃ ist signum equipolentis, vnd 40 ʒ die equiren jm. So wir nun thailen

---

1) Die allgemeine Lösung ist hier, wenn $ax^n = bx^{n+1}$, so ist $x = \frac{a}{b}$.

40 mit 4, so nimbt signum equipolentis 4 vnitates in sich, der dann jn Equatione subsumirt ist worden mit 4, vnd khumbt 10, das ist vnitas von 4 ꝛc, vnd ist valor radicis. Wann 1 ꝛc von 10 ist 1000, vnd der 4 ist 4000. Nun 1 ʒ von 10 ist 100, vnd der 40 macht auch 4000.

Der vierdte modus diser equation ist, wann ʒʒʒ vergleicht werden ꝛc. Als 2 ʒʒʒ gleich 10 ꝛc. Wir thailen 10 in 2, facit 5, das ist ein ꝛ werdt von dem gemelten cubo vnd ʒʒʒ; wann 1 ʒʒʒ von 5 macht 625, vnd der zwene machen in numeris 1250. Nun 10 ꝛc von gemelten 5 seind auch 1250, wann 1 ꝛc ist 125, das 10 mal ist 1250.

Der funffte modus diser Equation ist, wann ʒʒʒ vergleicht wirdt ß. Sam 6 ʒʒʒ sind gleich 2 ß, tailen wir 6 jn 2, facit 3; das ist valor radicis. Wann
40′ 2 ß von 3 machen | 486, souil seind auch 6 ʒʒʒ von 3.

Der sechste modus, wann sursolidum vorgleicht wirdt ʒꝛc, als 8 ß werden vorgleicht 2 ʒꝛc, thailen wir 8 mit 2, facit 4, das ist ein radix werdt. Wann 8 ß von 4 machen 8192, souil machen auch 2 ʒꝛc von 4.

Der siebendt modus, wann ʒꝛc wirdt vorgleicht biß. Sam also 9 ʒꝛc seind gleich 3 biß, thailen wir 9 in 3, facit 3, das ist der ꝛ werdt, dann ein biß von 3 macht 2187, der drei facit 6561, vnd 9 ʒꝛc von dreien machen auch souil, wann ein ʒꝛc von 3 macht 729, vnd der neun machen auch souil 6561.

Der acht modus diser Equation ist, wann ein biß vorgleicht wirdt ʒʒʒʒ. Sam also wir setzen wollen: 5 ʒʒʒʒ werden vorgleicht 10 biß, so thailen wir 10 mit 5, facit 2, das varirt valor ꝛ; wann 5 ʒʒʒʒ von 2 seind 1280 in numeris, souil machen auch 10 biß, wann ein biß ist 128 vnd das 10 mal macht auch 1280.

Der neundte modus diser ersten Equation ist, wenn ccꝛc vorgleicht wirdt ʒʒʒʒ, als 3 ccꝛc sind gleich 6 ʒʒʒʒ, thailen wir 6 mit 3, facit 2, das ist der radix werdt.

41 Dis seind erste fundamenten vnd fustapfen der Equation, | dapei man mag die zukunfftigen ercleren, die doch daraus gezogen vnd applicirt werden.

Capitulum decimum nonum Algebrae *de secunda aequatione Gebrae et Almuchabolae.*

Secundam aequationem notavimus duorum signorum interciso medio equipollentiam: minus per maius, ut diximus, esse committendum, huius producti latus tetragonicum valorem et quantitatem numeri radicis ostendit.

Hie cleret Algebras seine andere Equation, so erstlich demonstrirt ist worden jn der proposition Ylis, vnd laut zum teutschen also:

Wir haben die ander Equation vnser Gebra vormerckt ein

vorgliedrung zweier signa gemelter proportionalischer satzung, zwischen welchen ein Mittel vbergangen ist oder abgeschnitten: (als wir gesagt haben) solle das minste seines namens durch das meiste gethailt werden, vnd was aus solchem kumpt oder erwechst, desselbigen tetragonische oder gevierte seiten beweist den werdt des gesatzten ꝛ oder dings in quantitate der zal, wie gros der sei. | [1]) 41'

Solche Equation zu jncorporiren nach dem text: wann so zwei signa gemelter satzung durch einen vberganghhen mittel vorgleicht werden, solle die minste benennung durch die meiste gethailt werden, vnd radix quadrata derselbigen beweist die ꝛ, jnmassen die figur der signa diser Equation aufsweist, der dann nach gemeinem lauf acht modi gesetzt sein.

Der erst modus diser Equation ist, wann ℳ vorgleicht wirdt den ʒ, zwischen welchen signis ꝛ vbergangen wirdt. Sam also 7 ʒ gleich 252 ℳ. thaile ℳ in ʒ, facit 36, dauon radix quadrata ist 6, souil ist der ꝛ werdt. thailen wir 252 ℳ mit 7 ʒ, das dann signum equipolentis vnd subsumirt ist mit 7 vnitatibus, so khumen 36 ℳ, das ist 1 ʒ vnd vnitet des zeichen equipolentis, jnmassen die erste Equation cleret, warum man das minste signum durch das maiste thailt. Nun radix quadrata von 36 ist 6, das ist die ꝛ werdt, wann 1 ʒ macht 36, vnd der thail 7 thun 252, ist gleich 252 ℳ.

Der ander modus diser andern Equation ist, wann ꝛ vorgleicht wirdt ꝛ. Sam also wir setzen wollenn 5 ꝛ gleich 45 ꝛ. thailen wir 45 ꝛ in 5 ꝛ, facit | 9, vnd radix von 9 ist 3, vnd souil ist werdt der ꝛ; wann 1 ꝛ 42
von 3 ist 27, vnd deren funfe faciunt 135 ℳ, souil sollen auch machen 45 ꝛ. Nun ist 1 ꝛ 3 vnd 45 mal 3 macht auch 135 ℳ: ist recht.

Der dritt modus diser Aequation ist, so ʒʒ vergleicht wird ʒ. Sam also wir setzen wollen 36 ʒ seind gleich 16 ʒʒ. thailen wir 36 ʒ mit 16 ʒʒ, facit $2\frac{1}{4}$, vnd radix von $2\frac{1}{4}$ facit $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$, vnd das ist werdt der ꝛ. Wann 16 ʒʒ von $\frac{2}{3}$ seind 81, vnd 36 ʒ seind auch souil, wann 1 ʒ ist $2\frac{1}{4}$, vnd der 36 machen 81. vnd ist recht.

Der vierdte modus diser Exquation ist, wann ꝛ vorgleicht wirdt ß. Als wir dann setzen wollen: 108 ꝛ seind gleich 3 ß. Nun sagen wir, was der ꝛ sei, thailen wir 108 mit 3, khomen 36, vnd radix ist 6, sovil ist werdt der ꝛ, wann 1 ß von 6 macht 7776 in ℳ. Nun das zu drei malen facit 23328 in Numeris. Nun 1 ꝛ von 6 macht 216, das 108 mal facit auch 23328; ist recht.

---

1) Allgemeine Lösung: $ax^n = bx^{n+2}$; $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Der funfft modus ist, wann ʒʒ wirdt vorgleicht ʒcℓ, zwischen welchen dann vbergangen wirdt ß. Sam also wir setzen wollen 7 ʒcℓ gleich 28 ʒʒ. Die
42′ frag, | was 1 ꝛ werdt sey. thailen wir 28 mit 7, facit 4, radix ist 2, das der ꝛ werdt ist. Wann 1 ʒʒ von 2 ist 16, vnd der 28 faciunt 448 ℋ. Nun 1 ʒcℓ ist 64, vnd der 7 machen auch souil, vnnd ist recht.

Der sechste modus von diser Equation ist, wann ß wirdt vorgleicht biß. Sam also, wir setzen wollen; 75 ß seind gleich 3 biß. thailen wir 75 ß in 3 biß, khumen 25, davon ist ꝛ 5, das ist der werdt der radix, wann 3 biß von 5 sind 234375 ℋ, vnd 75 ß seind auch souil, wann 1 ß ist 3125, vnd deren 75 ist auch 234375 in numeris, vnnd ist recht.

Der siebende modus von diser Equation ist, wann ʒcℓ wirdt vorgleicht ʒʒʒ. Sam also, wir setzen 144 ʒcℓ seind gleich 9 ʒʒʒ. was mag werdt sein der ꝛ. thaile 144 mit 9, facit 16, vnd radix, als 4, ist valor. Wann 1 ʒʒʒ von 4 macht 65536 in numeris vnd das zu neun mal facit 589824. Nun 144 ʒcℓ machen auch souil, wann 1 ʒcℓ von 4 macht 4096 vnd das 144 mal macht gemelten Numerum, vnd ist recht.

Der achte modus und letzte diser andern equation ist, wann biß vorgleicht wird ccℓ nach gebrauch gewonlicher signa pey vns. Sam also, wir setzen 98 biß seind gleich 2 ccℓ. Wir thailen wie vor biß in ccℓ, khomen
43 49, dauon ist radix quadrata | 7, das dann valor des radix ist, und souil ist der ꝛ werdt, wann 1 ccℓ von 7 macht 403933607, und das zweifach macht 807867214, vnd souil machen auch 98 biß von 7. Wann 1 biß macht 8243543, vnd das zu 98 mal macht 807867214, den obgeschrieben numerum zweyer ccℓ, vnd ist recht.

Warumb wir solche modus nach der lenge erzeln, wirdt zu seiner zeitt not sein, das wir die ersten fundamenta gemelter andern equation bedeut haben, vmd hierumb ist mit fleis zu vormerck, die wir erzelt haben.

Capitulum vicesimum Algebrae *de tertia equatione Gebrae et Almuchabolae.*

Tertiam aequationem proposuimus, cum duo signa ordine proportionali descripta transgressis duobus continuis mediis in coniecturis sibi ivicem aequivalent. Minus per maius committeretur, quotientis cubigonicum latus valorem rei numerabit.

Wir haben gesatzt von diser Equation anfengklich jrer signa; hie volget die aufsweisung derselben, vnnd laut zu teutschen also:

43′ Wir haben vorgelegt die dritten Equation, wann do | zwei signa nach der proportionalischen Satzung vnd Ordenung beschrieben zweier mittel vbergangen jn den coniecturen aneinander vorgleicht werden, solle das minst signum durch das meiste

getheilt werden, vnnd desselben quotienten cubische seiten oder radix cubica wirdet zelen den werdt des dings.[1])

Von diser Equation den text zu cleren, so ist der schriftlich sin dauon, so da zwei signa einander werden vorgleicht, welche jn gesatzter proportionalischer satzung oder ordnung volgendt durch zwei vbergangen werden, so solle das cleinste seiner bennenung durch das groste gethailt werden, vnd radix cubica des quotienten beweist die Frage der ꝛc oder das ding, vnnd solche gesatzte equation hat durch gesatzte signa sieben modus equandi pey vns gewonlich.

Der erste, so cℓ vorgleicht wirdt ℋ. Sam also, wir setzen wollen 189 ℋ gleich 7 cℓ. tailen wir ℋ in cℓ, facit 27, vnd radix cubica dauon, als 3, beweist den werdt des ꝛc. Wann ein cℓ von 3 macht 27, vnd der zu 7 mal facit 189 ℋ vnd ist recht. Die vrsache, das das minste gethailt soll werden, haben wir erstlich in derer ersten Equation thun vermelden, wann multiplicitas ist mit 7 subsumirt des zeichen equipolentis, | so wir 44
dragmas thailen in 7 thail, so khumbt 1 cℓ. Also hat an sich genomen das signum equipolentis vnitates vnd hierumb, so nun 27 ist 1 cℓ, so ist auch gebrechent der cℓ seiner radix cubica, vnd alfs dann derselbig beweist die frage, jnmassen dann die Equation ausweist.

Der ander modus diser Equation, wann do ꝛc vergleicht wirdt ʒʒʒ. Sam also, wir wollen setzen 3 ʒʒʒ seind gleich 375 ꝛc. thailen wir 375 ꝛc in 3 ʒʒʒ, khombt 125, vnd radix cubica, als 5, beweist die frag. wann 1 ʒʒʒ von 5 macht 625, vnd das dreimal macht 1875. Nun 375 ꝛc seind auch souil, vnd ist recht gemacht.

Der dritt modus diser dritten Equation ist, wann sich ʒ vorgleicht ß. sam also, wir setzen wollen 40 ʒ gleich 5 ß, theilen wir 40 in 5, khomen 8, dauon radix cubica ist 2, beweist den werdt des ꝛc. Wann 1 ß von 2 ist 32, so machen 5 sursolida 160, souil machen auch 40 ʒ.

Der vierdt modus diser Equation, wann der cℓ wird vorgleicht ʒcℓ. Sam also, wir setzen wollen, 7 ʒcℓ seind gleich 448 cℓ, thailen wir 448 cℓ mit 7 ʒcℓ, facit 64, dauon beweist radix cubica, als 4, den werdt des ꝛc, vnd defsgleichen also mugen wir in andern signa thun. | 44′

Der funffte modus aequandi diser Equation, wann ʒʒʒ vnd bißß einander werden vorgleicht. Sam also, wir setzen 243 ʒʒʒ vergleicht 9 bißß, thailen wir eine in das ander, khomen 27, dauon radix cubica 3 vnd valor des ꝛc.

Der sechste modus equandi diser Equation, wann do ß wirdt vorgleicht

---

1) Allgemeine Lösung: $a x^n = b x^{n+3}$; $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

ȝȝȝ. Sam also, wir setzen wollen im forigen fall 9 ȝȝȝ vorgleicht 243 ß, gleichkombt aber in vorberurter, was 3 der ȝ.

Der siebende modus. Wann do ȝc̊ vergleicht wird cc̊, mogen wir aber setzen in obgemelten fall.

Dapey zu erkhundigen ist, das alle modi equandi eines falls sind, dann es alle equa multiplicia sein ȝ̊ vnd c̊ der zweien signa, vnd werden dise modi allein declarirt, darumb das die ductiones so weit fallen, jnmassen man die jn den questionibus eigentlich vornemen wirdt; vnd die equation ist erstlich von Algebras nicht demonstrirt jn den proportionibus Ylis, dann sie alleine durch die plan Superficien gesatzt sein. Aber solche Equation
45 ist von Aliabra, dem grossen Indischen | Maister demonstrirt aus der Linien solida, jnmassen wir jn den corporen zu seiner Zeit setzen werden, was vor Equationes Aliabras aus den Corporischen zalen gezogen hatt, die do jn die sechse jn kheiner Form noch modum equandi hat, noch gebracht khonnen werdenn; vnd wieuol sie von Algebra gesagt ist vnd nach Ordnung der signa aus der proportionalischen satzung gezogen, vnd doch hat Aliabras jn den corporibus noch ettlich treffenliche Equationes addirt. Und die weil die vorgesatzten vnnd alle nachgesatzten, anfsgenomen dise gegenwertige, durch die plana volfurdt, hat Algebras auch diese in ordnung der signa erzelt, die dann zu seiner zeit wider von Algebea jn den corporibus repetirt wirdt mit andern Equationibus der soliden, die wir hieher nicht haben wollen vnter die plana einziehen, dann khein gemes mit dem nicht haben ist.[1]) Nun volget vnser vierdte Equation.

Capitulum vicesimum primum Algebrae de quarta Equatione Gebrae et Almuchabolae.

Quartam aequationem assignamus demonstratione digesta eam esse duorum
45′ *signorum tribus ablatis mediis extremorum aequiparantiam. Minus per* | *maius pertinuit, huius quotientis radix radicis tetragonica valorem rei quaesitae explanat.*

Hie zeiget Algebras seine vierdte Equation sagende, vnd laut zum teutschen also:

Die vierdt Equation vornemen wir, sein vorhin angezaigt mit jrer demonstration jn den propositionen Ylis zweier signa durch drei vnterlassene mittel der letzten zweien eine vor-

1) Hieraus ist klar, dass der Bearbeiter, ob auch der lateinische Text ist fraglich, die Lösung der Gleichungen dritten Grades gekannt hat oder zu kennen glaubte. Er kommt an späterer Stelle nochmals darauf zurück. Sollte er Cardano gekannt haben?

gleichung sein. Das minste seiner Benennung thailen wir durch das groste, vnd desselbigen quotient radix des radicis quadratae ereuget den werdt des gesuchten dings.[1])

Also kurtzlich den vorstandt dieser Equation einzufuren, so ist der sin dauon, so zwei signa in vorgesatzter proportionalischer Satzung oder ordnung werden einander vorgleicht, zwischen welchen zwei signa nach proportionalischer satzung oder ordnung drei vbergangen werden, so solle das minste durch das meiste gethailt werden, vnd radix quadrata von den radix quadrate bericht die frage. Vnd dieser Equation seind gewonlich bey vns sechs modi Equandi wie volget.

Der erst modus. So dragma vorgleicht wirdt ʒʒ. Sam also, | wir 46
setzen wollen, 5 ʒʒ seind gleich 405 ꝟ, thailen wir ꝟ in ʒʒ, facit 81, dauon radix radicis, als 3, bericht die frage, vnd desgleichen magstu einfuren die andern vorangezaigte signa dieser Equation: sam 5 ß werden vorgleicht 405 ꝛ. Welche modi equandi zugleich wie oben 3 die ꝛ ist, vnnd also furter, dann es seind aequa multiplicia der ersten signa ꝟ vnd ʒʒ diser Equation, als wir dann im 17. capitel angezaigt haben, was oder wieuil modus equandi ein jtzliche equation hat nach gemeinem lauf vnnd gebrauch jrer signa; vnnd vber diese Equation, das ist vber ʒʒ, seindt vnsere maiores nicht khomen. Wann, so wir 4 signa vberschreiten, khomet es auf ꝟ vnd ß, jnmassen das 15. Capitel ausweist der dann weder radix quadrata noch cubica noch quadrati de quadrato ist, sondern ein sursolida radix, der mit seiner funften multiplication vorendert ist von dem ꝛ, wann jtzlicher weise ʒʒ durch ꝟ vierdte multiplication verendert ist, welche multiplication ist zu quadriren, darumb sie an der vierdten stat dem quadrat gemes gesatzt ist. Aber ß stedt an der funfften stadt der multiplication, | 46′
welche funffte stadt khein gemes hat, weder mit den corporibus noch superficien, vnd hierumb haben vnsere maiores nicht wollen daruber procidiren, vnnd wie wol wir zu seiner zeit von dem ꝛ, ß vnd weiter biſs auf ccℓ sagen werden, wolten wir solches hie vormissen vnd zu seiner zeit durch Algebram einfuren, der dann dise gegenwertige Equation pis auf ccℓ ostendirt hat. Vnnd als wir angezaigt haben, so vier signa vbergangen werden, so khumbt es auf radix ß^a; so 5 vberschritten werden, vf ʒcℓ, das dann abermals radicabilis ist; so 6 vbergangen werden, so khumbt es auf radix biß^a, die stadt dann aber irradicabilis ist, vnd desgleichen fortbas. Der grosse Arismetrist Algebras cleret, als nachuolgent ereugen wirdt jn vnserm andern Buch, treffenlich dauon setzt vnd gebraucht in den demon-

---

1) Allgemeine Lösung: $ax^n = bx^{n+4}$; $x = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

strationibus der soliden. Vnnd solche viere jtzundt gesatzte Equationes seind genanndt simplices modos, wann allewegen zwei signa aneinander vorgleicht werden, vnnd nach disen vier Equationes wirdt dj coss ge-
47 funden | der achten Equation, wann sie werden soluirt durch die 3 negst volgenden modos compositos bifs auf dj vier equationes, die alfsdann ausdrucken den valorem des ȝ. Wann sie also die acht Equation durchwandert alle equationes, darumb sie weit in die multiplication von dem ȝ aufsgewandert ist worden. Aber diese nachuolgenden modos werden genant compositi, darumb das do allewegen zwei signa werden einem vorgleicht, jnmassen dann nachuolgende begriffen ist. Aber unsers Algebrae seind allein die gegenwertige Equation vnd die acht radicabiles, wann difs wirdt soluirt durch die andere gesatzte equation der ordnung, vnnd hierumb wirdt sie genandt ȝȝ, das ist quadratum quadrati, wann radix radicis erweist dj ȝ, das dann die ander der ordnung allein durch den quadratischen radicem hat soluirt, welche radix abermals quadrata ist, die ȝ gegenwertiger equation. Wie vnnd aber die achte sol reducirt werden, bezaiget sie genugsam mit jrem Capitel. Nun volgt von der funften Equation Algebrae.

47′ *Capitulum vicesimum secundum de quinta equatione Gebrae et Almuchabolae.* |

Quintae aequationis essentiam experire promisimus. Ipsa est enim, cum sibi invicem tria signa successiva, duoque postrema primo aequationi parantur: Primum quidem et medium per postremum maius comitantur, medietas medii tetragonisetur, et huius productum cum primo in unam congeriem coacerveturi latus inde tetragonicum minus medietate medii valorem radicis obtinebit.[1])

Hie ereugnet Algebras sein funffte Equation Gebre vnd Almuchabole, den ersten modum compositum, vnd laut zum deutschen also.

Wir haben verheisen die aigenschafft der funfften Equation zuergrunden vnd aufszulegen, die dann ist, so drei signa one mittel nach einander volgendt nach ordnung proportionalischer Satzung vnter einander werden vorgleicht, also die letzten zwej dem ersten: so soll alfsdann das erst vnd mittel durch das letzte gethailt werden, das ist durch das meiste am namen, vnnd das halbthail defs mitteln, so das tetragonisirt, das ist quadrirt wirdt, vnd das selbig erwachsende mit dem ersten in ein samlung zusamengethun wirdt, alfsdann die quadratische seithen

1) Allgemeine Lösung:

$$a x^n = b x^{n+1} + c x^{n+2}; \quad \frac{a}{c} x^n = \frac{b}{c} x^{n+1} + x^{n+2}; \quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c}} - \frac{b}{2c}.$$

solchs quadrirten minus | das halbthail des mitteln zeichens 48
wirdt halten den werdt des ꝛ.

Also zu einfuerung der begreifung diser equation sprechen wir, so 3 signa one mittel nacheinander der gesatzten proportionalischen satzung oder ordnung vorgleicht, also die letzten zwei signa dem ersten, sollen wir das erst vnd mittel signum durch das letzte vnd meist thailen, vnd sollen das mittel mediren, vnd dasselbig in sich multipliciren, was khumbt, zum ersten zaichen thun, vnd radix quadrata desselbigen minus der halbe thaile des mitteln zeichen, vnd ist, das wir quadrirt haben, bewist die cofs. Vnd die Equation hat nach gemeinem lauf acht modos equandi, vnter welchen dann der erst ist, so ꝛ vnd ʒ werden vorgleicht ℋ. Sam also, wir setzen wollen 1 ʒ vnd 8 ꝛ seind gleich 65 ℋ. theile ꝛ vnd ℋ mit ʒ: ist gethailt, mediren wir 8 ꝛ, facit 4, die multipliciren wir in sich, facit 16; die addiren wir zu 65 ℋ, facit 81, vnd radix dauon ist 9; dauon zichen wir den halben thail des ꝛ, als 4, pleiben 5, facit ist die ꝛ werdt. Das probir wir also. 1 ʒ macht 25, vnd 8 ꝛ machen 40, die zusamen, khomen 65 vnd ist recht. Defsgleichen | helt sich solchs mit allen equa multi- 48′
plicia, wann alle andere modi equandi diser equation seind equa multiplicia diser signa ʒ ꝛ vnd ℋ. Das wollen wir beweisen in vorangezaigter cofs.

Wir setzen den andern modum equandi vnd sprechen: 6 ʒ vnd 2 ꝛ̃ seind gleich 80 ꝛ. Solchs machen wir nach satzung der Equation: wir thailen ʒ vnd ꝛ mit ꝛ̃, facit 40 ꝛ 3 ʒ, mediren 3 ʒ, facit $\frac{3}{2}$; für solchs in sich, facit $\frac{9}{4}$; das addirn wir zu 40 ꝛ, facit $\frac{169}{4}$; dauon ist radix $\frac{13}{2}$; dauon der halben thail des zens, pleibt 5, souil ist die ꝛ werdt. Nun machen 80 ꝛ 400 in numeris, souil machen auch 6 ʒ vnnd 2 ꝛ̃, dann 1 ꝛ̃ von 5 macht 125, der zwene sind 250; so machen 6 ʒ 150 ℋ; solchs zusamen macht auch 400, vnnd ist recht.

Wie wir aber sollen erkhennen, das alle andern modi seind equa multiplicia, so merck wir die vorigen ersten angezaigten ꝛ vnd jre signa, das ist den ersten modum equandi, der do waz 1 ʒ vnd 8 ꝛ gleich 65 ℋ, vnd der ander modus waz 6 ʒ 2 ꝛ̃ gleich 80 ꝛ. Setzen wir den ersten deme andern gleich, also 80 ℋ gleich 2 ʒ vnd 6 ꝛ, also sprechen wir, das der ander gegen den ersten ist equa subsumirt mit 5, wann 2 ʒ seind 50 in ℋ und 6 ꝛ 30, machen zusamen 80, gleichett 80 ℋ. | Also ist es furt in 49
andern modis equandis diser vnd nachuolgenden equationen, das alle modi werden reducirt diser aequation in dise signa ꝛ ʒ vnd ℋ, die dann das erst fundament seind diser equation in dise signa vnd aller jrer modos equandi. Nun volget von der sechsten Equation.

Capitulum vicesimum tertium de sexta aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Sextam aequationem annectere. Eam esse trium signorum continuorum altrinsecorum duorum assimiliationem medio. Sed, ut diximus, per maius comitentur, medietas medii si creverit tetragonaliter et a producto primi sustulerimus, radix residui si colligetur medietate medii vel minuetur, querendam radicem rei propositae enucleabit.

Hie erzelt ALGEBRAS seine sechste Equation seiner Gebre vnnd Almuchabole, die dann jmassen die andern erstlich in den propositionen YLIS demonstrirt ist worden, vnnd laut zum teutschen also.

Die sechste Equation den andern anzuhangen, die dann ist dreyer zeichen aneinander volgendt eine vorgleichung dem mitteln gemelter proportionalischer satzung der eufsersten. Aber
49′ als wir gesagt haben, durch das | gröste sollen die andern zwej gethailt werden, vnd das halbe thail des mitteln, so das erwechst tetragonisch, vnd von solchem erwachsen das erste abgetragen oder hinweg genomen wirdt, radix des bleibenden residui, so das zusamen geclaubt wirdt oder gelossen den halben thail des mitteln zeichens oder dauon gemindert, so wirdt solchs ereugenen den fragenden ꝛ̊ des furgelegten dings.[1])

Solche sechste Regel in bessern vorstandt zu geben vnnd zu scherpfen, sprechen wir, das die sechste Equation ist eine vorgleichung dreyer signa one mittel nacheinander volgendt, vnter welchen das erst vnd letzte werden vorgleicht dem mitteln. Saget der text, wir sollen die wenigsten zwei durch das letzte, das ist das grose, thailen, das mittel mediren; was khombt in sich fueren, vom product das erste zihen, vnd radix des vbrigen soll zu dem vorigen halben thail oder quadrirten gethan oder abgezogen werden, vnd alfsdann solchs wirdt beweisen die ꝛ̊.

Solcher equation finden wir gewenlich acht modos equandi, als dann das 17. capitel cleret. Vnnd solcher erster modus equandi ist, so ꝛ̊ vorgleicht wirdt ℋ vnd ʒ. ℋ vnd ʒ seind das erste vnd letzte, welch dann vorgleicht werden dem mitteln, als ꝛ̊, nach der vorgemelten proportionali-
50 schen satzung. Sam also, wir setzen wollen, | 18 ꝛ̊ seind gleich 28 ℋ vnd 2 ʒ. thailen wir ℋ vnd ꝛ̊ durch ʒ, facit 9 ꝛ̊ vnd 14 ℋ. Nun saget die Equation, das mittel sollen wir mediren; wir mediren ꝛ̊, facit $\frac{9}{2}$, füren solchs in sich, facit $\frac{81}{4}$; dauon zihen wir das erste, als 14, pleiben $\frac{25}{4}$; dauon nemen wir radicem, khomen $\frac{5}{2}$. Nun sollen wir den halbthail der ꝛ̊

1) Allgemeine Lösung:

$$bx^{n+1} = ax^n + cx^{n+2}; \quad \frac{b}{c}x^{n+1} = \frac{a}{c}x^n + x^{n+2}; \quad x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}}.$$

subtrahirn[1]), mugen nicht, deshalb addirn wir $\frac{9}{2}$, facit zusamen $\frac{14}{2}$, macht 7: souil ist ꝛ werdt. Das wollen wir probirn: Wir haben gesatzt, 18 ꝛ seind gleich 28 ℳ vnd 2 ʒ. So nun valor der ꝛ ist 7, so machen 2 ʒ 98 in numeris, dazu 23 ℳ, facit zusamen 126; souil machen auch ꝛ, als 18, dann 18 mal 7 ist auch 126, vnnd also finden wir ex numeris absolutis, das 18 ꝛ gleich souil machen, sam 28 ℳ vnd 2 ʒ, vnnd ist recht.

Desgleichen mugen wir fueren die andern modos equandi diser Equation, das wir dann nemen equa multiplicia, jnmassen wir in vorgesetzter Equation exemplificirt haben. Wir setzen 18 ʒ seind gleich 28 ꝛ vnd 2 ꝛꝛ. thailen wir solchs obgemelter massen, khumbt auch valor obgemelter form 7. Wann 18 ʒ von 7 seind 882 in numeris, souil sollen auch machen 28 ꝛ vnd 2 ꝛꝛ. Wann 2 ꝛꝛ von 7 seind 686, vnnd 28 ꝛ von 7 machen 196 in numeris. Nun solchs zusam facit auch 882, vnd ist recht. Also | sprechen 50′
wir, das 28 ꝛ vnd 2 ꝛꝛ vf einen thail, 18 ʒ vfm andern thail mit 7 subsumirt gleich seind gegen dem ersten modo equandi, vnnd desgleichen ist es auch in den andern modis equandis diser equation, die dann alle reducibiles seind in die ersten fundamenta ℳ vnd ʒ und ꝛ diser equation pis ꝛꝛꝛ in ꝛꝛꝛꝛ, vnd so ferner man sie dann fueren will, vnnd von disem modo equandi wirdt verificirt in dem letzten Buch der demonstrationum. Nun volget von der sibenden Equation Algebrae das 24 Capitel.

Capitulum vicesimum quartum de septima aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Septimam aequationem inserere precatum est. Cum enim tria signa sibi ordine continuo mutantia, primum et medium postremo in coniecturis coaequae comparationis fuerint, per postremum maius comitantur. Quod si medium medietate decreuerit, quantitasque huius tetragonizata in unum acervum quantitati cum primo recollecta fuerit, radice huius tetragonica adiuncta sibi quantitate medietatis medii valorem rei enucleabit.

Hie cleret Algebras die siebendt Equation seiner Gebra vnd Almuchabola. sagendt, textlich lautendt zum teutschen also. | 51

Dise siebende Equation zu inseriren ist vorberurt worden, so do drey signa nach anhengender ordnung one mittel der proportionalischen satzung nacheinander volgendt, das erst vnd das mittel dem letzten in den coniecturen oder schatzung der quaestionen einer gleichen proportionirung oder vorgleichung finden werden; durch das letzte, das ist durch das grose seiner

1) Hier hat der Bearbeiter seine eigenen Worte falsch verstanden. Er thut so, als ob die Lösung hiesse $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}} \pm \frac{b}{2c}$.

benennung, sollen die andern gethailt werden. Sodann das mittel seines halben thails erwechst oder verkleinert wirdt, vnd solche quantitet tetragonirt oder quadrirt, so die wirdt in einen haufen einer quantitet mit dem ersten zeichen zusamen gelesenn, radix derselben mit hinzugethaner quantitet des halben vorigen thails des mitteln zeichens wirdet entplosen den werdt des dings.[1])

Solchen textlichen sin clerlichen in gebrauch der vernunfft einzufuren, sprechen wir: die siebende Equation ist, so drey signa einander werden vorgleicht, nemlich das erst vnd mittel dem letzten jn gemelter ordnung der proportionalischen satzung, so sollen wir das erste vnd mittel durch dj grose benenung thailen, das ist durch das letzte, das mitle zeichen sollen wir darnach mediren, den halben thail in sich multipliciren, was khumbt zu dem ersten zeichen addirn. Alfsdann radix desselbigen erwachsen soll
51′ gethan werden zu dem vorgemedirten | des mitteln zeichens, vnd was do khumbt, beweist den ꝛc. Solcher equation finden wir auch 8 modos equandi, als wir dann angezaigt haben vorhin jn vnserm 17. capitel, vnd solcher erster modus equandi ist, so ℌ vnd ꝛc werden vorgleicht ʒ. Sam also, wir setzen wollen, 32 ℌ vnd 20 ꝛc seind gleich 3 ʒ. Wir thailen ℌ vnd ꝛc in ʒ, facit $\frac{32}{3}$ ℌ vnd $\frac{20}{3}$ ꝛc. Wir mediren ꝛc, facit $\frac{20}{6}$, das multiplicirn wir in sich, facit $\frac{400}{36}$; das thun wir zu dem ersten zeichen, das ist zu $\frac{32}{3}$, khomen $\frac{484}{36}$; von dem ist radix $\frac{28}{6}$; zu dem thun wir das halbe thail des mitteln zeichens, das was $\frac{20}{6}$, facit $\frac{48}{6}$ zusamen, macht 8, souil ist die ꝛc werdt. Das wollen wir probirn. Also wir haben gesatzt, das 3 ʒ seind gleich 32 ℌ vnd 20 ꝛc. So nun 8 ein ꝛc ist, so weren 20 ꝛc 160 in numeris; dazu thun wir 32 ℌ, wirdt 192: souil sollen auch 3 ʒ machen von 8. Nun ist 1 ʒ 64, das dreimal macht auch souil, vnd ist probirt, das die ꝛc 8 in numeris ist. Desgleichen mogen wir solchs beweisen, wie in vorgethaner Equation ist bewisen, durch die andern modos equandi, das wir nemen equa multiplica subsumpta; als wir setzen wollen, vff das wir anfengklich den grundt der ꝛc lernen vnnd scherffen mogen, wir setzen das
52 vnd sprechen: 32 ꝛc vnd 20 ʒ | seind gleich 3 ꝛc. Wir thailen abermals wie oben durch ꝛc, die grost benennung, nach dem text, vnd khombt nach der equation 8 der valor der ꝛc, wie vormals. Wann 3 ꝛc vnd 8 ꝛc seind 1536 in numeris, das sollen auch sein 32 ꝛc vnnd 20 ʒ. Nun 32 ꝛc von 8 seind 256 in numeris, vnd 20 ʒ von 8 seind 1280 in numeris; das thun wir zusamen, macht auch souil, vnnd ist recht. Also sprechen wir, das

---

1) Allgemeine Lösung:

$$cx^{n+2} = ax^n + bx^{n+1}; \quad x^{n+2} = \frac{a}{c}x^n + \frac{b}{c}x^{n+1}; \quad x = \frac{b}{2c} + \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c}}.$$

20 ʒ vnd 32 ℥ gleich seind 3 cℓ mit 8 subsumirt gegen den ersten modo equandi, der do was 32 ℞ vnd 20 ℥ gleich 3 ʒ, vnd also seind fort oder dritt gegen den andern auch mit 8 subsumirt pifs auf ccℓ, vnnd weither findestu equa multiplicia des ersten modi equandi, der do was ℥ vnd ℞ zu vorgleichen ʒ, welche signa gedachts modi seind fundamenta diser equation, darin alle andern reducirt werden.

Mun volget von der achten vnd letzten Equation ALGEBRAE, welche dann durch die drei modos compositos soluirt wirdt erstlich, vnd alfsdann entlich durch erstliche drei modos simplices.

Capitulum vicesimum quintum de octaua aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Octavam aequationem perscribendam illis digestis expedimus. Est namque trium signorum, quemadmodum priorum, non tamen successivorum aequipollentia, secundum | quod prius aut posterius alterum altero sit salto ordine 52′ *signorum, eoque trium fit his proximis, quod vero saltivorum primis simplicis aequationibus pollicemur exordia.*[1])

Hie vervolget ALGEBRAS die achte duction, das ist die achte Equation, vnnd laut nach jrem deutschen also:

Die achten Equation zu beschreiben, die rechnen vnd verordenen wir durch die vorgesetzte Equation, welche dann ist eine vorgleichung dreyer signa gleichmesig den nechsten dreyen gesatzten modis compositis, aber nicht angehender zeichen vnd one mittel nacheinander volgender signa der proportionalischen satzung, sonder nach dem als eins ehe dann das ander durch vberhupfung in ordnung ist gesatzt, in dem das die vergleichung ist dreyer signa, so gebrauchen wir diser nechst satzung dreyer modorum compositorum, aber in dem, das jntermiss vnd vberhupfung geschieht, so gebrauchen wir den Eingang der ersten dreyer modorum simplicium, welche dann beweisen den werdt der ℥.

Den vorstandt diser Equation einzufueren sagen wir kurtzlich, das die achte Equation ist eine vorgleichung dreyer signa, jnmassen die modi compositi seind, aber nicht on vnterlass nacheinander volgendt, sonder vberhupfung nacheinander vorgleicht werden nach form vnd weise der modorum compositorum, so drey signa werden vorgleicht | allwegen zwei dem dritten 53

1) Die Lösung besteht dem Wesen nach darin, dass man die Grössen x^2, x^3, x^4 als die zunächst zu suchenden Unbekannten betrachtet und darauf die resultierenden Gleichungen $\left.\begin{matrix} x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{matrix}\right\} = p$ nach früheren Regeln auflöst.

nach der modorum compositorum einem, so solle dann solche Equation nach form der modorum compositorum einer gemacht werden, nach dem das erst dem andern zweien, aber das erst vnd letzt dem mitteln, aber die ersten zweien dem letzten vorgleicht werden. Nachdem sie dann durch vberhupfung gesatzt seindt: wirdt die vbergehung oder vberhupfung dann zwischen den signis eines zeichens, soll das durch den andern modum simplicem volfurt werden. So sie dann geschicht zweier signa, durch den dritten simplicem. Geschicht dann vberhupfung dreyer signorum, solle das durch den vierten simplicem modum volfurt werden. Und also furter, welche dann den werdt der ꝛc beweisen.

Sam wir also wollen setzen exemplariter. wir finden auch, das dise Equation 36 modi equandi hellt, wie im 17 Capitel vormeldet. nach form der dreyer modorum compositorum, welche den valorem der equation nicht weiter strecken, dann in die proportion, das ist auf den valoren ꝛc, aber den quadrat, so ein signum vbergangen wirdt, aber des cꝛ, so zwei vbergangen werden, aber des ȝȝ, so drey vbergangen werden etc, welchen valorem
53′ radicum dj ersten drei modi simplici soluiren in den | werdt der ꝛc. Sam also wir setzen wollen: 45 ꝟ vnd 4 ȝ seind gleich 1 ȝȝ, sollen wir aigentlich mercken, das diser modus equandi diser equation geschicht durch form des dritten modus compositi, jndem das dj ersten zwei vorgleicht werden dem letzten, wann ꝟ vnd ȝ nach ordnung proportionalischer Satzung vorgehen dem ȝȝ, vnnd ein ordentliche progression geschicht eines signi zwischen zweien. Sagt vns gemelter modus, das wir durch den ȝȝ sollen thailen. Nun thailen wir numerum vnd ziens, das ist 45 ꝟ vnd 4 ȝ, mit 1 ȝȝ, ist gethailt; wir medirn ȝ, wirdt 2, furen das in sich, facit 4, das addirn wir zu ꝟ, als 45, wirdt 49; dauon radix, als 7, sam der halbe thail des mitteln wirdt 9, die progression des andern modi simplici, wann radix von 49 ist 7, vnd das halbe thail was 2, vnd 7 zusamen machen 9; die relinquiren wir zum andern modo simplici. Darumb das hie durch angezaigten modum equandi allein ein signum vbergangen wirdt, sprechen wir nach dem andern modi simplici, das radix tetragonica von 9 beweist die ꝛc, das ist 3, der valor gemelts modi equandi diser equation. Das mugen wir probirn. Dann ein ȝȝ von 3 ist 81. Nun seindt 4 ȝ von 3 in numeris 36,
54 vnd 45 ꝟ dazu seind auch 81: ist | recht. vnd desgleichen magstu die andern modos equandi diser Equation genuglich figurirt jm 17 Capitel nach form der ander modorum compositorum, vnd alſsdann valorem reliquiren zu den simplicibus modis, nachdem die progression geschicht, vnd solchen valorem dann den coſs entlich volfuren durch dieselben. Vnd also hastu grundtlich vnterrichtung der achten Equation vnd jrer modorum equandi, die wir dann jm 17 capittel nach ordnung erzelt haben.

Nun volget das ander Buch von dem Algorithmo, gehorig zu der Gebra vnd Almuchabola, vnd wie man den zu der Gebra gebrauchen soll, vnnd zum ersten de additis et diminutis signorum.

Explicit liber primus ALGEBRAE.

| *Secundus liber* INITII ALGEBRAE *Arabis, viri clarissimi, ad summum* 54'
mathematicum eo tempore YLEM *geometren foeliciter incipit.*[1])

Ad ea quae in Gebra et Almuchabola disseruimus de signis utilitatis atque commodi erunt quantitates additae ac diminutae et ea, quae circa easdem versari habent, quae quidem penes affirmationem et priuationem constituuntur.

Hie hebet ALGEBRAS an sein ander Buch der Gebra vnnd Almuchabola, vnnd ist, do er saget von den gebrauch der Algorithmorum gehorig zu gemelter Gebra, vnnd laut zum teutschen also:

Zu dem wir vorgemeldet haben jn Gebra vnd Almuchabola von den signis, werden nutz vnnd figurlich werden die quantitet genandt additae vnd diminutae vnd die dobej jnen verhandelt werden, welche quantitet addite vnd diminute werden mit der affirmirung vnd negirung bezeichent und beschrieben.

Von disen quantiteten vnd gemelten capiteln den schriftlichen sin vnd vorstandt des texts zu lautern, saget der text aigentlich: zu dem wir vorgesatzt haben in der Gebra von den signis, sollen wir mercken, das wir nemen solchen gebrauch der signorum | in Gebra Algorismum de additis et 55
diminutis signorum, der dann nicht allein in gebrauch der signa gehelt vnd gebraucht wirdt, sonder furter auch die binomia betreffent, wann solche signa noch anhangen der matri pregnanti, das ist, das sie noch nicht absolute in numeris seind. Wiewol das sie gleichmessig mit der affirmirung vnd negirung alſs die binomia vnd residua beschrieben werden, so seind sie doch vnterschiedlich, jndem, das die binomia absoluti numeri surdi sein, deſsgleichen jre residua, aber dise quantitet seind noch nicht so weit bracht, sonder in schwengernder mutter, wann sie noch kheiner Equation bracht seindt, vnd hierumb sagt der text, das sie nutze werden solche quantitet addite vnd diminute, das ist, zu dem wir gesatzt haben, das seind zu den

1) Hier haben die Handschriften C. 405 und C. 349 als Überschrift: *Initium secundi libri* ALGEBRAE . . . *incipit,* was nur aus Missverständnis enstanden sein kann. Dieses zweite Buch behandelt die Rechnung mit positiven und negativen Zahlen für ganze und gebrochene Ausdrücke. Der Bearbeiter spricht bald von affirmirten und negativen Zahlen, bald von numeris additis et diminutis. Er bedient sich der Zeichen + und —, die Dresdner Handschriften haben letzteres in der Form ÷

equationibus signorum, mit denen, die do pej jnen gehandelt werden. Das seind dann bedeutliche speties, wie man die jn addirung, subtrahirung, multiplicirung etc. gebrauchen soll, vnd werden solche quantitet eigentlich verzeichent mit der affirmirung vnd negirung, das ist mit dem signo minus vnd plus. Dann so einem zeichen wird zugesatzt das zeichen +, bedeut, das sie ist quantitas addita; wird aber dem signo zugeschrieben das zeichen
55′ —, bedeut, | das es ist quantitas diminuta, jnmassen das eigentlich jn den Tabeln Algebrae gesatzt vnd angezeigt ist, vnd solcher Algorismus gehet aus vniuersaliter durch alle signa, das ist, das man einen procefs hellt in additis vnd diminutis, es sein cℓ, ʒ oder ʒʒ, das ist auch in den binomiis vnd residuis, wann radix quadrata nicht anders addirt wirdt den cℓ der affirmirung oder negirung, vnd hierumb so ist diser algorismus nicht allein gegrundet auf die affirmirung vnd negirung, das ist auf die quantitet addita vnd diminuta signorum jn vniuersali der signorum in numeris respectiuis oder pregnantibus, sonder auch absolutis surdis. Darumb saget vnd setzet Algebras zwen Algorismi jn gebrauch seiner Gebra vnd Almuchabola, das ist Algorismum de additis et diminutis, der dann genandt numerorum respectiuorum oder pregnantium, den andern de binomiis et recisis genandt surdorum absolutorum.

Zum ersten volgt hernach das ander Capitel der ersten speties des algorismi de additis et diminutis, das ist Additio.

56 *Capitulum secundum de prima spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae acceruatio appellatur, eiusque expositio.* |

Signorum accervationem proponimus. Quae eiusdem nominis sunt, eandem invariabilem in aggregatione retinere quantitatis habitudinem; quod si alterum altera quantitate disparatum sit, colligendum potentior excessus, refecti positivus vel privativus unius ab alio inscribatur hoc, quod in denominatis respectivis et absolutis binomicis numerorum esse convenit proprium.

Hie cleret vns Algebras das ander capitel seines andern Buchs, vnnd drucket aus die erste spetiem, so bei den quantiteten addite vnd diminute wirdet gefunden, mit namen die zusammenfugung der signa mit obscribirten quantiteten der negation vnd affirmation, welche erste speties Additio genanndt, auch nachuolgendt die andern berurt hat kurzlich im ersten Capitel, da er spricht: *Et ea, quae circa easdem versari habent* etc., also finden wir, das erstlich bei den quantiteten addite vnd diminute vorhandelt wirdt vorneint vnd nachuolgendt, welchs dann zum teutschen lautet also:

Wir legen vor die Zusammenfugung der signorum. Die do seind eines namens von den zeichen zusammenhaltung jn der

addirung oder zusamengehauflichung eine vormerckhung nemen des signi mit der quantitet der affirmirung oder negirung; so aber vorruckte signa mit den quantitatibus denominatis eines namens werden zusamen wurden gegeben, so soll die angeschnitten | zal eine von der andern des zeichens der grossen vber- 56
treffung der affirmirung vnd negirung beschrieben werden, vnnd solchs ist die aigenschafft mit den benenten zalen von den signis additis oder diminutis + vnd — auch in disen plossen vnnd absolutis surdis numeris a radice benent.

Solchen Text vorstentlich zu declariren, sprechen wir, so wir wollen addirn Signa, die eines namens seindt mit beigeschriebenen quantiteten denominirt der negation oder affirmation, so sollen wir mercken eben, ob die denominirt quantiteten beyde seind univoca oder disparata. Seind die quantitet denominate univoce, so bleiben sie vnvorruckt der affirmation affirmativa, vnd negation negativa. Seind sie aber disparata, so soll ein zal von der andern gezogen werden, vnnd was pleibt, soll mit der grosten vbertretung seiner quantitet der addita vnnd diminuta geschrieben werden. Sam also, wir exemplariter setzen wollen: Wir wollen addirn 6 ℳ + 9 ℛ zu 5 ℳ + 12 ℛ. Sprechen wir erstlich, das beiderseit univoca seind, nemblich addita, vnnd hierumb addirn wir ytzliche signa eines namens mit vnverruckter quantitet addita. Wir addirn 5 vnd 6, werden 11 ℳ, vnd 9 + 12, werden 21 ℛ. Also sprechen wir, das tota addita seind 11 ℳ vnd 21 ℛ. Stet also: | [1]) 57

$$\begin{array}{r} 6\,\mathcal{M} + 9\,\mathcal{R} \\ 5\,\mathcal{M} + 12\,\mathcal{R} \\ \hline 11\,\mathcal{M} + 21\,\mathcal{R}. \end{array}$$

So wir aber negativa exemplificirn, sam also: 5 ȝ — 6 ꝛ̄ wollen wir addirn zu 9 ȝ — 4 ꝛ̄, sprechen wir, das die denominata aber vnivoca seind a negatione. Sprich 5 zu 9 werden 14 ȝ vnd 4 zu 6 werden 10 ꝛ̄. Also ist die gantze additio 14 ȝ — 10 ꝛ̄. Steet also:[2])

$$\begin{array}{r} 5\,\mathfrak{z} - 6\,\bar{\mathfrak{c}} \\ 9\,\mathfrak{z} - 4\,\bar{\mathfrak{c}} \\ \hline 14\,\mathfrak{z} - 10\,\bar{\mathfrak{c}}. \end{array}$$

So wir aber disparata setzen, also das excessus negativus ist potentior. sam also 7 ℳ + 3 ℛ wollen wir addirn zu 5 ℳ — 12 ℛ, addirn wir 5 vnd 7, werden 12 ℳ. Nun sollen wir die disparata auch addirn, so ist

---

1) Das ist in moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 6 + 9x \\ 5 + 12x \\ \hline 11 + 21x. \end{array}$

2) Ebenso: $\begin{array}{r} 5x^2 - 6x^3 \\ 9x^2 - 4x^3 \\ \hline 14x^2 - 10x^3. \end{array}$

negatiuum potentius, so ziehen wir ab nach laut des texts 3 von 12, restant 9 ℨ, der mussen wir irer Beneuung der negation schreiben, also were die gantze addition 12 ℵ — 9 ℨ. Steet also[1]):

$$\begin{array}{r} 7\,\aleph + 3\,\mathfrak{z} \\ 5\,\aleph - 12\,\mathfrak{z} \\ \hline 12\,\aleph - 9\,\mathfrak{z}. \end{array}$$

So wir aber setzen, affirmatiuum sei potentius. Sam also: 7 ʒ — 1 ꝯ wollen wir addirn zu 3 ʒ + 8 ꝯ, Addirn wir addita, werden 10 ʒ, wir
57′ addirn auch | disparata, sagt der text, eins vom andern zu ziehen: nemen wir 1 von 8, pleiben 7 ꝯ. Also soll potentior excessus seiner benenung der affirmation beschrieben werden, vnd wird tota additio 10 ʒ + 7 ꝯ. Steet also[2]):

$$\begin{array}{r} 7\,\mathfrak{z} - 1\,\mathfrak{c} \\ 3\,\mathfrak{z} + 8\,\mathfrak{c} \\ \hline 10\,\mathfrak{z} + 7\,\mathfrak{c}. \end{array}$$

Solchs zu probirn, so nemen wir, das ℨ sei valor in numeris 6. Nun wern 7 ʒ von 6 in numeris 252, dauon sollen wir abziehen den ꝯ, dann wir haben gesatzt 7 ʒ minus 1 ꝯ. Nun ist 1 ꝯ von 6 in numeris 216, die ziehen wir ab von 252, pleiben 36. Nun suchen wir, was 3 ʒ sein von 6, facit 108, vnd 8 ꝯ von 6 machen 1728, das addirn wir zu 108, facit 1836. Die addirn wir zu den ersten 36, khomen 1872, vnd souil sollen auch machen 10 z vnd 7 ꝯ. Suchen wir 10 ʒ von 6, facit 360 in numeris. Nun 7 ꝯ von 6 machen 1512, addirn wir dazu 360, so khomen 1872, jnmassen wir oben gesatzt, vnnd ist recht. Desgleichenn magstu die andern auch probirn in gleicher form valorem zu nemen.[3])

58 Nun volget von der abzihung das dritte Capitel |

Capitulum tertium de secunda spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae detractio appellatur eiusque expositio.

Detractionem appellamus univocorum minoris potentiae a maiori separationem quandam servata quantitate ascripta. Eorum autem univocorum, quorum distrahendum potentioris fit excessus, una ab alia resecetur, quod relictum fuerit, disiuncta quantitate priori notetur. Si vero aequivocantur

---

1) In moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 7 + 3x \\ 5 - 12x \\ \hline 12 - 9x. \end{array}$ 2) Desgleichen: $\begin{array}{r} 7x^2 - x^3 \\ 3x^2 + 8x^3 \\ \hline 10x^2 + 7x^3. \end{array}$

3) Diese Art der Probe ist ja noch heute beim Schulunterrichte gebräuchlich.

habitudines, in unam congeriem coacerventur, productum, quod crescit distrahendo, contraria quantitate inficetur.

Hie volgendt leutert ALGEBRAS seine andere speties der quantitatum aditarum vnd diminutarum genandt die Abziehung, vnnd laut solch gemelt capitel also:

Die abziehung der signorum die seindt eines namens oder einer Benenung, die heisen wir eine absonderung der cleinern macht von der grossern, doch das do behalten werden die beschrieben quantitet der benenung. Sonder aber die do auch eins namens seind vnd einer Benennung, welcher dann das abzihende grofser excess ist, dann das von dem man abzeucht, so soll ein quantitet benent von der andern abgeschnitten werden, vnnd das pleibende soll mit verwandelter benenter quantitet der vordern vniuoca gezeichnet werden. So vnnd aber, das sie equiuocirt seind, das ist so eine addita vnnd die andere diminuta seind, sollen die jn ein samlung gelesen werden, vnd das erwachsende sol mit vorwandelter benenter quantitet gegen dem das alwegen sol werden bezeichent vnd beschrieben.

Solchs zu scherpfen vnd kurtzlich einzufuren, sprechen wir, so do beiderseits vniuoca seind eines namens, vnd das abzihende cleiner macht ist, dann von dem man zeucht, so soll eins vom andern mit vnverruckter benenung gezogen werden. Ist aber das grosser excess, das man abzihen soll, so soll eins vom andern gezogen werden, vnd das pleibendt solle mit voranderter benenung geschrieben werden. Seind sie aber equivocirt, das ist das einerseit ist addita vnd der andern diminuta, so sollen die zusamen gethun werden, vnd das erwachsende soll mit voranderter benenung geschrieben werden.

Als wir das exemplariter setzen wollen, zum ersten, wann beiderseit vniuoca affirmatiua seind numerorum excessus. Sam also wir setzen wollen exemplariter $3\,\mathcal{H} + 3\,\mathcal{C}$ sollen wir abziehen von $6\,\mathcal{H} + 12\,\mathcal{C}$. Wir nemen
| eins vom andern, restat $3\,\mathcal{H} + 9\,\mathcal{C}$, dann daruon man zichen soll, ist 59
vbertreffendt, derhalben verwandelt sich nicht das zeichen, vnd steet also[1]):

$$\begin{array}{r} 6\,\mathcal{H} + 12\,\mathcal{C} \\ 3\,\mathcal{H} + 3\,\mathcal{C} \\ \hline 3\,\mathcal{H} + 9\,\mathcal{C}. \end{array}$$

Zum andern setzen wir peiderseits vniuoca negatiua auch numerorum

---

1) In moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 6 + 12x \\ 3 + 3x \\ \hline 3 + 9x. \end{array}$

excessus des abzihenden. Also zihen wir 10 ꝛ — 3 ꝛ von 12 ꝛ — 8 ꝛ, pleiben 2 ꝛ — 5 ꝛ, vnd steet also wie hie[1]):

$$\begin{array}{r} 12\ \text{ꝛ} - 8\ \text{ꝛ} \\ \underline{10\ \text{ꝛ} - 3\ \text{ꝛ}} \\ 2\ \text{ꝛ} - 5\ \text{ꝛ}. \end{array}$$

Zum dritten saget der text: Sondern aber der, die auch eines namens seind vnnd einer benenung, welcher dann das abzihende grosser excessus ist dann das, von dem man abzihet, soll eine benente quantitet von der andern abgezogen werden, vnd das bleibende sol jn voranderter benenter quantitet der vordern vniuoca vorzeichent werden. Sam also do vniuoca affirmatiua seind, wir wollen abzihen 5 ℳ + 9 ꝛ von 10 ℳ + 3 ꝛ. Also zihen wir 5 von 10, pleiben 5 ℳ, vnd nemen 3 von 9 ꝛ, pleiben 6 ꝛ, vnd beschreiben
59′ sie mit dem signo —, also pleiben 5 ℳ — 6 ꝛ: steet also[2]): |

$$\begin{array}{r} 10\ \text{ℳ} + 3\ \text{ꝛ} \\ \underline{5\ \text{ℳ} + 9\ \text{ꝛ}} \\ 5\ \text{ℳ} - 6\ \text{ꝛ}. \end{array}$$

So aber vniuoca negatiua sein. Also wir wollen abzihen 10 ꝛ — 12 ꝛ von 12 ꝛ — 5 ꝛ. Nun 10 ꝛ von 12 restant 2 ꝛ, vnd 12 von 5 khonnen wir nicht nemen, derhalben zihen wir 5 von 12, pleiben 7, die affirmirn wir, vnd restat also 2 ꝛ + 7 ꝛ. steet also[3]):

$$\begin{array}{r} 12\ \text{ꝛ} - 5\ \text{ꝛ} \\ \underline{10\ \text{ꝛ} - 12\ \text{ꝛ}} \\ 2\ \text{ꝛ} + 7\ \text{ꝛ}. \end{array}$$

Zum vierdten saget der text: vnnd so aber die equiuocirt seind. Sam also, wir setzen wollen, wir ziehen ab 5 ℳ — 3 ꝛ von 7 ℳ + 8 ꝛ. Nemen wir 5 von 7, restet 2 ℳ, vnd 3 von 8 seind disparate. Hierumb addirn wir 3 vnd 8, werden 11, vnd affirmirn das, wann die substraction oder das subtrahendem an jene selbst ist privatiuum, vnd so dann das vor priuatiue benent, machen die zwei priuatiua affirmatiuum, vnd steet also im restant 2 ℳ vnd 11 ꝛ[4]):

$$\begin{array}{r} 7\ \text{ℳ} + 8\ \text{ꝛ} \\ \underline{5\ \text{ℳ} - 3\ \text{ꝛ}} \\ 2\ \text{ℳ} + 11\ \text{ꝛ}. \end{array}$$ |
60

---

1) In moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 12x - 8x^3 \\ \underline{10x - 3x^3} \\ 2x - 5x^3. \end{array}$ 2) Desgleichen: $\begin{array}{r} 10 + 3x \\ \underline{5 + 9x} \\ 5 - 6x. \end{array}$

3) Ebenso: $\begin{array}{r} 12x^3 - 5x^4 \\ \underline{10x^3 - 12x^4} \\ 2x^3 + 7x^4. \end{array}$ 4) Das ist: $\begin{array}{r} 7 + 8x \\ \underline{5 - 3x} \\ 2 + 11x. \end{array}$

So wir aber distrahendo setzen: Sam wir wollen abzihen 2 ℳ + 3 ℛ von 68 ℳ — 20 ℛ, zihen wir 2 von 68 ℳ, plaiben 66, vnd 3 von 20 seind disparate. Hierumb addirn wir 20 vnd 3, werden 23 ℛ, die negiren wir, wann wir haben gesatzt, das die subtraction an jr selbst priuatio ist. Nun ist das distrahendum affirmatiuum gesatzt, das dann aber an sich selbst priuirt das affirmatiuum, vnnd steet im Restant 66 ℳ ÷ 23 ℛ. steet also[1]):

$$\begin{array}{r} 68\,\mathcal{M} - 20\,\mathcal{R} \\ 2\,\mathcal{M} + 3\,\mathcal{R} \\ \hline 66\,\mathcal{M} - 23\,\mathcal{R}. \end{array}$$

Das wollen wir probirn. Setzen wir, der valor der ℛ sei 2 jn numeris absolutis. Also werden 2 ℳ vnd 3 ℛ vff einen thail 8, so were vffm andern 68 ℳ — 20 ℛ, das were jn numeris 28. Nun ziehen wir 8 von 28 pleiben 20 ℳ. Souil sollen auch das restat machen. Als 66 ℳ — 23 ℛ. wann 23 ℛ seind 46 in numeris, die nemen wir von 66, pleiben auch 20 wie vor, desgleichen in andern.

Capitulum quartum de tertia spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae multiplicatio appellatur, eiusque tabellaris expositio. | 60

Numerorum Gebrae el Almuchabolae seriem proportionalem descripsimus, quo mutuo crescentiam signorum alterationes habent. Horum transverse unius in alterum ordine proportionali relinquantur restingui tabulare. Quod si univocum univoce ductum fuerit positivi, sin vero disparatae privationis inmutabiliter custodies quantitatem.

Hie saget Algebras von der dritten spetie der quantiteten additarum vnd diminutarum, Multiplicatio genandt, vnnd laut zum teutschen also:

Der zalen Gebrae vnd Almuchabolae proportionalischer Satzung oder ordnung haben wir vormalen beschrieben, durch welche sie haben die wachsung der vorenderung der zeichen, welcher zeichen furung eins in das ander vnd alſsdann transferse oder kreutzweis der gesatzten proportionalischen ordnung haben wir gelossen den fustapfen der verwandlung die tabellirung. Also die vniuoca mit einander multiplicirt werden, so wirstu verwandelt behalten die quantitet der affirmirung; so aber disparata eine in der ander gemultiplicirt werden, so erwechst allemal die privation, das ist negativum.

---

1) In moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 68 - 20x \\ 2 + 3x \\ \hline 66 - 23x. \end{array}$

Solchen text kurtzlich zu verstehen, sprechen wir: so do miteinander werden gemultiplicirt die quantiteten addite oder diminute, so sollen sie in
61 einander gefurth | werden jtzliche in jre correlativum oder beigesatzt zeichen vnd alſsdann creutzweis, vnd was dann daraus entspreusst durch verwandlung der signorum findestu in gemelten tafeln der signorum, was aber daraus khumbt respectu affirmationis ist negationis, findestu jn der andern tafel; wann, so vniuoca werden mit einander gemultiplicirt, so erwechst affirmativum, wann aber disparata werden mit einander gemultiplicirt, so erwechst negativum.

Zum ersten wollen wir setzen exemplariter, wann vniuocum affirmatiuum ein ander affirmatiuum multiplicirt. Sam also 3 ℳ + 2 ʒ wollen wir multiplicirn mit 5 ꝛ vnnd 8 ʒ. Setzen wir solchs correlatiue also:

$$\begin{array}{l} 3\ \mathcal{M} + 2\ ʒ \\ 5\ ꝛ + 8\ ʒ, \end{array}$$

vnd multiplicirn 5 ꝛ in sein correlatiuum als 3 ℳ, werden 15 ꝛ, wann wir finden, in den tafeln auch anfengklich demonstrirt ist, das ℳ in ꝛ gefurtt ꝛ generirt. Nun multiplicirn wir 8 ʒ in 2 ʒ, facit 16 ʒʒ, wann so ʒ multiplicirt ʒ, wirdt ʒʒ vormeldet auch in vestigio der tabellar gefunden. Darnach so multiplicirn wir transferse 5 ꝛ mit 2 ʒ, wirdt 10 ꝯ, vnd 3 ℳ in 8 ʒ,
61′ facit 24 ʒ, vnd | steet die multiplication in forma 15 ꝛ + 16 ʒʒ + 10 ꝯ + 24 ʒ. steet also wie hie[1]):

$$\begin{array}{c} 3\ \mathcal{M} + 2\ ʒ \\ \times \\ 5\ ꝛ + 8\ ʒ \\ \hline 15\ ꝛ + 16\ ʒʒ + 10\ ꝯ + 24\ ʒ. \end{array}$$

Dann aber vniuocum negatiuum vniuocum negatiuum multiplicirt. Sam also, 2 ꝛ — 2 ꝯ wollen wir multiplicirn mit 2 ℳ — 5 ꝛ. Setzen wir in forma priori, wie hie verzeichnet steet:

$$\begin{array}{l} 2\ ꝛ - 2\ ꝯ \\ 2\ \mathcal{M} - 5\ ꝛ, \end{array}$$

vnd sprechen: 2 mal 2 ist 4 ꝛ, vnd 5 mal 2 seind 10 ʒʒ iuxta tabulam, wann negatiuum negatiuum multiplicirt. Nun sprich transferse: 2 mal 2 sein 4 ꝯ, vnd 2 mal 5 sein 10 ʒ, vnd stehen die Multiplication in forma 4 ꝛ + 10 ʒʒ — 4 ꝯ — 10 ʒ, vnd steht also[2]):

---

1) In moderner Bezeichnung:

$$(3 + 2x^2)(5x + 8x^2) = 15x + 16x^4 + 10x^3 + 24x^2.$$

2) $$(2x - 2x^3)(2 - 5x) = 4x + 10x^4 - 4x^3 - 10x^2.$$

$$\begin{array}{c} 2\,\mathfrak{z} \quad -2\,\mathfrak{c} \\ \times \\ 2\,\mathfrak{s} \quad -5\,\mathfrak{z} \\ \hline 4\,\mathfrak{z} + 10\,\mathfrak{zz} - 4\,\mathfrak{c} - 10\,\mathfrak{z}. \end{array}$$

Wann wir aber disparata mit einander multiplicirn sollen. Sam also $5\,\mathfrak{s} + 7\,\mathfrak{c}$ mit $6\,\mathfrak{z}$ minus $8\,\mathfrak{zz}$. setzen wir das aber more correlatiuorum wie hie:

$$\begin{array}{l} 5\,\mathfrak{s} + 7\,\mathfrak{c} \\ 6\,\mathfrak{z} \quad - 8\,\mathfrak{zz}, \end{array}$$

vnd sprechen: 6 mal 5 seind 30 $\mathfrak{z}$, vnd 7 mal 8 | seind 56 bis —. Nun 62
solchs transferse, sprechen wir 6 mal 7 macht 42 ß, vnd 5 mal 8 seind 40 $\mathfrak{zz}$, vnd steen dise multiplication also: 30 $\mathfrak{z}$ — 56 bis — 40 $\mathfrak{zz}$ + 42 ß, vnd steet also, wie hie[1]):

$$\begin{array}{c} 5\,\mathfrak{s} + 7\,\mathfrak{c} \\ \times \\ 6\,\mathfrak{z} \quad - 8\,\mathfrak{zz} \\ \hline 30\,\mathfrak{z} - 56\,\text{bis} - 40\,\mathfrak{zz} + 42\,\text{ß}. \end{array}$$

Solchs zu probirn, nemen wir valorem $\mathfrak{z}$ in numeris 3. Also sprechen wir $5\,\mathfrak{s} + 7\,\mathfrak{c}$ seind 194 in numeris. Nun 6 $\mathfrak{z}$ minus 8 $\mathfrak{zz}$ seind negatiue in numerus 54 — 648. Das sollen wir multiplicirn mit 194, facit 10476 — 125712, vnd solchs solle die Multiplication 30 $\mathfrak{z}$ — 56 bis — 4 $\mathfrak{zz}$ + 42 ß auch machen in numeris. Nemen wir 30 $\mathfrak{z}$ von 3 in numeris seind 270, vnd nemen 42 ß von 3 seind in numeris 10206; zu solchen addirn wir 270, wann unter der gantzen multiplication ist allein 30 $\mathfrak{z}$ vnd 42 ß affirmativum, vnd khomen 10476 in numeris affirmatiue. Nun suchen wir weither die negatiua: 56 bis von 3 seindt 122472 in numeris negatiue, vnnd 40 $\mathfrak{zz}$ seind 3240; das addirn wir zusamen, facit 125712 negatiue: also wer die gantze Multiplication 10476 — 125712 wie oben, vnd ist recht. | 62′

Die Tafel.

| Nun wollen wir nemen affirmation, das erste gesatzte Exempel dis 63′
Capitels zu probirn. Wir nemen valorem $\mathfrak{z}$ 5 in numeris, also weren $3\,\mathfrak{s} + 2\,\mathfrak{z}$ in numeris 53. Nun 5 $\mathfrak{z}$ von 5 seindt 25, vnd 8 $\mathfrak{z}$ seindt 200, das weren in numeris zusamen 225, die sollen wir mit 53 multiplicirn, facit 11925: das were die gantze multiplication, vnd dasselbe sollen auch machen $15\,\mathfrak{z} + 16\,\mathfrak{zz} + 10\,\mathfrak{c} + 24\,\mathfrak{z}$. Nun 15 $\mathfrak{z}$ von 5 seind 75, vnnd

1) In moderner Bezeichnung:

$$(5 + 7x^3)(6x^2 - 8x^4) = 30x^2 - 56x^7 - 40x^4 + 42x^5.$$

16 ȝȝ seind 10000, vnd 10 cℓ seind 1250, vnd 24 ȝ seind 600. Solchs addirn wir zusam, facit 11925, jnmassen wie oben. Nun folgett hernach, wie man gemelte affirmation sol machen aus ehgerurten text der proportionalischen satzung:

62′ u. 63 | TABVLA PRIMA NVMERORVM GEBRÆ ET ALMVCHABOLÆ MVLTIPLICATIONIS.[1])

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	Locus ductionum	
		1	2	4	8	16	32	64	128	256	512		
		ꝏ	ꝏ	ȝ	cℓ	ȝȝ	ß	ȝcℓ	biß	ȝȝȝ	ccℓ		
1	ꝏ	ꝏ 1	ꝏ 2	ȝ 4	cℓ 8	ȝȝ 16	ß 32	ȝcℓ 64	biß 128	ȝȝȝ 256	ccℓ 512	Locus ductionum	
2	ꝏ	ꝏ 2	ȝ 4	cℓ 8	ȝȝ 16	ß 32	ȝcℓ 64	biß 128	ȝȝȝ 256	ccℓ 512	ȝß 1024	10	das ist, wie weit der radix von seiner stadt ausgewandert ist.
4	ȝ	ȝ 4	cℓ 8	ȝȝ 16	ß 32	ȝcℓ 64	biß 128	ȝȝȝ 256	ccℓ 512	ȝß 1024	terß 2048	11	
8	cℓ	cℓ 8	ȝȝ 16	ß 32	ȝcℓ 64	biß 128	ȝȝȝ 256	ccℓ 512	ȝß 1024	terß 2048	ȝȝcℓ 4096	12	
16	ȝȝ	ȝȝ 16	ß 32	ȝcℓ 64	biß 128	ȝȝȝ 256	ccℓ 512	ȝß 1024	terß 2048	ȝȝcℓ 4096	quadrß 8192	13	
32	ß	ß 32	ȝcℓ 64	biß 128	ȝȝȝ 256	ccℓ 512	ȝß 1024	terß 2048	ȝȝcℓ 4096	quadrß 8192	ȝbiß 16384	14	
64	ȝcℓ	ȝcℓ 64	biß 128	ȝȝȝ 256	ccℓ 512	ȝß 1024	terß 2048	ȝȝcℓ 4096	quadrß 8192	ȝbiß 16384	cℓß 32768	15	
128	biß	biß 128	ȝȝȝ 256	ccℓ 512	ȝß 1024	terß 2048	ȝȝcℓ 4096	quadrß 8192	ȝbiß 16384	cℓß 32768	ȝȝȝȝ 65536	16	
256	ȝȝȝ	ȝȝȝ 256	ccℓ 512	ȝß 1024	terß 2048	ȝȝcℓ 4096	quadrß 8192	ȝbiß 16384	cℓß 32768	ȝȝȝȝ 65536	quintß 131072	17	
512	ccℓ	ccℓ 512	ȝß 1024	terß 2048	ȝȝcℓ 4096	quadrß 8192	ȝbiß 16384	cℓß 32768	ȝȝȝȝ 65536	quintß 131072	ȝccℓ 262144	18	

1) In dieser Tabelle sind die Potenzeichen der Algebra bis zu x^{18} fortgesetzt. Das Prinzip ist dabei stets das multiplikative der Exponenten. So ist z. B. $x^{18} = x^{2 \cdot 9}$. Sind die Exponenten Primzahlen, so entsteht stets ein neues *Sursolidum,* die hier bis zum quintß $= x^{17}$ fortgesetzt sind.

| Zum ersten der tabeln der signatorum so mercken wir nach der proportionalischen Satzung, vnd setzen nacheinander die signa bis in die 13. duction, vnd beschreiben die nach einem gnomonem. Vnd so dann solcher gnomo gemacht ist, so heben wir an die andere gnomon an den ꝛ, vnd finieren den mit ȝß, darnach machen wir den dritten, heben den an mit dem ȝ, vnd finiren den mit dem terß, vnd also furter; finden wir, das sie seind continua proportionalia, vnd in costirter Linien finden wir numeros ductionum, wie weit sie von den ꝛ gewandert sein, von welchen | tafeln wir vrsprunglich sagen werden von den soliden. Hierumb gebrauchen wir der hierher nit weiter, dann das wir mogen wissen, so ein signum das ander multiplicirt, was daraus ist entspriefsen. Wie wol sie ettwas von vmb sich begreifen vnd vmb sich helten, so ist vns difsmal nicht weither not zu declariren. 63′ wieder 64

| TABVLA SECVNDA NVMERORVM GEBRÆ ET ALMVCABOLÆ MVLTIPLICATIONIS.[1]) 66

	Affirmatum $+1\,\mathcal{H}$	Negativum $-1\,\mathcal{H}$	Affirm. Negat. $1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Negat. Negat. $-1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Affirm. Affirm. $1\,\mathcal{H}+1$ ꝛ
Affirmatum $+1\,\mathcal{H}$	Affirmatum $+1\,\mathcal{H}$	Negativum $-1\,\mathcal{H}$	Affirm. Negat. $1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Negat. Negat. $-1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Affirm. Affirm. $1\,\mathcal{H}+1$ ꝛ
Negativum $-1\,\mathcal{H}$	Negativum $-1\,\mathcal{H}$	Affirmatum $+1\,\mathcal{H}$	Negat. Affirm. 1 ꝛ $-1\,\mathcal{H}$	Affirm. Affirm. $1\,\mathcal{H}+1$ ꝛ	Negat. Negat. $-1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ
Affirm. Negat. $1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Affirm. Negat. $1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Negat. Affirm. 1 ꝛ $-1\,\mathcal{H}$	Affirm. Affirm. $1\,\mathcal{H}+1$ ꝛ	Affirm. Negat. $1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Affirm. Negat. $1\,\mathcal{H}+1$ ꝛ
Negat. Negat. $-1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Negat. Negat. $-1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Affirm. Affirm. $1\,\mathcal{H}+1$ ꝛ	Affirm. Negat. $1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Affirm. Affirm. $1\,\mathcal{H}+1$ ꝛ	Neg. Neg. Neg. $-1\mathcal{H}-1$ ȝ -2 ꝛ
Affirm. Affirm. $1\,\mathcal{H}+1$ ꝛ	Affirm. Affirm. $1\,\mathcal{H}+1$ ꝛ	Negat. Negat. $-1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Affirm. Negat. $1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ	Neg. Neg. Neg. $-1\mathcal{H}-1$ ȝ -2 ꝛ	Affir. Affir. Affir. $1\,\mathcal{H}+1$ ȝ $+2$ ꝛ

| Nun volget von der andern tafeln der Benenung, das ist von dem affirmativo vnd negativo. So mercken wir, das der text saget, so man vniuoca mit einander multiplicirt, das positiua quantitas entspringt, das ist quantitas addita; so aber priuatiua vnter einander werden multiplicirt, so 64 wieder

1) Bei dieser Tafel dürfte wohl zu beachten sein, dass das Minuszeichen *für sich allein* vorkommt als $-\mathcal{H}$. Dass die Tafel nicht in allen Stücken richtig ist, sondern in mehreren Fächern dreitheilige Produkte stehen müssten, auch bei $1\,\mathcal{H}-1$ ꝛ mal $1\,\mathcal{H}+1$ ꝛ jedesmal $1\,\mathcal{H}-1$ ȝ als Produkt erscheinen sollte, ist klar. Ich hielt mich aber nicht befugt, hier eine Änderung oder Berichtigung eintreten zu lassen.

entspringt priuatiuum, vnd hierumb ist dise tafeln gesatzt oben an der ersten leng die benenunge nacheinander, der ersten latitudine auch. Dieselben, sind alſsdann more quatuor numerorum proportionalium jn einander gemultiplicirt, also das alle wege correlatiua eiusdem signi seind, alſsdann jn der proportionalischen ordnung ist, vnnd die zalen jn gemelter tafeln explicirn. Nun folget das funfft capitel von diuisio nach diser tafell.

64′ | *Capitulum quintum de quarta spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae divisio appellatur, eiusque tabularis expositio.*

Prohibemur divisionem quantitatum additarum atque diminutarum numerorum Gebrae et Almuchabolae, donec ad opponendum restaurando vel diminuendo redactae fuerint in aequationem committendam. Sin vero dividantur, supponendum est, unitates in numeris esse aequales. addita addere licet diminuereque privata. divisoque producto per relictum vel euerse numero per numerum. Quibus mutuo detractis quotientis indiferentis secundari ad addita et diminuta generaliter excessus habetur.[1])

Hie saget Algebras von seiner vierdten speties gemelter quantiteten additarum vnnd diminutarum Gebre vnd Almuchabole division genandtt, vnd laut zum teutschen also:

Wir vorpieten die thailung benenter quantiteten der affirmirung vnd negirung, das ist der additen vnd diminuten Gebre vnd Almuchabole also lange, biſs sie gegeben werden vnd verendert jn die equationen zu thailen mit gegeneinandersatzung der vergleichuug zu restauriren der benennunge, alſs dann hernach volgen wirdt. So sie aber gethailt werden die additen vnd
65 diminuten quantiteten, so ist das vorzusetzen vnd | praesupponiren, das solche quantitet der affirmirung vnd negirung gleich seind den numeris absolutis, das ist, das sie nicht cleiner noch grosser jn jrer bedeutung seind, dann do seind vnitates in numeris absolutis. Alſsdann sollen die addita zu den numeris gethan werden, vnd die minuten abgezogen, vnd soll dann der dividendus gethailt werden durch den divisorem, das ist das product aus den additen vnd numeris, oder restant aus den diminuten vnd numeris oder e contrario, vnd alſsdann ein absolut

1) Unser Verfasser kennt also die Division ganzer Funktionen durch einander nicht. Das von ihm beschriebene umständliche Verfahren, um Ausdrücke wie $56 - 4$ und $20 + 4$ durch einander zu dividieren, hat nur den Zweck, den Quotienten auch in derselben Form und zwar so zu finden, dass der erste Theilquotient der der beiden ersten Zahlen, also hier $\frac{56}{20} = 2\frac{4}{5}$, wird.

numerus durch den andern solcher zweier quaniteten zal sol von einander gezogen werden, vnd die vbertreffung der quantiteten eins gegen dem andern, so wirdt solcher excess gemeinlich umb irrendes des andern quotienten beschreiben addite vnd diminute. Als so der principalen, das ist der numern quotient, seindt excedirt vom secundario, so soll solcher excess diminutae dem secundario zugesatzt werden; excedirt der principal den secundarium, so soll solcher excess additae dem secundario geschrieben werden, vnd also ist er generalis zu den additis vnd diminutis, vnd hierumb wirdt er genandt indifferens.

Sam also, wir setzen wollen exemplariter, vff das wir den text besser vorstehen mugen, wir wollen thailen 56 ℳ — 4 durch 20 ℳ vnd 4. Addirn wir addita, das ist | 4, facit 24, vnd remouiren diminuta, das ist 4 von 56, 65′
pleibt 52; das thailen wir nach dem text, den restanten durch das product, das ist 52 durch 24, facit $2\frac{1}{6}$, das ist der quotient principalis. Nun thailen wir die Numeros durch die numeros, als 56 mit 20, facit $2\frac{4}{5}$, das ist secundarius. Der principalen excedirt, herumb ziehen wir $2\frac{1}{6}$ von $2\frac{4}{5}$, pleiben $\frac{19}{30}$, das ist der excess des secundarij, vnd hierumb soll der diminute geschrieben werden gegen den secundarium, also were der quotient $2\frac{4}{5} - \frac{19}{30}$. Vnd solchs kurzlich zu probirn, setzen wir, so solchs der quotient ist, vnd 20 plus 4 der divisor, so wir dann multiplicirn quotienten in diuisorem, so khumbt vom product solcher multiplicirung dividendus, das ist die zal, welche gethailt soll werden wider. Sprich 20 mol $2\frac{4}{5}$ macht 56; nu sprich $\frac{19}{30}$ mal 4 macht $2\frac{16}{30}$ diminute, das zeuch von 56, rest $53\frac{14}{30}$. Nun multiplicir das transverse, sprich 4 mal $2\frac{4}{5}$ macht $11\frac{1}{5}$ addite, das addir zu $53\frac{14}{30}$, khumbt $64\frac{2}{3}$. Nun sprich $\frac{19}{30}$ mal 30 macht $12\frac{2}{3}$, von $64\frac{2}{3}$ bleiben 52, also khomen 56 ℳ — 4, vnd ist recht.

So aber principalis quotiens excedirt secundarium: sam also, 10 ℳ + 12 wollen wir thailen durch 6 ℳ — 2, | | addirn wir 10 vnd 14, werden 24 66 66′
addita, vnd minuiren 2 von 6, pleiben 4. Nun thailen wir 24 mit 4, khomen 6, das ist der principalis quotiens. Nun thailen wir 10 ℳ durch 6, khomen $1\frac{2}{3}$; das nemen wir von jme, pleiben $4\frac{1}{3}$. Also das wirdet additum, vnd khumbt $1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3}$. Das magstu probirn, wie oben vormeldet vnnd wie wol der text nicht vormeldt von gesetzter tafeln, so werden sie doch jm negsten Capitell eingezogen, do wir dann haben gesatzt eine von der Multiplicirung. Wann, so wir das product des Multiplicirn thailen durch den Multiplicanten, so khumpt wider Multiplicant. Also mogen wir heraus ermessen setzende, so wir multiplicirn cℓ in $\frac{zz}{dd}$, so entspringen biß: so wir nun thailen biß mit cℓ, so mus von not wegen $\frac{zz}{dd}$ wider khomen, als dann dise tafeln anzeigt. Du findest hierjnn auch alle modos Equandi aller

equation, vnnd sondern die equationes Aliabre mit sampt den andern gesatzten. Sam also zweier signa ȝȝ ist gleich ȝcℓ findestu jn dem funfften winkel der andern equation. So wir aber dreier signa eine vorgleichung machen, finden wir in dem erstenn triangel an der dritten ȝℓ die funffte
67 equation mit jren modis equandi. So wir aber wieder | steigen, ansehen aber den ersten, finden wir alle modos Equandi der sechsten Equation, vnd desgleichen jn den andern absteigenden triangeln etc., vnd defsgleichen viel andere mugen eingezogen werden in diser tafeln hierher nicht dienende.

TABVLA TERTIA NVMERORVM GEBRÆ ET ALMVCHABOLÆ DIVISIONIS. [1])

Locus omnium aequationum.

		1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
		ℋ	ȝℓ	ȝ	cℓ	ȝȝ	ȝ̃	ȝcℓ	biȝ̃	ȝȝȝ	ccℓ
1	ℋ	ℋ	ȝℓ	ȝ	cℓ	ȝȝ	ȝ̃	ȝcℓ	biȝ̃	ȝȝȝ	ccℓ
2	ȝℓ	Primus modus	ℋ	ȝℓ	ȝ	cℓ	ȝȝ	ȝ̃	ȝcℓ	biȝ̃	ȝȝȝ
4	ȝ		Secundus	ℋ	ȝℓ	ȝ	cℓ	ȝȝ	ȝ̃	ȝcℓ	biȝ̃
8	cℓ			Tertius	ℋ	ȝℓ	ȝ	cℓ	ȝȝ	ȝ̃	ȝcℓ
16	ȝȝ				Quartus modus	ℋ	ȝℓ	ȝ	cℓ	ȝȝ	ȝ̃
32	ȝ̃					Quintus	ℋ	ȝℓ	ȝ	cℓ	ȝȝ
64	ȝcℓ						Sextus	ℋ	ȝℓ	ȝ	cℓ
128	biȝ̃							Septimus	ℋ	ȝℓ	ȝ
256	ȝȝȝ								Octavus	ℋ	ȝℓ
512	ccℓ									Nonus	ℋ
		Quinta aequatio Algebrae	Quarta aequatio Algebrae	Tertia aequatio Algebrae	Secunda Algebrae aequatio	Prima aequatio Algebrae	Quarta	Tertia	Secunda	Prima equatio	

1) Dass in dieser Tafel die verschiedenen Formen der Gleichungen enthalten sein sollen, dürfte vielleicht so zu verstehen sein. In der am untern Rande mit *Secunda equatio* bezeichneten Spalte gehe man bis zu der Zeile hinauf, vor

Capitulum sextum de diversis denominationibus quantitatum additarum atque diminutarum earundemque reductionibus.

Diversarum denominationum, si quae fuerint, quantitates additae atque diminutae ad idem genus transversae multiplicationis reducantur, unaque in aliam per quantitatem denominationis si ducta fuerit, numeratorem, exinde coacervatio vel detractio a denominatione producta univoce appellabitur.[1])

Nachdem ALGEBRAS hat gesatzt von den speciebus der quantiteten additarum vnd diminutarum, die dann gantz integra seindt gewest, vnd kheine benenung kheiner fract gehabt haben, will er hie nachuolgende sagen von gemelten quantiteten jn geprochen, vnd laut zum deutschen also:

So do seind die quantiteten addite vnd diminute zwispenniger vnd vngleicher denomination, das ist, das sie nicht eines namens seind, so sollen die in eine denomination | durch 67′
die Multiplicirung in Creutzweis gebrachtt werden, vnd alfsdann eine in die andere gefurt werden, die do seind die quantitet der denomination, das ist, ein nenner in den andern, vnnd so dann solchs geschicht, so man dann numeratores oder die zeler zusam geaddirt oder von einander zeuchett, desselbig pleibendt oder erwachsendt wirdt genenndt von dem, das aus den denominationibus ist erstanden zusam gemultiplicirt.

Sam also, wir setzen wollen dem text gemes, wann sie coaceruirt oder addirt werden die quantiteten addite vnd diminute vngleicher denomination oder nenner, als wir wollen addiren:

$$\frac{2\,\mathfrak{z} - 2\,\mathfrak{H}}{1\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z}} \quad \text{zu} \quad \frac{3\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{z}}$$

Setzen wir also:

$$\frac{2\,\mathfrak{z} - 2\,\mathfrak{H}}{1\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z}} \quad \frac{3\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{z}}$$

vnd multiplicirn die creutzweis sprechende: $1\,\mathfrak{z}$ furen wir jn $2\,\mathfrak{z} - 2\,\mathfrak{H}$, werden $2\,\mathfrak{z} - 2\,\mathfrak{z}$. Nun furen wir $1\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z}$ in $3\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z}$, facit $3\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{d} + 1\,\mathfrak{z} + 3\,\mathfrak{z}$. Solchs addirn wir zu $2\,\mathfrak{z} - 2\,\mathfrak{z}$, facit $3\,\mathfrak{H}$

---

welcher links 8 steht, das ist die fünfte, dann findet man dort am äussersten rechten Rande stehen $\mathfrak{zz} \cdot \mathfrak{ß} \cdot \mathfrak{zd}$. Da bei der *Secunda aequatio* ein Zeichen ausgelassen werden soll, so hat man also hier die Gleichung $\mathfrak{zz} = \mathfrak{zd}$. In der mit 4 anfangenden Zeile aber stehen die verschiedenen Formen der fünften Gleichung: $\mathfrak{H}, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}$; $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}, \mathfrak{d}$, u. s. w. bis $\mathfrak{ß}, \mathfrak{zd}, \mathfrak{biß}$, und wenn man noch die daran nach rechts oben sich anschliessenden hinzunimmt, auch noch $\mathfrak{zd}, \mathfrak{biß}, \mathfrak{zzz}$ und $\mathfrak{biß}, \mathfrak{zzz}, \mathfrak{cd}$.

1) Das ist Addition und Subtraktion von allgemeinen Brüchen.

$+ 1\,\mathfrak{c} + 3\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{r}$; solchs ist der numerator. Nun multiplicirn wir denominatorem, das ist $1\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{r}$ mit $1\,\mathfrak{r}$, facit $1\,\mathfrak{r}$ vnd $1\,\mathfrak{z}$, vnd solchs
68 ist der gemein Nenner des obgemelten zelers vnd stehet also wie hie: |

$$\frac{2\,\mathfrak{r} - 2\,\mathfrak{H}}{1\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{r}} \times \frac{3\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}}$$

$$\frac{3\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{c} + 3\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{r}}{1\,\mathfrak{r} + 1\,\mathfrak{z}}\ ^{1)}$$

khumbt aus der multiplication jm Creutz gemelte Addition, wie hie verzeichent.

Das wollen wir probirn ex valore, vnd lasen valorem 3 sein in Numeris, vnnd suchen erstlich, was do sei der zeler des ersten buchs in numeris, der was $2\,\mathfrak{r} - 2\,\mathfrak{H}$, das ist 4 in numeris, wenn $2\,\mathfrak{r}$ seind 6 in numeris, subtrahirn wir $2\,\mathfrak{H}$, pleiben 4. Nun suchen wir, was sein nenner sey ex numeris, der ist $1\,\mathfrak{H}$ vnd $1\,\mathfrak{r}$, das ist auch 4. Nun thailen wir 4 durch 4, facit 1, also were der erste Bruch in Numeris 1. Nun suchen wir gleicherweis den andern Bruch, vnnd nemen zu dem ersten den zeler, der ist $3\,\mathfrak{H}$ vnd $1\,\mathfrak{z}$, das ist in numeris 12. Nun suchen wir seinen Nenner, der was $1\,\mathfrak{r}$, das ist 3 in numeris: thailen wir 12 mit 3, facit 4, wann der Bruch ist auch gethailt. Also ist der andere Bruch 4 in numeris, den addirn wir zum ersten, der was 1 in numeris, vnnd khumbt 5 aus der gantzen addition, die was

$$\frac{3\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{c} + 3\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{r}}{1\,\mathfrak{r} - 1\,\mathfrak{z}}.$$

So es dann auch 5 in numeris macht, so ist es recht. Nun suchen wir im zeler, was do sei $1\,\mathfrak{c}$ von 3, facit 27, dazu $3\,\mathfrak{H}$, facit $30\,\mathfrak{H}$, zu $3\,\mathfrak{z}$, das ist 27, vnd $1\,\mathfrak{r}$ khomen 60, souil macht der zeler in numeris. Die thailen wir durch $1\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z}$, das ist 12, khomen auch 5, vnd ist recht ge-
68′ macht. |

Setzen wir den andern punct, als der text sagt, wann sie detrahirt werden, solle allermas volfurt werden wie vor, dann alleine, wo man vor het addirt, soll man jtzunder subtrahirn. Sam also, wir setzen wollen abzuzihen $\frac{1\,\mathfrak{H} + 2\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}}$ von $\frac{2\,\mathfrak{c} + 8\,\mathfrak{z}}{7\,\mathfrak{H}}$. Setzen wir die, wie vorgesazt, also:

$$\frac{1\,\mathfrak{H} + 2\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}} \quad \frac{2\,\mathfrak{c} + 8\,\mathfrak{z}}{7\,\mathfrak{H}}.$$

Multiplicirn die Creutzweis, jnmassen vorgethan, khumbt des ersten mit

1) In moderner Bezeichnung: $\frac{2x - 2}{1 + x} + \frac{3 + x^2}{x} = \frac{3 + x^3 + 3x^2 + x}{x + x^2}$.

7 ℳ in 1 ℳ + 2 ʒ, 7 ℳ + 14 ʒ, vnd des andern mals khumbt mit 1 ℰ in 2 ℭ + 8 ʒ, 2 ʒʒ + 8 ℭ; die addirn wir nicht, sondern subtrahirn eins vom andern, pleiben 2 ʒʒ + 8 ℭ — 7 ℳ vnd 14 ʒ, das ist der zeler. Nun multiplicirn wir die nenner mit einander, als 1 ℰ mit 7 ℳ, khomen 7 ℰ, vnd stehet das Restat also wie hie oben:

$$\frac{1\,\mathcal{M} + 2\,\mathfrak{z}}{1\,\mathcal{E}} \times \frac{2\,\mathcal{C} + 8\,\mathfrak{z}}{7\,\mathcal{M}}.$$

Multiplicirn wir die, vnd nemen eins vom andern nach laut des Texts, so pleiben:

$$\frac{2\,\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 8\,\mathcal{C} - 7\,\mathcal{M} - 14\,\mathfrak{z}}{7\,\mathcal{E}}.\text{[1]}$$

Das wollen wir probirn ex numeris absolutis. Setzen wir, das ℰ sei 2 in numeris. Nun suchen wir den zeler des ersten Bruchs, dauon man nemen soll, als $\frac{2\,\mathcal{C} + 8\,\mathfrak{z}}{7\,\mathcal{M}}$, das seind 48; die thailen wir mit 7 ℳ, facit $6\frac{6}{7}$, das ist der eine pruch. Nun suchen wir | auch den andern Bruch, den man 69
abziehen soll, als $\frac{1\,\mathcal{M} + 2\,\mathfrak{z}}{1\,\mathcal{E}}$, facit 9; den thailen wir in 1 ℰ, als in 2, facit $4\frac{1}{2}$, den subtratrirn wir von $6\frac{6}{7}$, pleiben $2\frac{5}{14}$, vnd souil sollen auch machen der gemelte restat als

$$\frac{2\,\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 8\,\mathcal{C} - 7\,\mathcal{M} - 14\,\mathfrak{z}}{7\,\mathcal{E}}.$$

Suchen wir erstlich den zeler: 2 ʒʒ + 8 ℭ von 2 seind 96. Nun sollen abgezogen werden 7 ℳ vnd 14 ʒ, die machen 63; nemen wir sie, bleiben 33. Nun ist der nenner 14 von wegen 7 ℰ: thailen wir sie, khomen $2\frac{5}{14}$, vnd ist recht. Defsgleichen magstu alle andere probirn. Nun volget das sibende Capitel.

Capitulum septimum de diversis denominationibus quantitatum additarum atque diminutarum earumque multiplicationibus.

Numerorum pregnantium, quorum denominatio est divisa, numeratorum atque denominationum se mutuo fit multiplicatio. Quod si sit denominatorum denominationis denominatio, ad unam denominationem se invicem multiplicatium reducentur quantitantum.

---

1) In moderner Form: $\frac{2x^3 + 8x^2}{7} - \frac{x + 2x^2}{x} = \frac{2x^4 + 8x^3 - 7 - 14x^2}{7x}$.

Hie saget vns ALGEBRAS von der Multiplication der quantiteten additen vnd diminuten, vnd laut zum teutschen also:

Der geschwengerten quantiteten additen vnd diminuten, die do seind einer ungleichen benenung oder denomination, so sollen die numeratores besonder vnd die denominationes mit einander
69′ multiplcirt werden. So dann ist, | das die Nenner benennt seind, welche benenung dann aber ein denomination ist, das ist gesprochen, so ein nenner hat einen andern nenner, welchs dann nenners nenner hat, respectu eines numeratoris, so sollen die nenner in eine quantitet zusamen gemultiplicirt werden, die dann ist eine benenung oder denomination des ersten gesatzten zelers.

Solchen schriftlichen text zu leutern, wollen wir setzen exempla, vff den ersten punct des texts, als er sagt: So die quantiteten addite vnd diminute einer ytzlichen benenung seind, sam also wir setzen wollen zu multiplicirn:

$$\frac{2\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{c}} \quad \text{mit} \quad \frac{5\,\mathfrak{c} + 2\,\mathfrak{H}}{1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{c}},$$

setzen wir correlatiue vnd multiplicirn einen zeler in den andern als $2\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z}$ mit $5\,\mathfrak{c} + 2\,\mathfrak{H}$, facit $10\,\mathfrak{c} + 2\,\mathfrak{z} + 5\,\mathfrak{d} + 4\,\mathfrak{H}$ vor den zeler. Nun multiplicirn wir die nenner auch mit einander, khumbt $1\,\mathfrak{d} + 1\,\mathfrak{z}$, das wer der Nenner, vnd stehet dje multiplication also:

$$\begin{array}{l} \underline{2\,\mathfrak{H} + 1\,\mathfrak{z} \text{ —— } 5\,\mathfrak{c} + 2\,\mathfrak{H}} \\ \underline{\quad 1\,\mathfrak{c} \quad \text{ —— } 1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{c}} \\ \underline{10\,\mathfrak{c} + 2\,\mathfrak{z} + 5\,\mathfrak{d} + 4\,\mathfrak{H}} \\ \quad 1\,\mathfrak{d} + 1\,\mathfrak{z} \end{array}.^{1)}$$

Das wollen wir probirn ex valore aus den absolutis numeris, so setzen wir, die $\mathfrak{c}$ solle 4 sein in numeris. Nun suchen wir, was der zeler des ersten
70 | Bruchs sey, das ist $2\,\mathfrak{H}$ vnd $1\,\mathfrak{z}$, facit in numeris 18, wann $1\,\mathfrak{z}$ ist 16 von 4, derzu 2 machen 18. Nun sein Nenner ist $1\,\mathfrak{c}$, das ist 4; thailen wir, facit $4\frac{1}{2}$. Nun suchen wir den andern bruch auch dermassen: $5\,\mathfrak{c}$ seind 20, vnd $2\,\mathfrak{H}$ seind 22, pas ist der zeler des andern Bruchs, vnd sein Nenner ist 20. Thailen wir, facit $1\frac{1}{10}$. Nun wollen wir die zwei absoluten bruch mit einander multiplicirn jnmassen man pflegt in gebrochen zalen zu thun, das wir hie in den zalen ALGEBRE presupponiren, khombt 4 vnd $\frac{19}{20}$:

---

1) In modernen Zeichen:

$$\frac{2 + x^2}{x} \times \frac{5x + 2}{x^2 + x} = \frac{10x + 2x^2 + 5x^3 + 4}{x^3 + x^2}.$$

souil macht auch das product $\frac{10\,\text{ꝛ} + 2\,\text{ʒ} + 5\,\text{ꝯ} + 4\,\text{ꝟ}}{1\,\text{ꝯ} + 1\,\text{ʒ}}$. Suchen wir zum ersten den zeler in numeris. 10 ꝛ von 4 seind 40, 2 ʒ seindt 32, 5 ꝯ seind 320 vnd 4 ꝟ seind 4. Addirn solchs, facit 396. Das thailen wir mit 1 ꝯ + 1 ʒ, als 80, vnnd khumbt recht $4\frac{19}{20}$.

Nun sagt der text, so ein Bruch khomet in der zalen Gebre, der do het Nenners nenner. Sam also, wir setzen wollen, vnd des vil khumbt in den coniecturationibus, das ist in den examinibus der proposition, wir wollen multiplicirn

$$\frac{\frac{10\,\text{ꝟ} - 1\,\text{ʒ}}{1\,\text{ꝛ} + 1\,\text{ʒ}}}{4\,\text{ꝟ}} \quad \text{mit} \quad \frac{\frac{1\,\text{ꝯ} + 1\,\text{ʒ}}{1\,\text{ꝛ} + 1\,\text{ꝟ}}}{1\,\text{ʒ}}.\ ^{1)}$$

Setzen wir die correlatiua, wie stedt, jnmassen wir vorgehalten haben. Sagt der text, es sollen die Nenner | zusamen gemultiplicirt werden eines 70′
ytzlichen pruchs. Sam also, 4 ꝟ ist der letzte nenner des ersten Bruchs, die multiplicirn wir in 1 ꝛ + 1 ʒ, facit 4 ꝛ + 4 ʒ. Vnd das wer der Nenner des ersten Bruchs. Wir machen den andern auch also, khumbt 1 ꝯ + 1 ʒ. Also weren gemelte Nenner reducirt. Die wollen wir nun mit einander multiplicirn, jnmassen wir den ersten pruch gethun haben, vnd khumbt aus der multiplication der zwir bruche:

$$\frac{10\,\text{ꝯ} - 1\,\text{ʒʒ} + 10\,\text{ʒ} - 1\,\text{ꝑ}}{8\,\text{ʒʒ} + 4\,\text{ꝯ} + 4\,\text{ꝑ}}.$$

Solchs wollen wir probirn. Wir nemen erst gesatzte pruch, die do noch nicht reducirt seind, vnd suchen valorem. Zum ersten den zeler des ersten Bruchs, vnd lassen valorem ꝛ sein 2 in numeris. Also 10 ꝟ — 1 ʒ macht 6, das gethailt mit 1 ꝛ + 1 ʒ, facit 1; das gethailt wider in 4 facit $\frac{1}{4}$: souil macht der erst Bruch in numeris absolutis. Desgleichen mache den andern. Besiche, was do sey 1 ꝯ + 1 ʒ von 2, facit 12, gethailt in 1 ꝛ + 1 ꝟ, in 3, facit 4, die gethailt in 1 ʒ, als in 4, facit 1 oder $\frac{4}{4}$. Die wollen wir mit einander multiplicirn, khumbt $\frac{1}{4}$ in numeris; das soll auch thun die obgemelte multiplication. Wir suchen zum ersten 10 ꝯ von 2, macht 80, — 1 ʒʒ, als 16, bleiben 64, vnd 10 ʒ seind 40, — 1 ꝑ, facit 32: zih ab, pleiben 8, zu 64 wird 72 in numeris der zeler. Nun | suchen wir den nenner: 8 ʒʒ seind 128, vnd 4 ꝯ seind 32, vnd 4 ꝑ 71

1) In moderner Bezeichnung:

$$\frac{\frac{10 - x^2}{x + x^2}}{4} \times \frac{\frac{x^3 + x^2}{x + 1}}{x^2} = \frac{10 - x^2}{4x + 4x^2} \times \frac{x^3 + x^2}{x^3 + x^2} = \frac{10x^3 - x^4 + 10x^2 - x^5}{8x^4 + 4x^3 + 4x^5}.$$

seind 128; das addirn wir zusam, facit 288, das ist der Nenner. also were der Bruch $\frac{72}{288}$ in numeris, macht $\frac{1}{4}$, vnd ist recht.

Capitulum octavum de diversis denominationibus quantitatum additarum atque diminutarum earumque divisionis diviso pregnata sive potentialis, non absoluta.

Divisionem absolutam signorum, ut diximus, refutamus. Earumque autem, quarum denominatio est coaptata per interiectionem virgularum in Gebram esse potentialiter divisa: unam vero per aliam committendam disparate habitudinis transversae ductionis divisionem in eandem esse reductam denominationem diminutio.

Hie saget Algebras von der division der quantiteten additarum vnd diminutarum, vnd laut der text zum teutschen also:

Die division gemelter zaln Gebre die absoluten, als wir gesagt haben, vorwerfen wir, sonder der, den dj denomination vnterschrieben ist durch die zwischen fugung der virgulen des Bruchs, sprechen wir, das dj gethailt ist oder sey jn Gebra
71′ potentialiter. Aber eine benente | quantitet addita oder diminuta, so die sol gethailt werden durch eine andere, welche also vngleicher denomination sein, vorkunden wir, solche vormelte thailung gebracht werden jn eine denomination durch die transferse oder creutzformige multiplicirung.[1])

Sam also, wir setzen wollen zu thailen $\frac{5\,\mathcal{H} + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathcal{H} + 1\,\mathfrak{c}}$ mit $\frac{2\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{cl}}{1\,\mathfrak{c}}$. Setzen wir sie correlatiue wie die andern, sehen wir, das ein jtzlich quantitet mit einer virgulen vnterschrieben ist gegen jrer denomination, damit sie ist potentialiter gethailt, vnd nicht actu, als der text sagt. Aber eine durch die andere zu thailen, jnmassen wie hie, die do vngleicher denomination seindt, so multiplicirn wir Creutzweis nach vnterweisung des sechsten Capitels dis Buchs, als $1\,\mathfrak{c}$ mit $5\,\mathcal{H}$ vnd $1\,\mathfrak{z}$, facit $5\,\mathfrak{c}$ vnd $1\,\mathfrak{cl}$, das ist der zeler oder diuidendus; furn wir $1\,\mathcal{H} + 2\,\mathfrak{c}$ in $2\,\mathfrak{z}$ vnd $2\,\mathfrak{cl}$, facit $2\,\mathfrak{z} + 4\,\mathfrak{zz} + 6\,\mathfrak{cl}$, vnd ist der Nenner. Stehet also jn seinem form wie hie

$$\frac{5\,\mathcal{H} + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathcal{H} + 2\,\mathfrak{c}} \times \frac{2\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{cl}}{1\,\mathfrak{c}}.$$

So wir creutzweis multiplicirn, so khumbt der quotient als wie hie:

72 $$\frac{5\,\mathfrak{c} + 1\,\mathfrak{cl}}{2\,\mathfrak{z} + 4\,\mathfrak{zz} + 6\,\mathfrak{cl}}. \mid$$ [2])

1) Division allgemeiner Brüche ist also erlaubt.

2) In moderner Bezeichnung: $\frac{5 + 2x^2}{1 + 2x} : \frac{2x^2 + 2x^3}{x} = \frac{5x + x^3}{2x^2 + 4x^4 + 6x^3}$.

Das wollen wir probirn. Wir nemen valorem in numeris 2, also were der erste Bruch $\frac{5\,\mathcal{H} + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathcal{H} + 2\,\mathfrak{z}}$ in numeris $\frac{9}{5}$, die sollen wir thailen mit dem andern, als $\frac{2\,\mathfrak{z} + 2\,\mathcal{C}}{1\,\mathcal{C}}$, das ist $\frac{24}{2}$, also sollen wir thailen $\frac{9}{5}$ mit $\frac{24}{2}$, khumen $\frac{18}{120}$, so wir die lassen aufgehn jn geringer zaln, khomen $\frac{3}{20}$. Souil soll auch der quotient in numeris machen. Suchen wir gleicherweis den zeler vnd auch den Nenner, so finden wir $\frac{18}{120}$, jnmassen wie oben, vnd ist recht gemachtt.

Capitulum nonum de custodia vigilis adverso aequationis numero absoluto positus eiusque officio assimulationis.

Assimulatio est, qua coniecturatio proportionis ad duas aequales restaurando vel diminuendo partes numero absoluto examine vigilis ex adverso aequationis positus reducitur.

Hie saget Algebras von der Assimulation, nachdem gesagt ist von der eigenschaft der signa, durch welche man in die Equation khumbt, so khan die nicht volfurt werden, es geschehe dann ein vorgleichung zweier thailen, vnd laut zum teutschen also:

Die Assimulierung oder vorgleichung ist, durch welchs die coniecturation der propositionen geschehen durch das | Examen 72′
des wechters, welcher dann gesatzt ist in der Equation durch absolutos numeros, durch benenung oder gebung zu zweien gleichen thailen pracht wirdt.[1])

Diesem text einen vorstentlichen sin einzufuren, der etwas tief gegrundt, sagt er zum ersten von der vorgleichunge zweier thailen, die dann geschehen soll also: was ein thail zu wenig hat, soll jme restaurirt werden, vnd dem andern dasselbig; hat dann ein thail zuuil, soll jme genomen werden, defsgleichen dem andern. Als wir setzen wollen, damit wir den text begreifen mögen, ein coniecturation ist geschehen, jnmassen der text lautet, durch das Examen des wechters oder hueters der Equation, also zu finden eine zal, wann ich daraus nim $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ vnd addir 7 dragmas darzu, das 28 khumen. Sprechen wir, das 28 $\mathcal{H}$ sey der vigil equationis oder der hueter, durch welchen dann geschieht das Examen der Aufgabe in den

1) Hier wird also gelehrt, wie die ursprüngliche Aufgabe durch Restauratio und Diminutio in eine der Formen gebracht werden kann, die oben als Normalformen der Gleichungen angegeben sind. Die in Ziffern gegebene Zahl wird dabei *Vigil,* d. h. Wächter genannt, weil durch sie die Richtigkeit der Übertragung der Aufgabe in eine Gleichung kontrolliert wird.

coniecturen des setzenden ꝛc; dann 28 vigiliren, das solchs Examen der gesatzten ꝛc sol recht volfurt werden, vnd hierumb ist der wachsende vf einer seiten in absoluto numero vnd hutendt der Equation. So nun 1 ꝛc ist gesatzt vnd examinirt nach der Aufgab, khomen $\frac{7}{12}$ ꝛc + 7 ℳ, die seind gleich
73 28 ℳ, den huter vnd vigil. Solche | zwei thail sollen wir dann vorgleichen. Saget der text, welchs thail zuuil hat, dem sole abgezogen werden, vnd dem andern auch souil. Nun hat die Coniecturation einer seit + 7 ℳ, die deliren wir vnd nemen dem vigil auch souil, pleiben 21 ℳ, vnd also ist vff beiden Seithen vorgleichnus geschehen, das ist, $\frac{7}{12}$ ꝛc gleich seind 21 ℳ, dem vigil; vnd also ist zu vermercken aus dem text, das alle numeri absoluti in einer aufgabe, durch oder von welcher die coniecturation geschicht, werden geheisen wechter vnd vigiles, vnd die do werden coniecturirt von der ꝛc, heist die coniecturatio, durch welche dann die vorgleichung wirdt gefurt gegen gemelten vigilis, vnd jren anhengen, welches halben dann die coniecturation geschicht durch jre Examina der aufgab gemes. Sam also, eine coniecturation ist laut einer proposition oder Aufgabe gefurt, vnd khumbt des einem thail 157 ℳ — 2 ꝛc + 3 ʒ, vnd opposita parte khombt 1 ℳ + 7 ʒ — 42 ꝛc, die wir doch presupponiren einander gleich, verordent durch die examina vigilum jn die Equation zu vorgleichen. Nim einem thail 1 ℳ vnd nim 157 auch 1 ℳ, pleiben 156 ℳ. Nim einem thail 3 ʒ, vnd nim dem andern 7 ʒ auch 3 ʒ, pleiben 4 ʒ; restaurir dem einen thail 2 ꝛc, vnd gib dem andern auch 2 ꝛc, pleiben 40 ꝛc,
73′ vnd sein in form | vorgleicht einem thail 156 vnd dem andern 4 ʒ — 40 ꝛc. Restaurir dem ein thail 40 ꝛc vnd dem andern auch 40 ꝛc, pleiben vff einem thail 4 ʒ vnd vfm andern 156 ℳ + 40 ꝛc, vnd stedt jn der sibenden Equation.[1]) Nun mochte einer sprechen: so dann zwei thail gleich einander seind, was darfen wir dann der vorgleichung? Antworten wir, das ehegenamte vorgleichung seind allein von wegen der affirmirung vnd negirung, das ist von den quantiteten additen vnd diminuten, als dann in den coniecturationibus khumbt, das allerwegen zwei thail gleich werden. So dann von equalibus genomen wirdt oder restaurirt wirdet, so werden wider equalia, oder werden equalia auch der angenomen conception, machen aus

---

1) Dieses durchgeführte Beispiel ist in neuerer Bezeichnung folgendes:

$$157 - 2x + 3x^2 = 1 + 7x^2 - 42x,$$
$$156 - 2x + 3x^2 = 7x^2 - 42x,$$
$$156 - 2x = 4x^2 - 42x,$$
$$156 = 4x^2 - 40x,$$
$$156 + 40x = 4x^2,$$

und es ist also auf die siebente Gleichungsform zurückgeführt.

ehegemelten vorgleichten thail. Durch die sibende Equation khumbt valor des ℛ in numeris 13. Nun haben wir gesatzt erstlich 1 ℳ vnd 7 ʒ, das weren 1183 in numeris, vnd 1 ℳ ist 1184, minus 42 ℛ herabgezogen pleiben 638, vnd souil sollen sein 157 ℳ — 2 ℛ + 3 ʒ, wann sie seind presupponirt gleich erstlich gesatzt. Nun 157 ℳ, dauon ziehen wir 2 ℛ, pleiben 131, addirn wir 3 ʒ, khomen 638 wie oben, vnd ist recht.

Das wollen wir probirn. Wir haben obgemelte thail vorgleicht durch dj assimulation, vnd ist khumen einem thail 4 ʒ, dem andern 156 ℳ + 40 ℛ. Sprechen wir, | 4 ʒ von 13 seind 676, vnd des andern thails 156 ℳ + 40 ℛ 74
seind auch souil, also were gleich addirt worden 38 in numeris, wann auf yeden paiden ersten thailen was 638, so ist vff disen assimulirten 676, das ist 38 mehr, das dann hernachuolgendt besser gegrundt wirdt zu vorstehen.

Capitulum ultimum, quomodo numerus pregnans per aequationem deducatur in partum ad pariendum numerum absolutum rationalem sive surdum.

Absolutam divisionem numerorum pregnantium aequationi effectum deposcit, eaque numerum nudum rationalem pariet, expletum surdum vero naturae rationamento reliquit binomica normate docente.

Hie endet Algebras sein ander Buch der Gebra vnd Almuchabola vnd beschleufst entlich der signorum eigenschafft, vnd laut zum teutschen also:

Die equation begert vnd erfordert eine offene thailung der zalen, die do geschwengert werden in den signis den effect vnd darzu gebraucht sie entlich erfunden sein, welche equation geporn sein eine plosse vnvernunftige zal, eroffnet die natur aber surden oder irrationalen gesprochen, hatt verlassen die equation der natur zur geberung die Rationirung oder handlung, als dann die binomischen Regeln diss ercleren werden. | 74′

Solchen text begreiflich zu ergrunden, nemen wir für vns die negsten Capitel die ehegemelten vorgleichten zalen nach der assimulation, die do erstlich waren 1 ℳ + 7 ʒ — 42 ℛ waren gleich 157 ℳ — 3 ʒ, welche dann geschwengerte zalen seind, vnd durch dj gemelte assimulation seind sie pracht jn die siebende Equation zu zweien gleichen thailen, die do waren 4 ʒ, wie vorsteht, vnd den andern 156 ℳ + 40 ℛ, so dann solchs durch dj equation gethailt wirdt, die dann ein offene thailung begert actu vnd nicht in potentia, wann zu der equation bracht werden, zu gebern dj offenbarlichen zal. Also thailen wir durch 4 ʒ, 156 ℳ + 40 ℛ, jnmassen durch die Equation bericht hat, vnnd gebirt den valorem cosse 13 unitates absolutae in numeris, der dann rationalis explicite der natur erkennt-

lich mit seinen vnitaten geporn ist, den wir auch rationaliter mögen handeln durch die geschwengerte zal, darinn er ist verschlossen gewest. Also wir wollen exemplariter setzen erstlich rationaliter dem text gemes, vnd darnach jrrationaliter auf den andern punct, als der text sagt, wir wolten finden dj vernunftige zalen 13, die vns die Equation erfordert hat, durch die geschwengerte zaln der signorum, die do waren gleich peiderseits, als wir vorangezaigt haben, die wir wollen probiren, ob solche ein
75 rationalische | zal sey gewesen in der geschwengerten mutter der signorum. So eroffnen wir den ersten thail, der was 1 ℳ + 7 ʒ — 42 ℛ in den numeris absolutis aus 13, vnd steht also 1 ℳ + 1183 ℳ — 546 ℳ, wann 1183 seind 7 ʒ von 13, so seind 546 ℳ 42 ℛ. Eroffnen wir den andern thail, der do was 157 ℳ — 2 ℛ + 3 ʒ, so wir beide seithenn gegeneinander ansehen, so finden wir, durch 13 ℳ einander gleich sein gewest die signa, als dann ein schwanger Mutter der zaln 13, wann yeder seithen khomen 638. So wir sie dann vorgleichen mit den negationibus vnd affirmationibus, also das wir ab equalibus equalia nemen oder ad equalia addirn equalia, so khomen oder pleiben equalia. Addirn wir 26 ℳ dem einen thail, der — 26 ℳ hat, so bezalt er seine Negation, vnd geben dem andern thail auch 26. Wir nemen dem einen thail 507 ℳ, wann die affirmation vberflus hat, vnd nemen dem andern thail auch souil, wir geben auch dem ainen thail 546 ℳ, so bezalt er auch seine Negation, vnd geben dem andern thail auch souil; wir nemen 1 ℳ von einem thail vnd nemen dem andern auch souil; also finden wir abermals peiderseitz gleich yder zal 676, der numerus, der dann was in schwangern vnd 4 ʒ eins thails
75′ vnd 156 ℳ + 40 ℛ anders thails. | Also ist die Assimulation geschehen, durch 38, die wir zu zweien gleichen thailen addirt haben, das ist zu 638, ist khumen beiderseitz in der vergleichung 676 vnd 676, vnd ist recht.

Aber den surdischen numerum, als der text sagt, der hat der Equation die natur verlassen die Rationirung durch nachuolgende Regel der Binomien vnsers dritten buchs, wann derselbig explicite nicht herauskhumbt, sonder beschlossen wirdt in taube vnvernunftige zaln. Als wir setzen wollen 320 ℳ + 3 ʒ — 1 ℛ ist gleich 149 ℳ + 8 ʒ + 7 ℛ; so wir das vorgleichen, khumbt einem thail 171 ℳ, dem andern 5 ʒ + 8 ℛ, vnd steet in der funften Equation, durch welche, so die signa pregnantia gethailt werden, die vnvernunftige zal $\frac{871}{25}$, von welcher radix $-\frac{4}{5}$ ist die zal, die die Equation begert, vnd hierumb, so ist $\frac{871}{26}$ macht die zal irrationalis, wann wir sie nach gebrauch der vniteten in numeris nicht handeln khunen. Wann wir die handeln sollen, so ist radix von $\frac{871}{25} - \frac{4}{5}$.[1]) Nun ist sie

1) Während die oben gefundene Gleichung $156 + 40x = 4x^2$ die rationale

surde, vnd herumb hat die Equation die natur verlassen das rationament durch binomische Regeln jn vnsern dritten Buch hernachuolgendt.

Explicit liber secundus ALGEBRAE. | 76

Incipit liber tertius ALGEBRAE *Arabis de numeris rationalibus communicantibus atque surdis trium tractatuum, qui ex matre pregnante per aequationes digestas nascebantur absolute.*

Tractatus primus tertii libri.[1])

Rationalis est numerus Gebrae, qui digestis aequationibus absolute unitatum complectitur. Ex hoc manifestum, omnem numerum longitudine radicem esse numeri sui potentionalis, rationalem numerum vero non omnem potentionalem esse radicis rationalem, sed potentiae tantum omnis rationatur unitatis planitie lineae rationalis datae in longitudine.

Hie saget ALGEBRAS in seinem dritten Buch zum ersten von den numeris rationalibus des ersten tractats, vnd laut zum teutschen also:

Das ist ein rationalisch zal des dings, die do khomet aus den eegemelten Equationibus offenbarlich jrer vniteten, damit sie dann gezelt werden, vnd hierumb ist wissentlich, ein jtzliche zal mag sein ein radix rationalis seiner quadratischen zalen, das ist in potentia, vnnd hierumb ist nicht zu vorwundern, das nicht ein yede zal in potentia seines radicis ist rationalis, sondern allein in der macht, das ist in potentia, wirdt ein ytzliche zal gebraucht rationalis der quadratischen vnitet, die dann in der lenge gegeben wird rationalis. | [2]) 76′

Wurzel $x = 13$ besitzt, hat die Gleichung $320 + 3x^2 - x = 148 + 8x^2 + 7x$, welche restaurando und diminuendo in $171 = 5x^2 + 8x$ übergeht, die Lösung $x = \sqrt{\frac{871}{25}} - \frac{4}{5}$, und ist also irrational. Sie hat die Form eines Recisum EUKLID's und lässt sich naturgemäss erst durch die im dritten Buche gelehrte Wurzelausziehung bestimmen.

1) Dieser erste Traktat des dritten Buches handelt von der Ausziehung der Wurzeln. Zunächst müsste man eigentlich sagen von der Erhebung eines Binoms auf die ersten neun Potenzen. Da aber im letzten Kapitel dieses Theiles gesagt wird, dass alles Vorhergehende nur auseinander gesetzt sei, um die Auffindung der Wurzeln zu ermöglichen, so hat der deutsche Bearbeiter die Wurzelausziehung schon in den einzelnen Paragraphen gelehrt. Die Ausziehung betrifft nur rationale Wurzeln aus vollständigen Potenzen.

2) Klarlegung des EUKLIDischen Begriffs: linearrational und in Potenz rational, aber unter Ausdehnung des Begriffs „in Potenz rational" auf alle nach irgend einer Wurzel irrationale Zahlen, so dass also z. B. 81 als fünfte Potenz angesehen nur in Potenz rational ist, dagegen als vierte Potenz betrachtet sowohl in der Potenz, als in der Länge rational ist. Hier tritt zuerst das Wurzelzeichen

Von solchen text einzufuren den schrifftlichen sin, so nemen wir einen jtzlichen radicem rationalem, der in der lenge, das ist in der vngemultiplicirten zal gesatzt wirdt, dann als Linea, die khein ander zufallen hat, dann longitudinem, also hat auch die zal kheinen andern namen gesatztt in der lenge dann allein, das sie wirdt genant ein radix rationalis einer potentionalischen zal, vnd also mag ein ytzliche zal gesatzt in der naturlichen profusion der lenge der zalen werden oder sein ein radix. Sam also 5 in der profusion der naturlichen zalen wirdt gesatzt in der lenge, wann sie khein andere beschwerung hat, dann das sie die stadt vertritt der naturlichen satzung, darin sie von jrer vnitet ausgangen ist, die dann mag sein der radix jrer potentionalischen zaln, das ist 25. Von gleicherweis die linien 5 in sich vormag potentionaliter den quadrat, das ist den superficien, also vormag 5 an der zal 25, den ʒ, vnd also wird 5 in der lenge rationirt mit 5 vniteten, vnd 25 mit 25 superficien, welche jtzlicher jrer lenge ist vnitas vnd in potentia vnitas, vnd das ist der erst punct vom text. Aber nicht wirdt gesagt, das ein jtzlich potentionalische zal sein rationalisch in der lenge, das ist jres radix, sondern allein in potentia.
77 Wann also wir nemen 7 oder 10 vor 1 ʒ, so wissen wir, | das 7 5 vniteten rationiren, die dann potentionaliter auch seind, nicht longitudine, vnd wiewol jr vnitas potentionalis hat eine rationalische lenge, dann sie gebieret den quadraten vnitatem potentionalem, damit sie 7 rationirt, so wirdt solche lenge nicht rationalisch gegen der leng 7 der potentz, wann die lenge von 7 oder radix ist $\int 7$, so ist die potentionalische vnitet 1 in der lenge rationalisch, die wirdt mit $\int 7$ nicht communicirt, vnd also sprechen wir, das ein jtzliche zal mag sein rationalis in potentia, aber nicht allwegen in potentia vnd longitudine, vnd also sagt der text erstlich vniuersaliter, das ein jtzliche zal mag longitudine werden potentionaliter rationalisch, aber nicht vmbgekert, dann ein jtzliche potentionalische zal mag werden longitudine nicht rationalisch, sonder allein in potentia wirdt vniuersaliter ein jtzlich zal rationalisch, das ist mit potentionalischen vniteten gemessen vnd gezelt. Damit man aber mag verstehen, jn welcher gestalt die potentionalischen zalen sollen mit den potentionalischen vniteten rationirt werden, so nemen wir 18 vor 1 ʒ, den wir mit 4 vniteten wollen rationiren. So wir jenen mit 4 vniteten rationirn jn longitudine, so khumbt $4\frac{1}{2}$, das weren auch vnitet der lenge. Nun ist 18 1 ʒ, der do 18 potentionalische vnitet hat, also mussen wir auch 4 potentioniren, werden 16, vnd also

---

auf, noch allein durch einen starken Punkt mit daran befindlichem längeren Zug $\int$ bezeichnet. Wie später die Wurzeln mit verschiedenen Exponenten unterschieden werden, wird seiner Zeit auseinandergesetzt werden.

rationiren wir 18 mit 16, khumbt $1\frac{1}{8}$ potentz, das ist $1\frac{1}{8}$ ʒ, | vnd also ist 77′
zu vorstehen, das man lenge mit lenge, das ist radicem mit radice, vnd potentz mit potentz soll rationiren, vnd darumb so wirdt lenge gegen lenge potentionirt rationalisch, vnd potentz gegen potentz auch rationalisch rationirt.

Nun ist not zu wissen, das ein jtzlicher radix in longitudine wirdt rationalisch in potentia durch 8 ductiones pej vns gewonlichen, wann es mag gesprochen werden 1 ʒ̊ in longitudine des quadrats, des cubi, des ʒʒ etc., jnmassen dann die ductiones nach einander volgendt rationalisch. Wann ein jtzliche zal zu extrahirn radicem furgelegt wirdt potentialiter angesehen vnnd gehalten, hat die alſsdann radicem rationalem, so wirdt sie gesprochen in longitudine vnd potentia rationalis, wirdt sie aber erfunden jres radix der duction, von der sie genandt ist, surda vnd nicht eine gantze radicem rationalem hat, so wirdt sie genandt die zal in potentia allein rationalis, vnd also volget von der quadratischen duction, die dann die erste ist vnter den ductionibus der rationalischen zalen, vnd volgt also das ander Capitel.

Capitulum secundum de hauriendis lateribus numerorum rationalium quadratorum.

Omnium rationabilium ductionum hauriendae radicis quadratum, quod primi planiciei rationalis potentia est radicis, crescere quidem habet duabus radicibus duplicatis gnomone[1]*), quae supplementa descripsimus, cum censiculo.* | [2]) 78

Hie eruolget Algebras von der ersten duction der rationalischen zalen zu sagen, vnnd laut zum deutschen also:

Vnter allen rationalischen ductionibus der schopfenden radix so ist das quadrat oder ʒ die erste macht oder potentz des radix, das ist der zalen jn longitudine, welcher ʒ oder quadrat wachsen ist, das ist gesprochen, so er wechst in die groſs der potentz des radicis, mit zweien radicibus superficialiter gefurt durch den gnomon, die do sprechen werden supplementa,

1) Der Ausdruck „*duabus radicibus duplicatis gnomone*“ ist so zu verstehen: Nach unserem Verfasser ist ja die erste Potenz, das ist *res*, die zweite Duktion, da er *Dragma* als erste rechnet. Die obigen Worte heissen daher nichts weiter als $2xy$, wenn x die Radix und y den Gnomon bezeichnet. In ähnlicher Weise sind die spätern Ausdrücke *triplicatis, quadruplicatis ... gnomone* aufzufassen, sie bedeuten also multipliciert mit y^2, y^3 u. s. w.

2) Hier lesen alle Manuskripte, mit Ausnahme von *C. 8, censicubo* statt *censiculo,* sie kürzen es sogar mit ʒℭ ab. Dass nur *C. 8* recht hat, ist klar.

das ist, damit die quadratur oder der ʒ complirt wirdt, vnd mit dem zensiculo, das ist mit dem gnomone in sich gefurt.

Von solchen text den vorstandt einzufuren, der ettwas kunstlich ist vnd weniger wissent, so nemen wir vor, 15129 zu rationiren in longitudine, wann wir sie potentionaliter gesatzt haben. Nun wissen wir, das ein jtzlicher zens des ersten limits sein potentz vber den dritten limit, das ist vber den Centenarium, nicht strecket, vnd herumb so rationiren wir gemelten numerum mit dem dritten limit centenario, vnd halten allwegen bei jedem Centenario sein station, jnmassen der text saget, vnnd zihen ab 2 radices mit dem zensiculo. Also hat gemelte zal zwen centenarios, vnd
78′ hierumb haben wir drei stationes. Wir setzen vnter den letzten Centenario | ein vnitet, wann er nit mehr vormag mit seiner potentz dann vnitatem, vnd ziehen ab die potentz der vnitet, vnd surgit der letzte Centenarius,

1̇5̇1̇2̇9̇
1̇10

vnd also haben wir 10 vor radicem gegen dem negsten centenario, die ander station. Nun sagt der text, der quadrat wachse mit 2 radicibus, hierumb zwir 10 ist 20, das wollen wir herabzihen, so offte wir mogen, das mag zwir gesein. Also sprechen wir, das 2 ist der wachsende gnomo, vnd 20 ein supplement. Solchen gnomonem multiplicirn wir mit 20, wirdt 40, das ist *duplicatum*, als der text sagt; solche 40 zihen wir ab von 51 supra caput des andern centenarii, pleiben 11, die setze vber 51. Nun addir den gnomonem 2 zu 10, wirdt 12, vnd multiplicir den gnomonem in sich, wirdt 4, der zensiculus; den zeuch auch von 11, bleiben 7 respectu centenarii.

7
1̇1̇
1̇5̇1̇2̇9̇
1̇1̇2̇
123

Nun haben wir 12 vor radicem, der wirdt gegen dem Anfang der zalen gerechnet, vor 120, die duplirn wir, wann der text sagt, er wachse mit 2 radicibus; nun zween radices seind 240, die zihen wir ab, so offte wir mogen, vnd das ist dreymal, vnd wirdt also 3 gnomo; den multiplicirn wir mit 240, wirdt 720, die zihen wir ab, vnd multiplicirn 3, gnomonem in sich, wirdt 9, zensiculus, den zihen wir auch ab, vnd surgit. Also gib
79 der dritten station drey, vnd wirdt 123 radix der furgelegten | zalen rationalis in longitudine.[1])

1) Wir sehen hier, dass unser Verfasser bei Ausziehung der Quadratwurzel

Vnd solchs wollen wir geometrice ostendiren, damit man mercken mag, das der quadrat wechst mit zweien radicibus, gesprochen supplementa, vnd seinem zensiculo. Wir nemen vnitatem, des letzten centenarium, gegen der gantzen zal des andern Centenarij potentionaliter, vnnd wirdt 100, das ist der quadrat *abcd* (Fig. 11), des radix ist 10 in longitudine, das war vor 1 gegen dem ersten Centenario, aber hie wird es gegen der gantzen zaln gerechnet des andern Centenarii. Nun 2 radices von 10 sein 20, das multiplicirn wir mit dem gnomo *cf*, der 2 in latere hat, wirdt 40, dann 2 mus der gantze gnomo sein gegen der andern station der zwei supplementa.

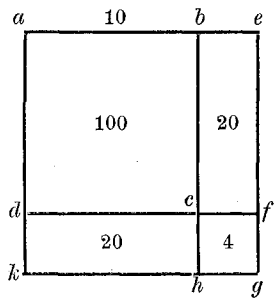


Fig. 11.

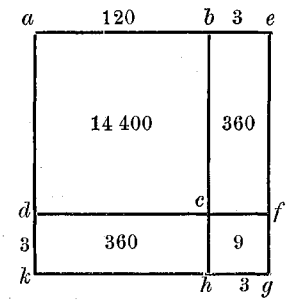


Fig. 12.

Nun ist der gnomo zu erfullen, die quadratur, auch aufsen. Multiplicir 2 auch in sich, wirdt 4, zeuch ab, also haben wir 12 der andern station, das ist der ander erwachsen quadrat vnd *ag*, als 144, angezogen auf der andern station des Centenarij, vnd also haben wir noch einen Centenarium 729. Ruckten wir weither 12, so khomen 120, wann wir sie einer Figur weither geruckt haben, das ist 10, vnd ist der quadrat *ad* (Fig. 12) 14400. Nun facit 2 radices 240, das mussen wir | duplicirn mit 79′
dem gnomone 3, khomen 720, das seindt 2 supplementa *bf* vnd *ck*, also ist auch aufsen 9 der zensiculus zu dem complement des quadrates *ag*. So der erfullt wirdt, khumbt das *ae* in longitudine, ist rationalis mit 123 vnitates, vnd ist recht.

Solchs wollen wir dich auch arithmetice demonstrirn. Wir setzen ein zal, die wir dann auch in den andern ductionibus gebrauchen wollen, vnd nemen sie durch zifferes, damit man mag erkhennen, das do radix vnd $\frac{1}{3}$

---

noch genau so verfährt wie Regiomontan mit Überwärtsrechnung und Durchstreichung der benutzten Ziffern, nur dass er die Punkte, welche die Hunderte bezeichnen, nicht unter, sondern über die Ziffern setzt. Die Beispiele haben sich nur im Göttinger Manuskripte und in *C. 8* erhalten. *C. 405* und *C. 349* fügen sie nicht hinzu.

vnterschidlich khomen in der multiplication. Sam also, wir multiplicirn wollen 1001, vnd machen hieraus 1 ʒ, furen den in sich selbst, khomen 1002001. Nun ist radix 1001, so nun 1000 wirdt jn sich gefurt, khomen 1000000. Nun ist der mit einer vnitet gewachsen. Nun 2 ꝛ̃ von 1000 sein 2000, vnd geb sie zu 100000, khumbt 1002000. Nun multiplicir den gnomonem 1 in sich, khumbt 1, das addir dazu, khumbt 1002001, das ist, so ich 1001 in sich multiplicr, khumbt gemelter quadrat wie oben geschrieben. Wir sprechen deshalben, das der wachsende quadrat zu seiner completur bedorffe zwei supplementa, die wir radices nennen, vnd den gnomonem, damit die quadratur erfullt wirdt, vnnd
80 volgt das dritt capitel. |

1001 radix
ʒ ꝛ̃ gnomo
1002001

Capitulum tertium de hauriendis radicibus numerorum cubicorum rationalium.

Cubum vero primum esse, quod solidi corporis mensuram metitur rationalem; tribus namque radicibus triplicatis gnomone, tribusque tetragonis duplicatis crescentiam circumscriptionis cum cubello habet regularem.[1])

Hie cleret Algebras die andere duction der rationalischen zalen, vnd sagt, das der cubus sei an der ordnung die ander duction, aber an jr selbst wirdt die aus dreyen planen Linien oder zalen zusam gefuget, jnmassen dann der quadrat aus zweien, aber an der ordnung der satzung gemelter duction wirdt der cubic, die andere duction, beschrieben, vnd laut zum teutschen also:

Der Cubic ist das erste thail, der do thailt die mensur der solidischen corporn rationalis, welche die wachsung hat der circumscribirung regulistrirt mit dreyen radicibus getriplicirt, mit 3 ʒ geduplicirt durch den gnomonem, mit sampt dem gnomene in sich cubice, genannt dem cubello.

Solchen text vorstentlichen einzufuren, nemen wir fur zu rationiren 1860867 in longitudine. So wisse, gleicherweis das der zens sein potentz
80′ des ersten limits nicht strecket | vber centenarium, also streckt auch der Cub sein potentz des ersten limits nicht vber den Milenarium, vnd hierumb rationiren wir gemelte zal durch den Milenarium, vnd halten auch bei yden Milenario ein station, vnd zum letzten im anfang der zalen, vnd thun dann gleicherweis, wie in dem quadrat. Wir suchen in dem letzten millenario die grosten potentz des cubi vnd ist 1, die ziehen wir herab, vnd rucken solche vnitet vnter den ersten milenarium, vnd bedeut 10, vnnd halten die andere station. Nun wechst der cub mit 3 radicibus, das

1) Nach dem oben Gesagten heisst das also:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^3y + 3xy^2 + y^3.$$

ist 30, vnd mit 3 ʒ von 10, ist 300, die mogen zwir abgezogen werden, vnd also wird 2 gnomo. Nun triplir 10 radices, vnd wird 30, vnd solchs triplir: sprich 2 mal 30 ist 60 vnd 2 mal 60 ist 120, vnd solchs pei der Reststation abgezogen. Nun 3 ʒ von 10 seind 300, solchs duplir auch durch den gnomonem, wirdt 600, die zeuch auch bei der station herab. Darnach fure 2, den gnomonem, cubice, wirdt cubellus 8. Den zeuch auch herab pei der station, vnd restat bei dem ersten Milenario 132.

3
142
1860867
1 12

Nun rucken wir 12 auch weither bifs zum anfang vnd bedeut 120. Solchen radicem machen wir dreimal, wirdt 360. Nun 3 ʒ von 120 seind 43200, die mogen wir dreimal herabzihen, | hierumb wird 3 gnomo. Also triplirn 82
wir durch gnomonem corporaliter 3 radices, das ist 360, khomen 3240, das zichen wir herab. Nun multiplicirn wir superficialiter 3 ʒ auch durch gnomonen khumen 129600, das zichen wir auch herab in der dritten vnd letzten station im anfang der zalen. Also haben wir noch cubellum; multiplicirn 3 cubice, den gnomonem, khomen 27, das zichen wir auch herab; die abgeschrieben zal gehen gantz auf, also sprechen wir, das gemelte zal in longitudine wird gerationirt mit 123 vniteten.

Solchs wollen wir demonstriren in der vorgesatzten zal, vnd nemen vor vns 1000 in vnitate pro radice. Also were der Cubic dauon 1000000000. Solcher Cubic soll wachsen in vnitate. Nun erwechst der mit 3 radicibus, das wern 3000, solchs addirn wir zu 1000000000; wir nemen nun 3 ʒ von 1000, werden 3000000, das addirn wir auch sampt dem gnomone, wirdet 1003003001, vnd das ist der Cubic von 1001, welcher gewachsen ist in vnitate.

1001 ꝛ
cl ʒ ꝛ gnomo
1003003001 .

Solchs wollen wir auch demonstriren in continuis. Wir haben gesagt erstlich die zal 1860867, vnd haben sie rationirt mit zweien Millenarien, welches ersten potentz ist gewesen vnitas, die dann gegen den andern Millenario ist 10, das sei der Cubic *ay* (Fig. 13), welches latus ist *ak* 10, vnd sein potentz 1000. Nun sol | er wachsen mit 2 vniteten, jnmassen 82′
erstlich angezaigt, in der andern station, das wirdt der gnomo *ec*. Nun wechst er mit 3 radicibus *eb* vnd *de* vnd *qp*, das sind 30, vnd solche drei supplementa sollen wir solidiren mit dem gnomo 2, vnd werden 120, souil sind die supplementa solida. Noch seind 3 ʒ, damit er wechst, der erste *af* oder auch *bg*, der dritt *gd*. Nun 1 ʒ von 10 seind 100, das weren 300, die sollen auch solidirt werden durch den gnomonem 2, vnd werden 600. Noch

ist gebrechen der Cubellus 2, der mus auch solidirt werden *ec*, wirdt 8, vnd das alle seind crescentz des Cubs. Das addire, als 1000, des radix were 10, vnnd darnach 120, das weren 3 radices, vnd 600, das weren 3 ʒ, vnd 8, das was der cubellus, werden 1728. Alsouil ist der gantz cubus *ag*, des radix ist 12, wann 10 der erst vnd 2, damit er gewachsen ist, das

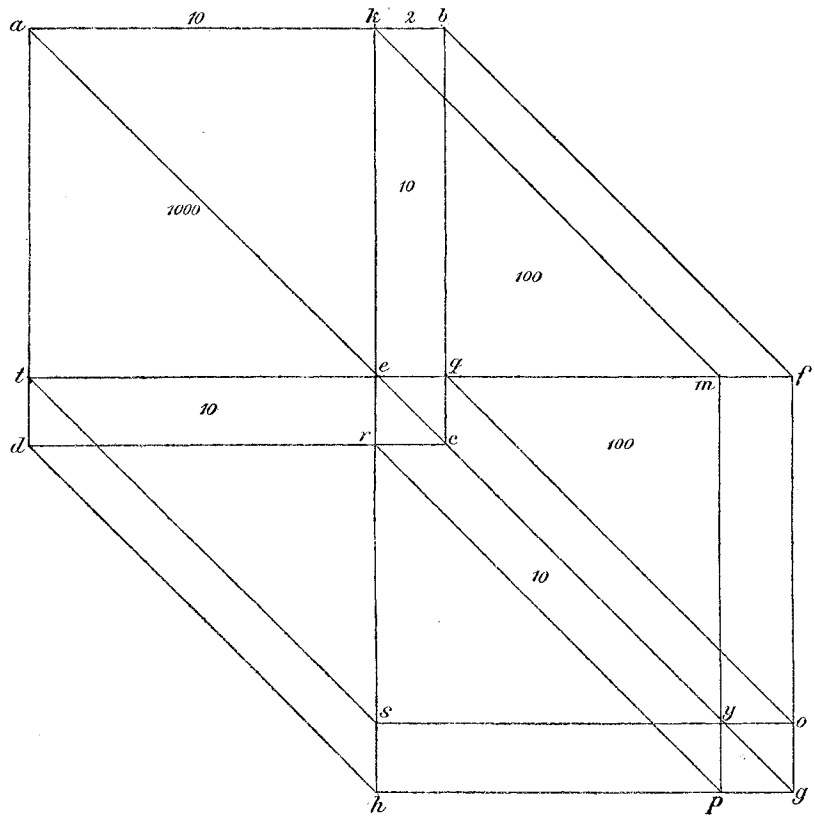


Fig. 13.

wirdt 12. Souil ist der cubus bei der andern station der furgelegten zalen herabgezogen. Solche 12 ist gegen der ersten figuren der furgelegten zal nach Ordnung der figuren, die bedeuten 120; die cubir wir, facit 1728000. Der cubus sey *ay*, als wie vor. Nun ist vor angezaigt, das er mit 3 vniteten
83 wachsen soll bey der letzten station, | das wirdt der gnomo. Nun wechst er mit 3 radicibus *ab*, *de* vnd *qp*, das seind 360, die sollen wir solidiren wie vor, khumen ⟨3240⟩. Nun 3 ʒ von 120 seind 43200, die gemelten *af*, *bg* vnd *dg*. Noch ist gebrechendt der cubellus 3, ist 27, das addire alles zusamen, vnd khumbt *ag* der gantze Cubus 1860867, vnd ist recht, vnnd probirt.

Capitulum quartum de hauriendis radicibus vel lateribus numerorum rationabilium quadratorum de quadratis.

Census de censo radicem radicis gerens tetragonicam ipse quidem complectitur quatuor cubis duplicatis gnomone, sex censibus triplicatis, quatuor radicibus quadruplicatis cum gnomonico parallelogrammo circa diametrum, inalterabilem quandam circumscriptionem crescentiae habet rationalem.[1])

Hie zeiget Algebras die dritte duction genant zensus de zenso vnd laut der text zum teutschen also:

Census de censu ist ein duction begerende der vorgelegten zaln ⟨radicem⟩ des radicis quadratisch gefurt, welche duction wirdt vmbgeben mit 4 cuben duplicirt mit dem gnomone, mit 6 ʒ getriplicirt, mit 4 radicibus quadruplicirt, vnd mit dem gnomone gefurt der duction gemes, pey dem diametro | gesatzt, durch 83′
welche duction also zens de zens vnvorwandelig vmbgeschrieben wirdt rationalischer erwachsung.

Solchen text vorstentlichen einzufuren, nemen wir vor zu rationiren 228886641 in longitudine. haben wir gesagt, das der Cubic des ersten limits sein potentz nicht strecke vber dem Millenarium, also streckt auch ʒ̊ʒ̊ sein macht nicht vber decem millenarium, sonder darunter. Hierumb so rationiren wir die obgemelten zalen mit 5 figuren, vnd halten aber in gemelter form pej jtzlichem zehntausent ein station, als wir jn Cubic gar eigentlich zu vorstehen geben haben. Wir suchen zu dem letzten limit die grosten potentz der duction, die dann mag 1 sein, vnd zihen die ab, vnd rucken solchen vnitet vnter den nechsten distinguirten limit, vnd bedeut 10, jnmassen im Cubic.

1 152
228886641
1 10

Nun ist die duction wachsende mit 4 cubis. So cubir wir 10, khomen 1000, das ist 4000, vnd 6 ʒ von 10 seind 600, vnd 4 radices seind 40. Solchs addirn wir zusamen, facit 4640, die rucken wir in gemelter zaln 12888, das mag zweimal gesein, vnd also wirdt der wachsende gnomo 2, wie in dem cubic. Nun duplirn wir die 4 c̊, das ist 4000, facit 4000, vnd triplicir die 6 ʒ, das sein 600, khomen 2400, vnd quadruplicir | 4 ꝛ̊, 84
das seindt 40, werden 320: solchs addir alles zusamen, facit 10720; das subtrahir pey der station gehalten des geruckten Limit von der zaln mit sampt dem gnomone 2 in sich gefurt der duction gemes, werden 16, vnd

1) Das heisst: $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

restat vom limit. anzurechnen 21526641, vnd haben also der station gehalten vnd ausgericht. Nun rucken wir die 10 mit dem gnomone, das ist 12, zu dem anfang der zalen, die do seindt bedeutent 120, die werden also genomen vor die radices.

ꝛ 152
ꝛ228886641
ꝛ 120

Nun machen wir 4 cubic von 120, seindt 6912000, vnd 6 ꝛ von 120, seind 86400, vnd 4 ꝛ seind 480: solchs addirn wir alles zusamen, facit 699880. Besihe, wie offte man solche zal mag abzihen von ehegesetzten zaln 21526641, das mugen wir dreimal nemen, vnd also sprechen wir wie vor, das drei wirdet der gnomo. Darumb duplicire die 4 ꝛ mit dem gnomone, werden 20736000, vnd 6 ꝛ, das seind 86400, die triplicir mit dem gnomone, werden 777600, vnd 4 ꝛ, das seind 480, die quadrupliciren wir, machen 12960. Solchs addir alles zusamen, werden 21526560. Solchs subtrahir von eegemelten zalen, vnd pleiben 81, vnd so du den gnomonem in sich furest nach laut der duction, so khumbt 81, vnd gehet die ehegemelte zal gantz auf, vnd also sprechen wir, das dj gemelte zal ist ꝛꝛ,
84′ vnd sein radix ist 123, vnd defsgleichen machstu thun jn andern. |

Vff das wir aber dem text genug thun, jnmassen sich zu demonstriren gepurt, nemen wir die anfengklichen zalen jm quadrat vnd cub genomem.

ꝛ ꝛ ꝛ gnomo

Also sprechen wir, das 1003003001 sei der cubic des radix 1001. Solchen radicem furen wir in den cub, wirdt naturlich daraus ꝛꝛ. Nun sehen wir in dem Cubo, das die letzte vnitet ist der cubic von 1001, darnach 3 seind 3 ꝛ, vnd darnach wieder 3 seind 3 ꝛ, vnd die letzte figur vnitas ist der gnomo. So wir nun gemelten cubo haben pracht jn ꝛꝛ, der dann ist wie hie:

ꝛꝛ ꝛ ꝛ ꝛ gnomo
1004006004001 ,

sprechen wir obgemelter massen, das die letzte vnitet in der zalen triplicibus ist der ꝛꝛ von 1000, vnd 4 ist 4 ꝛ duplicati von 1001, vnd 6 seind 6 ꝛ triplati von 1001, vnd die letzten 4 seind 4 ꝛ quadruplati von 1001, vnd die letzte vnitet ist gewesen der wachsende gnomo. Vnd also sihest du eigentlich, so jee weither der duction ist so extendirt, so offte sich mehr manigfaltigen die ꝛ etc., vnd also magstu dich in allen zalen halten. Gehet aber die zal nicht gar auf mit der duction, so hastu gefunden den grosten radix, vnd residuum magstu darnach mit einer gelehenten zaln resoluirn, jnmassen du in nachuolgenden Capiteln horen wirst, wie man die residua
85 sol | gebrauchen. Nun volget von den sursoliden, wie man da radicem

suchen soll, nicht quadratam, nicht cubicam, nicht censodecensicam, sonder jn welcher duction es aus ist gangen von dem rationalischen radice, der do ist gewachsen durch die multiplicirung in rationalisch satzung.

Capitulum quintum de radicibus hauriendis numerorum sursolidorum loco quidem ductionis rationalis quinto.

Sursolidum autem ampliorem cumulum soliditatis gerit, quinque censuum de censu duplicatis, decem cubis triplicatis, decemque censibus quadruplicatis, quinque radicibus quintuplicatis cum gnomone circumscribitur.[1])

Hie eroffnet vns Algebras seine vierte duction an der funfften stadt gesatzt, welcher text zum teutschen also lautet:

Sursolidum also genandt, das ist ein ungeregularisch corpus, ist begern eine grossere solidische heufung dann die fordern ductiones. Wann das genandt sursolidum wirdt vmbschrieben mit 5 ȝȝ geduplicirt, mit 10 ꝛ̃ getriplicirt, nach formirung der corporum, mit 10 ziensen quadruplicirt vnd mit 5 radicibus quintuplicirt, mit dem gnomo der duction gemes gefurdt. | 85

Welchen text besser zu ercleren, wollen wir vornemen den sursolidischen radicem zu extrahiren vnd rationiren jn longitudine. Sam also, wir setzen wollen zu rationiren die zal 7̇16703̇146875̇. So mercken wir, das wir jn mit dem sechsten limit distinguiren mussen, das ist mit 100000, wann 9 der digitus in dise duction gefurt wirdt, extendirt sich nicht vber gemelten limit, sonder vorbleibtt darunter. Wir signiren vnd suchen vnter dem letzten gedistinguirten limit, als vnter 71, was das groste sursolidum moge sein; finden wir, das 2 der radix des grossten ß̃. So wir das herabzihen, als 32, pleiben 396703̇146875̇. Solche 2 jetzt gefunden rucken wir zum andern distinguirten Limit, vnd bedeut 20, jnmassen vorhin offt angezaigt. Solche 20 nemen wir vor radicem, vnd wollen suchen den wachsenden gnomonem. Nun sagt der text, das sursolidum wachse mit 5 ȝȝ, die mache aus 20, werden 800000, mit 10 ꝛ̃ von 20, seind 80000, mit 10 zensibus von 20, seind 4000, vnd mit 5 radicibus von 20, seind 100. Solche addir alle zusamen, werden 884100. Dise zal suche in vorgelegter zal wie offte, mag 3 mal gesein vnd nicht mehr, vnd wirdt der gnomo, damit das sursolidum wachsen solle.

3
49
7̇16703̇146875̇
2̃ 20

1) Das bedeutet: $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$.

Nun duplicirn wir die 5 ȝȝ, das seind 800000, vnd werden geduplirt mit dem gnomone 3, vnd khomen 2400000; nun triplicirn wir die 10 ꝯ mit gemeltem gnomone 3, khomen 720000; nun quadruplicir die 10 ȝ auch
86 mit dem gnomone | 3, khomen 108000; quintuplicir 5 radices, die do seind 100, auch mit dem gnomone 3, khomen 8100, vnd fure den gnomonem der duction gemes, wird 243, vnd addir solchs alles zusamen, khumbt 3236343. Das nim von der zalen, die dann vorgelegt ist worden, vnd restat 73068846875. Vnd nun rucken wir 20 vnd den gnomonem 3, das ist 23, zu der ersten figur vnd halten alda die letzte station, vnd ist bedeuten 230. Solche zal nemen wir vor den radicem vnd sagen nachdem die duction wachsen ist mit 5 ȝȝ etc. Darumb machen wir 5 ȝȝ von 230, ist 13992050000; nun 10 cubi von 230 seind 121670000; suchen wir 10 ȝ von 230, khumen 529000; nun 5 ꝯ von 230 seind 1150: solchs addirn wir alles zusamen, khumbt 1414250150. Solche zal suche in den gemelten restanten von egemelter zal vorgelegt ist, das ist in 73068846875, vnd das mag 5 mal gesein. Also sprechen wir, das der gnomo ist 5, damit die sursolitet wachsen.

37
4930688
71670314687 5
2 20 230

Nun duplicir die 5 ȝȝ mit dem gnomo 5, werden 69960250000, vnd das seind 5 geduplicirt ȝȝ. Nun sollen wir die 10 cubos, das seind 121670000 triplicirn, das ist mit 5 mal 5, als 25, multiplicirn, werden 3041750000. Sagt der text, der ß wachse mit 10 ȝ quadruplicirt. Nun quadruplicirn wir 10 ȝ, als 529000 mit 5, vnd werden 66125000. Noch wechst der ß mit 5 ꝯ quintuplicirt mit dem gnomone; nemen wir 5 ꝯ, die seind 1150,
86′ die quintuplicirn wir, | werden 718750. Solchs alles addirn wir zusamen, vnd werden alle vmbgeschrieben supplement gesamelt 73068843750. Solchen ziehen wir von obgeschribener zal an negster station vberplieben, vnd pleibt 3125, vnd das ist der gnomo von 5 der duction gemes gefurt, vnd geht die zal gantz auf vnd ist ein sursolitet, des radix ist 235.

Solchs dich zu berichten, das sursolitet wechst mit ehgenanten circumscriptibilia, so nemen wir vor die zal in ȝȝ vorgenomen

ȝȝ ꝯ ȝ ꝯ gnomo
1004006004001 ,

vnd multiplicirn solche mit dem ꝯ 1001, so erwechst der ß. Wir multiplicirn, khomen

ß ȝȝ ꝯ ȝ ꝯ gnomo
1005010010005001 ,

also findestu in ehgemelter zaln, das die letzie vnitet ist sursolidum, die ander 5 ʒʒ, die dritte 10 ꝛ̃, die vierdte 10 z, die funffte 5 radices vnd die erste vnitet ist der gnomo, vnd so offt dann die duction gehet, so oft manigfeltigen sich die ꝛ̃, ʒ, ꝛ̃ vnd ʒʒ. Vnd desgleichen magstu in andern zalen extrahirn radicem sursolidam, wie wol er weder quadrat noch cubic, noch quadrat von quadrat nicht ist, doch bezaiget er seinen radicem nach ordnung der duction, wie offte dje multiplication ist ausgangen von der ersten ꝛ̃. Nun volget von dem zensicubo das sechste Capitel.

Capitulum sextum de hauriendis lateribus numerorum censicuborum loco, quo situantur rationales quidem ductiones, | 87

Censicubus autem crescit sex sursolidis duplicatis, quindecim censibus de censu triplicatis, viginti ꝛ̃ *quaternatis, quindecim censibus quintuplatis et sex radicibus sexcuplatis cum gnomico parallelogrammo.*[1])

Hie eroffnet Algebras seine funffte duction an der sechsten stadt gesatzt, den radix auszuzihen, welcher text zum teutschen also laut.

Zensicubus (gesagt ein zins des cubi, als 2 ist radix von 64 in dem zensicubo, also ist von 2 der zens 4, von welchen 4 ist 64 der ꝛ̃, vnd wirdt gesagt herumb zensicubus), welcher wachsen ist mit 6 sursolidis geduplicirt, mit 15 ʒʒ getriplicirt, mit 20 ꝛ̃ quadruplicirt, mit 15 ʒ quintuplicirt, vnd mit 6 ꝛ̃ sextuplicirt mit sampt dem gnomone, das ist ein winckelhacken, zu erfullen die quadratur.

Von solcher rationalischen duction ist zu extrahiren der radix, jnmassen wie vorgesagt ist, wie wol nicht not were, von diser duction zu setzen ein sonderliche rationirung, wann radix cubica von einer zal vnd alſsdann radix quadrata derselbigen radix cubica beweist radicem; ʒꝛ̃ ist deshalben also sein nam ausstrecken. Aber vff das wir der angefangen ordnung der duction halten mogen, wollen wir setzen zu rationiren in longitudine 1723586027803960̇96̇. Nun haben wir die negste duction distinguirt mit 6, | das ist mit 100000, so mussen wir nach ordnunge solche zalen distin- 87′
guiren mit 1000000, das seind 7 figuren, vnd heben an vnter dem letzten limit, vnd ziehen herab die groſse potentz des ʒꝛ̃, das ist der ʒꝛ̃ von 7, der ist 117649, pleiben biſs auf den limit 50709 etc., solchen septenarium rucken wir zu dem negsten gesatzten vierten limit, vnd ist bedeuten 70, jnmassen in den vorigen ductionibus gesatzt ist. Saget der text aigent-

1) Nämlich:

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

8152
545071126
65719248604
172358602780396096
7 70 740
4

lich, der ʒℭ wachse mit 6 ß̃ geduplicirt, suchen wir also 6 ß̃ von 70, die seindt 10084200000; suchen wir 15 ʒʒ von 70, seind 360150000; wir suchen 20 ℭ, jnmassen der text sagt, die seindt 6860000; suchen wir 15 ʒ von 70, die seindt 73500; wir suchen 6 ꝛ̃, seind 420. Solche circumscriptibilia sollen wir zusamenn addirn, werden 10450283920. Solche zal such in obgemelter restanten vorgelegter zal vberpliben vom anfang des limits zu rechnen, do wir haben die station gehalten, das mag nicht 5 mal sein, sondern viermal, das magstu wol versuchen. Nun sagt der text mit 6 sursoliden wachse der ʒℭ, die dann seind 10084200000, die sollen wir mit dem gemelten gnomone 4 gefunden duplicirn, werden 40336800000. Nun sollen wir die 15 ʒʒ gefunden, die do seind 360150000, triplicirn mit dem gnomone 4, werden 5762400000. Nun quadruplicirn wir die 20 gefunden ℭ, die waren 6860000 auch mit
88 gemelten | gnomone 4, werden 439040000. Wir quintuplicirn die 15 ʒ, die waren 73500, auch mit gemeltem gnomone 4, vnd werden 18816000. Noch haben wir 6 ꝛ̃ zu sextuplicirn. Nun 6 ꝛ̃ von 70 die machen 420, sextuplicirn wir mit dem gnomone 4, werden 430080. Solche zaln der circumscriptibilia addir alle zusamen, werden 46557886080, die zeuch vom vberplibenen restanten in vorgelegter zaln, vnd pleiben von der station 8152116700 etc. Noch haben wir den gnomonem 4 auch zu furen der duction gemes, der dann macht 4096; die zeuch auch herab bei der station, vnd pleiben 8152112604 etc., vnd also haben wir dise station ausgericht. Nun rucken wir jn fort zu der ersten figur, das ist 70 vnd 4, seind 74, vnd werden bedeuten 740 gegen der ersten, jnmassen in den andern ductionibus, vnd werden aber genomen vor den radix. Nun suchen wir aber die circumscriptibilia von 740, den radix, so finden wir, das sechs sursolida von 740 seind 1331403974400000, wann, so wir solchen wollen suchen, so multiplicirn wir 740, den radix, pifs in sursolidum, vnd nemen das 6 mal, also auch die gemelten andern circumscriptibilia. Wir nemen 15 ʒʒ von 740, die seindt 4497986400000, wann 1 ʒ ist 299865760000, dauon seind leicht die circumscriptibilia zu machen. Nun suchen wir, was 20 ℭ machen von 740, nun ist 1 ℭ 405224000, das multiplicirn wir mit 20, das seind 8104480000. Nun suchen wir 15 ʒ von 740, die seind 8214000, wann 1 ʒ ist 547600. Nun suchen wir zuletzt 6 ꝛ̃ von 740, das seind 4440. Solche supplementa alle addirn wir zusamen, damit der
88′ ʒℭ ist wachsen, | werden zusamen gesummirt 1335910073498440. Solche zal such im vberplieben restant; das mag nicht mehr dann 6 mal gesein, jnmassen man den quotient jn einer diuision nemen soll, vnd solche 6 wirdt

der gnomo. Sagt der text die 6 ß sollen mit dem gnomone duplicirt werden. Hierumb duplicir die ß, werden 7988423846400000; nun triplicirn wir die obgemelten ʒʒ durch den gnomonem, werden 161927510400000; nun quadruplicir die 20 cℓ mit dem gnomone 6, werden 1950567680000; nun quintuplicir die 15 ʒ, werden 10645344000; nun sextuplicirn wir die 6 radices, werden 34525440: solchs addir alles zusamenn, wirdt 8152112604393096 mit sampt dem gnomone 6 der duction gemes gefurt, vnd geht gantz auff die ehgemelte zal; das magstu probirn, wie in der sursolitet gesagt ist.

Capitulum septimum de hauriendis lateribus numerorum bissursolidorum loco ductionis, quo situantur, rationalis quidem dicti.

Bissursolidum autem continuum quoddam ductuum adiutum capit septem censicuborum duplicatorum, vigintiuno sursolidorum triplicatorum, triginta quinque censuum de censu quadruplicatorum, triginta quinque cuborum quintuplicatorum, viginti uno censuum sextuplicatorum, septemque radicum septuplicatarum cum gnomunculo, quo situ multiplicatio ab initio ordinis processerat, tot multiplicis ductionis subsumuntur crescentia circumscriptibilia diametro. | [1]) 89

Hie saget Algebras vom Bissursoliden, welche duction an der siebenden stat gesatzt vom ꝛ aus vnd nach ordnung, so ist der Bissursolitet die sechste duction, welche duction nach dem text laut zum teutschen also:

Das Bissursolidum, das ist ein hangende duction der andern, welche erfullung nimet mit 7 ʒcℓ, mit 21 ß, mit 35 ʒʒ, mit 35 cℓ, mit 21 ʒ, mit 7 ꝛ vnd mit dem gnomone der duction gemes, doch dermassen, an welcher stadt die multiplication vom anfang hat ausgangen, souil werden gemanigfaltigt die circumscriptibilia durch den gnomonem. Als die duction ist an der 7den stadt aufsgangen von dem radix, darumb werden die ꝛ geseptuplirt durch den gnonomem; von dem ʒ ist sie aufsgangen an der sechsten stadt, darumb werden die ʒ gesextuplirt; sie ist aufsgangen von cℓ an der funfften stadt, darumb wirdt der cub quintuplicirt durch den gnomonem; sie ist geruckt von ʒʒ an der vierdten stadt, darumb werden die ʒʒ qudruplicirt; sie ist gewandert von ß an der dritten stadt, darumb werden die sursolidi getriplicirt durch den gnomonem; sie hat gewandert an die andere stadt vom ʒcℓ, deshalb werden die ʒcℓ geduplicirt durch den gnomonem, vnnd also ist

1) Das heisst:

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7.$$

Von hier an führt der Bearbeiter die Wurzelausziehung nicht mehr durch, sondern zeigt, dass, wenn die Zahl wächst, die Potenz die angegebene Formel erfüllt.

es fort zu vorstehen in der nachuolgenden duction allermas, wie wir jtzo erclert haben von dem circumscriptibilibus.

89′ Vff das abber gehalten werd ein ordnung vorgesatzter | duction, so wollen wir rationiren ein zal in longitudine wachsende der duction gemes. Wir setzen nach ordnung der proportionalischen satzung, das 128 ist ein biß in potentia, des radix ist 2 in longitudine. Nun wollen wir setzen, das gemelter biß sol wachsen mit dem gnomone 3, also das er in 5 mochte khumen, zu probirn vnd zu erforschen, ob der gemelte biß wachse, jnmassen wie der text sagt, mit seinen circumscriptibilibus angezaiget. Nun hat 128 pro radice 2 in longitudine, sagt der text die duction wachse erstlich mit 7 zcℓ; nun ist zcℓ von 2 64, das machet 7 mal, facit 448; das duplicirn wir mit dem gemelten gnomone 3, facit 1344. Nun sagt der text weiter, die duction wachse mit 21 ß, nun 1 ß von 2 ist 32, der machen 21 gleich 672, die triplicirn wir mit dem gnomone 3, werden 6048. Nun wechst die duction weiter mit 35 zz, so ist 1 zz von 2 16, das machen wir funfundreifsig mal, macht 560, die sollen wir quadruplicirn mit dem gnomone 3, werden 15120. Sagt der text, die duction strecke sich auch mit 35 cℓ. Nun ist 1 cℓ von 2 8, der machen 35 wie hie 280, das mussen wir quintuplicirn mit 3, facit 22680. So wechst auch die duction mit 21 z. Nun ist 1 z 4, vnd der 21 machen 84, die sechstuplirn wir, facit 20412. Noch hat er zu wachsen mit 7 ꝛℓ. Nun ist 1 ꝛℓ 2, der 7 machen 14, die septuplirn wir mit dem gnomone 3, vnd khumen 10206, Noch ist gebrechent der quadratur, der gnomo 3, der soll der duction gemes gefurt
90 werden, sein | 2187, vnd das seind alle circumscriptibilia des gemelten biß. Die addirn wir alle zusamen, machen 78125, vnd das ist der biß von 5. Wann, so 5 der duction gehorig gefurt wirdt, khomen 78125. Vnd also magstu alle zaln extrahirn, von welchen du dann haben wilt den radix biß, welcher clerlichen in den vordern ductionibus ausgedruckt ist. Wann alle extraction der ductionum seind einformig, als du dann jm quadrat erstlich vnd andermals jm cub, vnd nachuolgendt anderweise mit den stationibus erfunden hast nach ausweisung der duction mit jren circumscriptibilibus, hierumb die grossen vormieden plieb. Vff das dem leser, vnd der solche sachen erfarn will, nicht verdrossen werde, die grosse der zaln zu multiplicirn, habe ich gedacht, solche erwachsung jn cleinern zaln zu eroffnen, dich in grossen, gleicherweise jn den vorigen zu halten wissen. Wie du aber sollt erfarung haben, aus was vrsachen die gemelte duction mit eegemelten circumscriptibilibus ist wachsen vnd nicht mit den andern minder oder mehr, haben wir die letzlich jm quadrat, cubic vnd zz jn numeris zu demonstriren eroffnet ein zal, welche, so du sie jn dise duction furst, findestu aigentlich jn simpler multiplication alle wachsende vmbstende

diser duction, welche zal von erster duction bifs zu letzter gleichmessig gefurt das letzte Capitel der ductionum dich berichten wirdt. 90′

Capitulum octavum de hauriendis lateribus numerorum census censui de censu loco ductionis rationalis dicti.

Census vero censui de censu crescentiam circumscriptionis suscipit octo bissursolidis duplicatis, viginti octo censicubis triplicatis, quinquaginta sex sursolidis quadruplicatis, septuaginta censibus de censu quintuplicatis, quinquaginta sex cubis sextuplicatis, viginti octo censibus septuplicatis, quoque octo radicibus octuplicatis, cum gnomonico circumscriptibili complemento.[1])

Hie saget vns ALGEBRAS von dem ȝȝȝ̊̊̊, vnd ist nach ordnung die siebende duction. Sie wirdt aber an der achten stadt von dem ȝ̊ ausgehen, welcher text laut zum teutschen also:

Zensus zensui de zensu nimet die wachsung der vmbschreibungen supplementa mit 8 bissursolidis geduplicirt, mit 28 ȝ̊c̊ℓ getriplicirt, mit 56 sursolidis quadruplicirt, mit 70 ȝȝ̊̊̊ quintuplicirt, mit 56 c̊ℓ sextuplicirt, mit 28 ȝ̊ septuplicirt, vnd mit 8 c̊ℓ octuplicirt, mit sampt der gnomonischen erfullung der vmbschreibung der duction gemes gefurt.

Vff das die ordnung gehalten werde, jnmassen jn vorgesatzten ductionibus, wollen wir diser duction extraction auch eroffnen, wiewol nicht not ist, die zu setzen, dann sie mag mit dem radice quadrata volfurt werden. Von ordnung vnd fundament wegen, darzu | wir sie gebrauchen werden, wollen 91
wir setzen ein cleine zal zuvor wachseu. Wir nemen 1256, der text begerende ȝȝȝ̊̊̊, des ȝ̊ 2 sol vnd ist, der sol wachsen mit 3. Saget der text der ȝȝȝ̊̊̊ sol wachsen mit 8 biß. Nun ist 1 biß 128, das nemen wir 8 mal, facit 1024, das sollen wir duplicirn mit dem gnomone 3, jnmassen vorgesagt ist, wirdt 3072, wann der ȝȝȝ̊̊̊ hat ausgeruckt an die andere stadt fur den biß, darumb multiplicir den mit dem gnomone. Saget der text der ȝȝȝ̊̊̊ sey wachsende mit 28 ȝ̊c̊ℓ getriplicirt. Nun ist 1 ȝ̊c̊ℓ 64, den mach 28 mal, facit 1792, das sollen wir triplicirn mit dem gnomone 3, facit 16128. Nun wechset er weither mit 56 ß̊ quadruplicirt. Nun ist ein sursolidum 32, das sollen wir 56 mal machen, facit 1792; das sollen wir mit dem gnomone 3 quadruplicirn, facit 48384. Er wachst auch mit 70 ȝȝ̊̊̊. Nun ist 1 ȝȝ̊̊̊ 16, das machen wir 70 mal, facit 1120, das sollen wir quintuplicirn mit dem gnomone 3, facit 90720. Er wachset fort mit 56 ꝭℓ gesextuplicirt. Nun

---

1) Das heisst:

$$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8.$$

ist 1 cℓ 8 von 2, das machen wir 56 mal, facit 448; das sollen wir mit dem gnomone 3 sesduplicirn, facit 108864. Er wechset furter mit 28 ʒ septuplicirt. Nun ist 1 ʒ 4, das machen wir 28 mal, facit 112, das mussen wir mit dem gnomone septuplicirn, wirdt 81648. Er wechst auch zuletzt mit 8 ꝛℓ geoctuplicirt. Nun ist 1 ꝛℓ von obgemelten ʒʒʒ 2, vnd das achtmal genomen facit 16; das sollen wir octuplicirn mit dem gnomone 3,
91′ facit 34992. Noch hat | die quadratur erfullung mit dem gnomone der duction gemes gefurt. Hierumb multiplicire den gnomonem so lang bifs in die duction ʒʒʒ khomet, facit 6561. Solche circumscriptibilia sollen wir alle zusamen addiren, khomen 390625, vnd ist das der ʒʒʒ von 5, wann wir eigentlich gesagt heben, das 256, des radix 2 ist, solle wachsen mit 3, das wirdt 5 jn der Crescentz, vnd hierumb ist zu vormercken, wie er hat gewachsen, also ist er auch zu extrahirn aller form zu behalten, als wir dann im Cubic vnd quadrat gar grundlich eroffent haben. Warumb wir aber dise angezeigte ductiones so weit strecken vnd gestreckt haben, werden wir befinden, so wir werden von den solidischen equationibus sagen vnser Gebra vnd Almuchabola. Denn, als wir vormals vermeldung gethun haben, wie der cubic vnd andere auch der solidischen Equation seind, so ist die ordnung vnter der proportionalischen satzunge, das die do sollen eingehen jn die Aporismata oder Equationes, sollen nach ordnung fallen der gesatzten ordnunge, so es geschicht durch ein ordentlichen saltum. Als mogen wir wol setzen, das do ꝑ + ʒ + cℓ werden vorgleicht ꝛℓ, oder so wir setzen cℓ vnd ꝑ werden vorgleicht ꝛℓ vnd ʒ, oder so wir setzen cℓ vnd ꝛℓ werden
92 vorgleichtt | ʒ + ꝑ, vnd der one zal. Hierumb zu seiner zeit dieselbigen mit den vorgesatzten durch besondere vnd behende wege mit den ductionibus der Equation der soliden vnd planen zu bringen, haben wir gedacht, dise ductiones also zu vorfuren, vff das wir haben mogen einen eingang, von dem wir dapfer sagen werden, wie ein jtzliche vorgleichung jn vnser Gebra vnd Almuchabola gebraucht soll werden.[1]) Nun volget zu sagen von der letzten duction ccℓ.

---

1) Hier sagt der Bearbeiter klipp und klar, er wolle an späterer Stelle zeigen, wie man Gleichungen lösen könne von der Form $a + bx^2 + cx^3 = dx$, oder $cx^3 + a = dx + bx^2$, oder $cx^3 + dx = bx^2 + a$. Wir haben schon oben S. 490 auf diese Stelle aufmerksam gemacht. Sollte der Verfasser wirklich diese Lösung besessen haben, und zwar aus arabischer Quelle? Denn Cardano's *Ars magna* erschien doch erst im Jahre 1545, das heisst in demjenigen, in welchem die Göttinger Handschrift angefangen wurde, und diese ist, wie ich schon oben agte, unter keinen Umständen die Originalhandschrift.

Capitulum nonum de hauriendis lateribus numerorum cuborum de cubo rationalium.

Cubus de cubo, qui statu decimi limitis ponitur, nec consueta ultra progressionem eius numerositate sit transductio, quoniam in infinitum protenderetur multitudo proportionalis descripti ordinis, ipse quidem complectitur novem ʒʒʒ duplicatis triginta sex bissursolidis triplicatis, octoginta quatuor censicubis quadruplicatis, centum quidem viginti sex sursolidis quintuplicatis, et centum viginti sex censibus de censu sextuplicatis, octuaginta quatuor cubis septuplicatis triginta sex censibus octuplicatis, novemque radicibus nonetuplatis, cum cubiculo de cubo gnomonico complemento.[1])

Hie saget Algebras von seiner letzten duction, cubus de cubo genant, vnd wirdt gesatzt an der achten duction, sie ist aber von dem ꝛ̊ an der neundten stadt ausgangen, vnd laut gemelter text zum teutschen also: 92′

Cubus de cubo, der do wirdt gesatzt pei dem Ende des zehenden Limits, wann 9 der letzte Limit ist pei zehen. Es ist auch nicht gewonlich, das die vbertrettung geschehe vber gemelte zal des cubi de cubo der gemelten duction, wann die zal der proportionalischen satzunge wirdt gestreckt mit angehengter multiplication pifs an ende. Er wirdt umbgeben mit 9 ʒʒʒ zu wachsenn geduplicirt, mit 36 bifs getriplicirt, mit 84 ʒcc̊ quadruplicirt, mit 126 ß quintuplicirt, vnd mit souil ʒʒ gesestuplicirt, mit 84 cc̊ septuplicirt, mit 36 ʒ octuplicirt, mit 9 radicibus nonuplicirt vnd mit dem wachsenden gnomo der duction gemes gefurt, welcher erfullung ist der quadratur.

Von diser duction die ordnunge zu halten, jnmassen wir vorgethun haben, nemen wir vor ein zal 512, welcher radic cc̊ ist 2, die sollen wachsen mit dem gnomone 2, also das der wachsende cc̊ in 4 khome, vnnd wie du hier jnnen thust, also magstu den extrahirn, als du im cubic vnd quadrat grundtlich vnterricht bist, welche weyse vorendert jn allen ductionen gehalten wirdt. Der text sagt, der cc̊ wachse mit 9 ʒʒʒ. Nun ist 1 ʒʒʒ von 2, 256, die sollen wir machen 9 mal, facit 2304; das sollen wir mit dem gnomone duplicirn, das ist mit 2, wirdt 4608, | das ist das 93
erste circumscriptibile. Sagt der text furter, er wachse mit 36 bifs. Nun ist 1 bifs von 512, des ꝛ̊ ist 2, das ist 128, das mache 36 mal, facit 4608; das sollen wir mit dem gnomone triplicirn, werden 18432. Nun wechst

---

Das heisst endlich:

$$(x+y)^9 = x^9 + 9x^8y + 36x^7y^2 + 84x^6y^3 + 126x^5y^4 + 126x^4y^5 + 84x^3y^6 + 36x^2y^7 + 9xy^8 + y^9.$$

er furter mit 84 ʒcℓ. Nun ist 1 ʒcℓ von 2, der ꝛccℓ von 512, das ist 64, das wollen wir machen 84 mal, facit 5376; das sollen wir quadruplicirn mit dem gnomone 2, werden 43008. Sagt der text weither, der ccℓ wachse mit 126 ꝑ quintuplicirt. Nun ist 1 ꝑ von 2, dem radix, 32, das sollen wir 126 mal nemen, wirdt 4032; das sollen wir mit dem gnomone 2 quintuplicirn, facit 64512. Sagt der text furter der cubus de cubo wachse mit 126 ʒʒʒ. Nun ist 1 ʒʒʒ von 2, dem radix, 16. Multiplicir 126 mit 16, facit 2016; das sollen wir sestuplicirn mit dem gnomone 2, werden 64512. Nun wechst er furter mit 84 cℓ. Nun ist 1 cℓ 8 von dem radix 2, das machen wir zu 84 malen facit 672; das wollen wir septuplicirn mit dem obgemelten gnomone 2, werden 43008. Er wechset furter mit 36 ʒ octuplicirt. Nun ist 1 ʒ von 2, dem radix, 4, das zu 35 malen facit 144; die octuplicirn wir mit 2, dem gnomone, facit 18432. Nun wechst er zuletzt mit 9 radicibus. Nun ist 1 ꝛ 2, der 9 machen 18, die nonuplicirn wir
93′ mit 2, dem gnomone, werden 4608. Nun sollen erfullen sein quadratur | der gnomo der duction gemes gefurt, ist 512. Das sollen wir alles zusam addirn, so finden wir, das er ist in 4 gewachsen, 262144, vnd desgleichen wirdt er auch extrahirt. Solche Circumscriptibilia findestu jn nachgesatzter

ccℓ	ʒʒʒ bi ꝑ ʒcℓ ꝑ ʒʒ cℓ ʒ ꝛ gnomo **1000900360084012601260084003600090001**
ʒʒʒ	bi ꝑ ʒcℓ ꝑ ʒʒ cℓ ʒ ꝛ gnomo **1000800280056007000560028000800 01**
bi ꝑ	ʒcℓ ꝑ ʒʒ cℓ ʒ ꝛ gnomo **1000700210035003500210007000 1**
ʒcℓ	ꝑ ʒʒ cℓ ʒ ꝛ gnomo **1000600150020001500060001**
ꝑ	ʒʒ cℓ ʒ ꝛ gnomo **1000500100010000500 01**
ʒʒ	cℓ ʒ ꝛ gnomo **10004000600040001**
cℓ	ʒ ꝛ gnomo **1000300030001**
ʒ	ꝛ gnomo **100020001**
ꝛ	gnomo **10001**

1)

1) Diese Tabelle ist sehr instruktiv und zeigt die Folge der Binomialkoeffizienten in sehr übersichtlicher Weise.

figuren vom ꝛ aus gemultiplicirt pis in den cc℄. Darinnen mogen wir sehen alle wachsende supplementa, vnd haben sie gesetzt dermassen, das die figure significatiue nicht mogen zusamen komen von wegen der ziffern entzwischen, vff das der verstandt der supplement nicht vorplendet werde durch zusamenfugung der significatiuen. Also so der ꝛ in sich gefurt wirdt, als 10001, so khumbt der ʒ, als 100020001; also bedeut 1 den ʒ, der do wachsend ist mit 2 ꝛ, das seind 2 ꝛ geduplicirt durch den gnomonem, das letzte 1 in sich. So aber nun ꝛ gefurt wirdt wider ʒ, so khumbt 1000300030001, das bedeut, das der cub mit 3 ʒ vnd 3 ꝛ sein wachsunge hat vnd mit dem gnomone der duction gemes, vnd zugleich fort. | 94

Capitulum decimum de distinctione limitum numerorum, quorum sit extractio ductionum hauriendorum laterum rationalium.

Causam autem geniturae ductionum monstravimus propter exhaurienda latera, quorum in primis limitibus numerorum distinguamus. Quaelibet enim rudix primo limite contenta censica censum quidem infra tertium producit, cubica vero cubum infra quartum; censica vero de censu potentiam suam infra quintum explicat. Quo enim loco ductio ordine proportionali situatur, illo limite distinguetur numerus hauriendae radicis. Ultimo ergo distincto limite cuiuslibet radicis extrahendae detrahatur eius potentia, quae quidem anterioranda erunt limitibus, ut augmentum circumscriptionis supplementorum, gnomonorum quoque crescentiam circa diametron inalterabilem complectionis accipiant. Omnium autem extractionum utamur formulis inscriptis tabularum.

Hie saget Algebras sein letzt intentum der duction, sagende:

Wir haben demonstrirt die vrsachen der geburt gemelter ductionen von wegen zuvorstehung jrer laterum, das ist jrer extrahirung, welche duction, so wir wollen aufszihen oder extrahiren jrre latera oder wurtzeln, sollen wir zum ersten die zal durch limit distinguiren, dermassen | ein jtzlicher radix aller 94′
duction des ersten limits, das ist digitorum der neun figur, gepirt den ʒ vnter der dritten dem limit, das ist dem centenario; den cubic vnterhalb dem vierten, das ist dem Millenario, den ʒʒ vnter dem funfften; das ist dem decemmillenario, vnd also fort, wo die duction wirdt gesatzt der vorgemelten proportionalischen satzung der signorum, desselbigen limits sollen die zal gedistinguirt werden, von welcher geschopft soll werden der radix. Also wollen wir etrahiren sursolidam radicem, das ist der sursolidus gesatzt in proportionalischer satzung vom dragma an der sechsten stadt, hierumb sol er mit dem sechsten limit, das ist mit dem

centocentenario gedistinguirt werden. So das also ist geschehen, bej dem letzten distinguirten limit einer jtzlichen duction radix zu extrahirn sol herabgezogen werden die potentz der duction gemes, welche also zu verandern sein, das ist zu ruck zum negsten distinguirten limit, vf das also durch den gnomonem die gemelten circumscriptibilia oder supplementa erwachsen, vnd erfullung bej dem diametro der superficien vnd corporum vnverruckt nemen werden. Aber in allen extractionen der gemelten ductionibus gebrauchen wir die formula der tabelen des ersten
95 limits digitorum, den wir also mussen presupponiren. | [1])

ꝛ	2	3	4	5	6	7	8	9
ȝ	4	9	16	25	36	49	64	81
cꝛ	8	27	64	125	216	343	512	729
ȝȝ	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
ꝑ	32	243	1024	3125	7776	16087	32768	59049
ȝcꝛ	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
ꝑꝑ	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969
ȝȝȝ	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721
ccꝛ	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489

95′ | Wann du wissen bifst, das du in 81 khein extraction khanst erstrecken, wann es ein einiger digitus ist, sein radix, dergleichen in andern ductionibus, so wir wollen extrahirn radicem sursolidam in 37, haben wir nach ordnung khein andere extraction, dann das es allein ein einiger digitus ist, der so helt des grosten sursoliteten radicem, das ist 2, vnd hierumb sagt der text von der tabellen des ersten limits. Wie nun ein yetzliche duction sol extrahirt werden, haben wir angezaigt, wie die stationen, so der text nennet, verandert sollen werden, vnd hierumb wollen wir hiermit vollendett haben den ersten tractat vnsers dritten buchs vnser Gebra vnd Almuchabola von den rationalischen zalen vnd jren lateribus, das ist jrer wurzeln. Das vestigium der tabellatur ist an der andern seiten dises blats

1) Hier ist also die von dem deutschen Bearbeiter schon bei den einzelnen Potenzierungen befolgte Anweisung gegeben, allgemein die Wurzeln der Zahlen zu suchen, und die Angabe, dass die Potenzierung nur gezeigt sei um der Wurzelausziehung willen. Die dann folgende Tabelle der neun ersten Potenzen der Einer ist dazu natürlich unumgänglich nöthig.

beschrieben des ersten limits aller ductionen, welche dir nutz sein jn gesatzten extractionibus zu erkhunden vnnd zu erforschen den gnomonem einer gesetzlichen duction gemes.

Tractatus secundus libri tertii ALGEBRAE *de communicantibus numeris, et primo proposito solo numero, an primus sive compositus contra se inveniatur tantum. Capitulum primum.*[1]) | 96

Omnis numerus, rationans totum et detractum rationat et residuum. Ex hoc manifestum: Omnis numerus residuum potentia numerantis a toto detracta numerans, numerat etiam numerum totum. Ex eo ipsum esse probatur omnium suorum communicantium rationalem compositum. Residuum autem incommensurabile si fuerit, descensu continuo primus et incompositus contra se invenitur mensurae unitatis rationalis.

Hie hebet ALGEBRAS an seinen andern tractat des dritten buchs, sagende von den communicanten der rationalischen zalen, vnd eroffnet das anfengklich zum teutschen lautendt also:

Ein ytzliche zal, die do rationiret oder zelet das gantze vnd herabgezogen, die zelet auch das vberpleibent. Hierumb wirdt offentlich, ein ytzliche zal, die do zelet das vberpleibendt, so anders derselbigen zelenden den zalpotentz oder quadrat von dem gantzen ist gezogen worden, so zelet auch dieselbige zal die gantze zal. Heraus wird probirt, das dieselbige zal ist rationalisch vnd zusamengesatzt durch gemelten Communicanten der Multiplication. So aber das vberpleibendt vngezelt pleibt durch angende herabsteigendt von den zalen zu zalen, so wirdt die vorgelegte zal primus vnd incompositus, das ist, das sie khein andere zusammensatzunge hat, dann das sie mit der gemeinen Mensur der vnitet, die do ist ein rationirung aller zalen, wirdet gezelet. | 96′

Von disen text schrifftlich den vorstandt einzufuren, cleret er nemblichen drey punct, dadurch er im letzten beschleust, das vilen geometricis noch nicht ist demonstrirt worden. Zum ersten nemen wir vor den ersten punct, sagende, ein ytzlich zal, die do zelet oder thailet eine gantze zal

1) Der zweite Traktat des dritten Buches handelt von ganzen Zahlen. Darin findet sich die Auseinandersetzung des einfachen falschen Ansatzes, der dem YLES und seinen Schülern zugeschrieben wird, des doppelten falschen Ansatzes, den die Araber benutzt hätten, der Ta-yen-Regel mit ihrer Begründung und die Lösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades in ganzen Zahlen, welche den Indern zugeschrieben werden. Dieser Abschnitt dürfte geschichtlich höchst beachtenswerth sein.

vnd die herabgezogen, sol auch rationiren das vberpleibent. Als wir nemen 144 vor die gantze zal, vnd herabgezogen 81, vnd das vberpleibent ist 63 von not wegen; so wir nemen ex suppositione 9 den numeranten, der zelet die gantzen vnd 81, hierumb mus 9 zelen das vberpleibent, als 63, von notwegen vnd nicht ex suppositione. Also mugen wir hieraus ziehen vmbgekert: ein yede zal, die do zelet das vberpleibent, so die potentz des numerantis ist herabgezogen von dem gantzen, dieselbige zal zelet auch die gantze zal. Als 9 zelet das vberpleibendt 63, vnd 81 ist die potentz des numerantis 9, die do von dem gantzen 144 ist herabgezogen, so ist, 9 numerirt 63 das vberpleibendt vnd 81 das abgezogen, so numerirt auch 9 die gantze zal, das ist 144. Also saget der text, das wir mogen wissen, ob ein yede zal sey compositus oder primus, das ist, das wir mogen wissen, so die alle proportionirt ist, das man khan finden alle zalen, die sie thailen oder zelen. Vns wirdt vorgeleget 144, zu finden alle seine communicanten.[1]) Wir suchen die potentz 144, ist 12, oder den grosten radix, so die zal
97 nicht gantz aufgeht. Also | sprechen wir, das 12 vnd 12 sein die grosten communicanten der gemelten zaln. Wir decendiren, als der text sagt: sie seind descenso continuo, vnd nemen 11, so wissen wir, das allweg die negste quadrat jre distantz habe durch die imparen jrer gnomon. Also, so ich die potentz von 11 herabzeuch von 144, bleiben 23, das thut 11 vnd 12 geaddirt, wann so wir die naturlichen satzunge der zalen alwegen ein parem vnd jmparem zusamen addirn, erwachsen angehende alle imparen die distantz der quadraten. Nun finden wir, das 11, der Numerant, nicht zelet 23, das Residuum, darumb zelet er auch nicht 144, vnd ist mit 11 kheine Mensur sonder 0. Wir descendiren vf 10, sprechen 10 vnd 11 seind 21, die addir zu 23, khumen 44, das ist das Residuum, so die potentz des numerantis 10 herabgezogen wirdt von 144. Also finden wir, das 10 nicht zelt die 44, darumb zelt es auch nicht die 144 (die 10). Wir staigen fort, addirn 9 vnd 10 wirdt 19, die addir zu 44, wird 63, das ist das Residuum des numeranten potentz, so die herabgezogen, als wir vorgemelt haben. Solchs Residuum wirdt gezelt von 9 zu 7 malen, also sagen wir, das 9 die 144 zelt. Addir 9 vnd 7, ist 16, so offt zelt 9 die 144, das seind die andern communicanten. Wann 9 numerirt die detraction 9mal, so ist 63 das residuum, wird 7mal numerirt: so ich addire 9, das detract numerirt,

1) Diese Methode, sämtliche Divisoren einer beliebigen Zahl zu finden, ist nicht ohne Interesse. Sie wird hier und später *Scala Jacob* genannt, doch wohl im Hinblick auf die Himmelsleiter, welche Jacob im Traume sah, wenn auch die Beziehung auf sie unklar ist, wie so vieles in diesem Werke. Es ist hier auch die Eigenschaft ausgesprochen, dass, um sämtliche Divisoren einer Zahl zu erhalten, man nur bis zur Quadratwurzel aus ihr die Zahlen darauf zu untersuchen braucht.

Scala Jacob.

12	12
11	0
10	0
9	16
8	18
7	0
6	24
5	0
4	36
3	48
2	72
1	144

vnd 7, das residuum numerirt, wirdt totum numerirt zu 16mal. Wir setzen fort zu 8, vnd addirn 8 zu 9, | ist 17, 97′
das addir zu 63, wirdt 80, vnd das zelt der numerant 8 zu 10mal. Addir 8 zu 10, wirdt 18, also finden wir 8 vnd 18. Wir steigen fort zu 7, vnd 8 wirdt 15; addirn wir zu 80, wird 95, die zelt der Numerant 7 nicht, hierumb wird er auch nicht zelen 144. Wir ruckten zu 6, vnd addir zu 7 khumbt 13, die addirn wir zu 95, khumen 108, die zelt der genant numerant 6 zu 18mal, hierumb zelt er auch 144, als die proposition sagt. Nun addir 18 vnd 6, ist 24, also seind 6 vnd 24 die vierten communicanten. Nun rucken wir zu 5, vnd 6 addirn wir, wirdt 11, zu 108 wird 119, die zelt der Numerant nicht, wann sein potenz 25 herab wirdt gezogen, pleiben 119, hierumb zelt auch 5 die 144 nicht. Wir steigen vnter sich zu 4, vnd 5 ist 9, das addirn wir zu 119, wirdt 128, die zelt der Numerant 4 zu 32mal, hierumb zelt auch 4 die 144 nach angezaigter proposition. Addir 4 vnd 32, wirt 36, also ist 4 vnd 36 der funffte communicant. Wir descendirn an der laiter zu 3, vnd 4 werden 7, die geben wir 128, wird 135, die zelt der numerant 3 zu 45mal, hierumb aigentlich zelt er auch 144. Addir 3 zu 45, khomen 48, so offt numerirt der Numerant 144. Also haben wir die sechsten Numeranten. | Wir descendirn vff 2, vnd 3 wirdt 5, zu 135 wirdt 98
140, die zelt der numerant 2 zu 70malen, also numerirt er auch 144, dann 2 zu 70 wirdt 72, vnd also haben wir den letzten communicanten ausgenomen die vnitet, die do ist ein gemeine mensur alle zaln. Also haben wir funden, so wir vorlegen ein einige zal, zu finden, ob die ist primus oder compositus. Finden wir sie als jtzt, sprechen wir, sie sey zusamengesatzt von ettlichen multiplicatiuen zaln, finden wir aber, das Residuum incommensurabile ist in dem absteigen, als der text sagt, mit den Numeranten, als er spricht: *residuum autem incommensurabile etc.*, vnd finden khein angende zal von dem radice aus pifs auf die vnitet, so sprechen wir, das die zal von kheiner mag gezelt werden, dann mit der vnitet, vnnd ist incompositus, dann so ein zal an sich selbst incompositus ist, so ist sie mit kheiner andern multiplicirn oder communicirn.[1]) Vnd in disem absteigen haben wir an dem ꝛ an der zalen, den wir nennen den Numeranten, vnd sein potentz detractum, vnd das vberpleibendt Residuum. Also ist nicht not von der zaln anfang zu descendiren, sondern von jrem

1) Die beschriebene Methode ist also auch zur Bestimmung der Primzahlen ausreichend.

radix anzuheben, als der text sagt: *potentia numerantis;* vnd also mogen wir finden ein yde zal, ob die wider sich selbst primus sei oder nicht, vnd
98′ ist dise proposition soluirt. |

Capitulum secundum de communi mensura unitatis numerorum in longitudine et potentia.

Omnium numerorum communis mensura est vnitas. Ex hoc manifestum, omnes eadem esse communicantes longitudine et potentia, longitudine quidem proportione, ut numeri ad numerum, rationalis datae, potentia vero, quemadmodum quadrati numeri ad numerum quadratum superficiei quadratae unitatis rationantis rationabilis datae in longitudine.[1])

Hie eruolget Algebras sagende, nachdem er vormals gecleret hat jm letzten spruche: *invenitur mensurae vnitatis rationalis etc.,* von diser vnitet sagt er, welche ist eine gemeine Mensur aller zalen, vnd laut zum deutschen also:

Aller zalen ist ein gemein mensur vnitas, dann alle zalen haben vrsprungklich jren anfang wachsendt aus der vnitet. Hierumb wirdt offenbar, das alle zalen communicirn in der lenge vnd potentz mit der obgemelten vnitet, doch also: in der lenge als ein zal habendt ist ein proportz zu der andern der gegebenden vnitet, die do sollen zelen. Als 7 vnd 5 communicirn in der lenge, wann vnitas zelt 7 zu 7 maln vnd 5 zu 5 maln, hierumb wirdt die proportz nicht anders angesehen, dann als 7 gegen 5. Ist der
99 vnitet nach in der potentz, aber so ist vnitas | aber eine gemeine mensur als einer quadratisischen zalenn mit der andern, zu rationiren mit einer quadratischen unitet, die do geben ist, damit zu rationirn in potentia. Als so wir 5 vnd 7 ansehen als quadraten, so ist die gemelte vnitet in 7 oder 5 ein quadrat, welche vnitet ist in der lenge gegeben ein vnitet, die so sie potentionirt wirdt, entspreust die quadratische vnitet, damit die quadraten sein zu rationirn.

Disen text schrifftlich einzufuren vf einen vorstentlichen sin, so nemen wir vor 7 vnd 5, vnd sagen, das ein yede zal ist nach dem fordersten capitel an sich selbst primus vnd alleine mit der vnitet zu zelen, die do ist ein gemeine mensur aller zaln, als dann das capittel erinnert. Vnd nachdem

---

1) Dieses Kapitel setzt noch einmal ausführlich den Unterschied zwischen in der Länge rational und in der Potenz rational auseinander, sowie denjenigen, der zwischen der Einheit als gemeinsames Maass sowohl aller in der Länge als auch aller in der Potenz rationalen Zahlen besteht.

7 wirdt gezelt zu 7 mal, vnd 5 zu 5 mal in der lenge, so sehen wir sie an, das sie seind rationalische radices der quadraten, jn welchen sie vermaglich sein, als 7 vermag 49 den quadrat, welchen quadrat messen 7 schuch in der lenge, vnd 5 vermag 25, den quadrat, welchen quadrat messen 5 schuch jn der lenge. Also will ich ansehen 25 vnd 49 als quadraten, so mensurirt sie die quadratische vnitet, welche jr geben ist den schuhen jn der lenge, als der schuch in der lenge von 7 sein quadrat mensurirt 49 zu 49 maln, vnd der schuch in der leng von 5 sein quadrat mensurirt 25 zu 25 mal. Hierumb mogen wir mercken, das ein yede vnitet in der leng bedeut ein rationalische quadrat vnd in potentia, | vnd widerumb nicht ein yeder quadrat 99'
in potentia bedeutet ein rationalische vnitet in der leng. Wan $\sqrt{7}$, des quadrat angesehen hat 7 quadratische vnitet in potentia, welche jtzliche

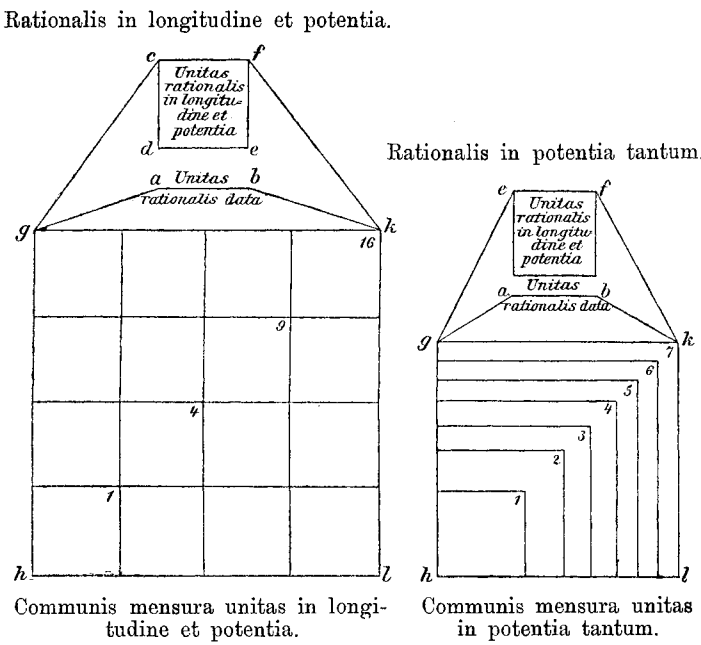


Fig. 14.

jn der lenge nicht ist rationalisch mit der lenge von 7 des quadrat, vnd herumb wird 7 in der lenge der quadrat nicht rationirt mit der rationalischen data, welche gegeben ist jren quadratischen vniteten jn der lenge, und hieraus werden die zaln erkhent, pei vns surdi genent, von welchen nachuolgent wirdt gesagt. Also mogen wir clerenn, das alle zalen mogen sein rationalis in potentia, wann 7 mag ein quadrat sein, vnd sein radix ist surd. Ein ytzliche zal ist auch in longitudine rationalisch, so sie wirdt

angesehen vor radix irer potentz, den sie vormag; als 7, wann wir sie ansehenn, das sie 49 vormag, so ist sie rationalis zu messen mit vniteten als 7, welcher vnitet ist geben der superficie in der lenge potentz, welche superfices quadrata zelet 49 zu 49 malen. Also beschliefsen wir, das vnitas ist ein gemeine mensur aller zalen, doch gespaltener meinung, als der text sagt. In der lenge, so ist sie linearis, vnd in der potentz, ist die vnitet superficialis, also dann clerlich die tabellen Moisy ercleren.

100 Tabulae lapideae Moisy (Fig. 14 auf S. 549) sequuntur.[1]) |

In disen zweien steinern tafeln Moisy finden wir, das die erste mit der andern communicirt allein in potentia der superficien vnitaten; wann die erste ist rationalis in longitudine vnd potentia, so ist die ander allein in potentia rationalis. Haben hierumb eine gemeine mensur, das ist eine superficiem der vnitet, der sie alle rationirt, die erste 16 mal vnd die ander 7 mal. Vnd die rationalis data der superficie der vnitet quadratae rationirt die erste tabeln 4 mal in longitudine, vnnd die ander wirdt incommensurabilis mit jr, als hiernach volget die vrsach, vnd volget das dritte capitel vnsers andern tractats.

Capitulum tertium de maxima mensura numerorum communicantium
100′ *invenienda.* |

Maxima numerorum communicantium mensuram invenire. Diviso maiore per minorem, minoreque per residuum, quoque relicto, donec terminus eos in minimos contra se primos exiens inveniatur, fuerit tunc eorum proportio, quemadmodum quadrati numeri ad numerum quadratum, eos rationales esse in longitudine et potentia, quod si fuerit proportio eorum, quemadmodum non numeri quadrati ad non numerum quadratum, eos longitudine incommensurabiles esse dicuntur, quod potentia tantum communicantes superficiei rationalis datae.[2])

Nachdem Algebras clerlichen hat ausgedruckt zum ersten, zu finden, ob ein zal an jr selbst communicanten hab, oder primus sey, vnd darnach, das alle zaln haben ein gemeine mensur, die vnitet, hie saget er von der

---

1) Auch diese beiden Figuren sind eine Anspielung auf die Gesetzestafeln des Moses.

2) Dieser Paragraph lehrt das Euklidische Verfahren das grösste gemeinsame Maass zweier Zahlen zu bestimmen. Die am Ende desselben gegebene Figur der *Virga Aaron*, die an den zur Schlange gewordenen Stab Aaron's erinnern soll, zeigt zugleich, dass die zu untersuchenden Zahlen sowohl in der Potenz als in der Länge rational sind, wenn sich die Quotienten durch den gemeinsamen Theiler wie zwei Quadratzahlen verhalten, dagegen nur in der Länge rational, wenn dies nicht der Fall ist.

grosten mensur oder von den grosten Communicanten zu finden zweier zalen, welcher text zum teutschen laut also:

Zu finden die groste Mensur der communicanten zalen soll also geschehen, so do gethailt wirdt die groste zal mit der minsten, vnd die minste durch die vberpleibenden, vnd das vberpleibend durch das negste verlassen etc., also lang bifs do gefunden wird ein terminus oder zal, welchs sie aufszeucht die vorgelegten zalen in die contra se primos, das ist das sie fort zu kheine andere wider mogen gethailt werdenn dann jn die vnitates, dauon gesagt ist. So dann das also volfurt ist, vnd sie jn die cleinsten zal pracht seind, | haben sie die proportion 101
gegeneinander als ein quadratische zal gegen der andern, so sprechen wir, das die vorgelegten zaln seind rationales communicantes jn der lenge vnd jn potentia; ist aber der resoluirten zal kheine gegen der andern als ein quadrat gegen dem andern, sagen wir, das die vorgelegten zaln seind in der lenge incommensurabiles, das ist, das sie nichtt mit einander gemensurirt werden, vnd werden gesagt in der potentz allein communicantes mit der quadratischen superficie, die gelihen wirdt der vnitet rationalis datae in der potentz.

Von welchen text zu sagen vnd den zu leutern, so will ich setzen zwo zalen 279 vnd die ander 496, vnd wollen sehen, jn welchen form die miteinander communicirn jn der grosten Mensur. Sagt der text, wir wollen thailen 496 mit 279, pleiben 217. Nun sollen wir thailen 279 mit 217, das ist die kleiner zal mit dem vberpleibend, pleiben 62; nun sollen wir das residuum 217 thailen mit 62, khumbt im restant 31; nun sollen wir thailen 62 in 31, vnd geht gantz auf. Also sagen wir, nachdem der text sagt, das 31 ist der terminus, das ist die zal, die sie aussucht in die minsten zwo zalen nach jrer proportion, vnnd 31 thailet sie bede, vnd ist die groste Mensur. Nemlich 496 mit 31 khumen 16. Nun thailen wir 279 mit 31, khumen 9, also sagen wir, das die gemelten zaln seind in der cleinsten proportion | 9 vnd 16, welche zwo zaln sich zusamen halten 101'
jnmafsen als zwen quadraten, sam 279 gegen 496. Derhalben sagen wir, das 279 vnd 496 seind in potentia vnd longitudine commensurabiles. In potentia so mensurirt 31 den quadrat 279 zu 9malen vnd 496 zu 16malen, vnd in longitudine so mensurirt 31 des quadrats lenge 279 zu 3mal vnd 496 zu 4maln, gleicherweis als 9 vnd 16 communicirn in longitudine, als 9 zu 3malen mit der vnitet, vnd 16 zu 4malen, also mogen wir demonstratiue beweisen, das jre equa multiplicia auch also communicirn. Nemblich so wir die vnitet, die do mensurirt 9 vnd 16 in longitudine, mit

Virga Aaron.

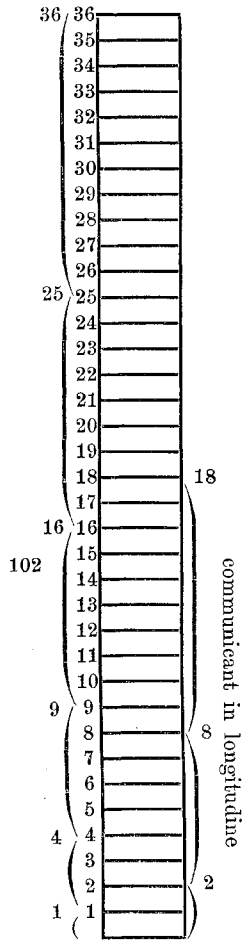


Fig. 15.

der mensur gefunden 31 multiplicirn, khumbt 31, vnd 9 vnd 16 auch damit, khumbt 279 vnd 496, also sprechen wir, das 279 vnd 496 seind equa multiplicia von 1 vnd 9 vnd 16, alle genomen in potentia; vnd so wir nemen die radices von 1 vnd 9 vnd 16, khumbt 1 vnd 3 vnd 4, vnd also sprechen wir das 31 zele den quadraten 279 in seiner lenge zu 3malen vnd 496 zu 4maln, vnd also haben wir clert den ersten thail des text. Wir nemen vor: *quod si fuerit proportio,* das andere thail, vnd suchen die groste mensur von 36 vnd 96, jnmassen obgethan, finden wir in den cleinsten zaln 3 vnd 8, welche die proportion nicht haben als ein quadrat gegen dem andern. Sagen wir, das 36 vnd 96 sein in longitudine incommunicantes vnd allein potentia rationales, dermas der quadrat 12, die groste mensur, zelt 36 den quadrat zu 3maln vnd 96 zu 8malen. Aber die radix davon in der leng von dem quadrat von 12 die communicirt | nit mit der lenge vom quadrat 36 vnd 96. Das ist aber in den obern zaln, vnd hierumb seind 8 vnd 3 gleich in potentia gegen der vnitet gerechent in potentia, die rationirt als jre multiplicia 96 vnd 36 vnd 12; wann 36 ist multiplex gegen 3, als 96 gegen 8 vnd 12 gegen der vnitet. So ist allwegen ein proportz der muitiplication, als wir sehen jn der virga Aaron, als do seind 1 vnd 4 vnd 9 rationales in der lenge vnd potentz commensurabiles, also sein auch 2 vnd 8 vnnd 18 jr equa multiplicia auch in der lenge vnd potentia commensurabiles. Also do 1 numerirt 9 zu dreimalen in longitudine, also mensurirt 2 die 18 auch 3mal in longitudine; als do mensurirt vnitas in potentia 9 zu 9malen, also auch 2 in potentia die 18 zu 9malen in potentia, als die rute Aaron (Fig. 15) clerlichen ausweist.

De inveniendo numero primo propositorum divisorum atque residuantium. Capitulum quartum.

Divisoribus contra se primis atque residuantibus propositis inveniendi numeri primi, quibus metiri habeat, omnium divisorum denominatio communis cuilibet communicat. Partium vero denominatarum denominantes cuius-

libet relinquitur incommensurabilitas, quae, si in unitatem residuantem, divisis divisoribus reducentur, primisque residuantibus producta multiplicentur, coacervatum deinde minus denominatione communi inveniendus numerus minimus propositorum divisorum atque residuantium contra se primus esse probatur.[1]) | 102'

1) Dieses Kapitel handelt von der sogenannten Regel Ta-yen und giebt genau den Weg an, auf welchem man zur Lösung gelangen kann. Das von dem Bearbeiter durchgeführte Beispiel, wenn die Reste nicht ein gemeinsames Maass haben, ist folgendes:

$$N = 7x + 5 = 8y + 7 = 9z + 6 = 11t$$

in ganzen Zahlen aufzulösen. 7, 8, 9, 11 heissen ihm die Theiler; 5, 7, 6 und 0 die Reste. Er bildet das Produkt der Theiler, das ist 5544, und theilt dasselbe durch jeden einzelnen Theiler, oder was dasselbe ist, er bildet auch die Produkte der jedesmaligen drei übrigen Theiler. So erhält er 792, 693, 616, 504. Diese durch den jedesmaligen Divisor nochmals getheilt geben als Reste der Reihe nach 1, 5, 4, 9. Nun sind also die obigen Quotienten so zu verwandeln, dass überall bei Division durch die Theiler die Einheit übrigbleibt, denn wenn man dann die sich ergebenden Zahlen mit den verlangten Resten multipliciert, so müssen bei der Division durch die Theiler die betreffenden Reste übrigbleiben. Die so entstehenden Zahlen nennt er reduciert. Die erste 792 ist natürlich reduciert. Für die übrigen geht er so vor. Den bei 693 übergebliebenen Rest 5 addiert er zu sich selbst und wirft 8 davon ab; den bleibenden Rest 2 addiert er wieder zu 5 und, da von der Summe 8 nichts weggenommen werden kann, so addiert er nochmals 5. Von der Summe 8 weggeworfen bleiben 4. Nach nochmaliger Addition und Subtraktion bleibt endlich 1 als Rest. Nun ist 5 fünfmal addiert, das ist soviel, als ob man 693 mit 5 multipliciert hätte, macht man also die Multiplikation, so erhält man 3465, und diese Zahl giebt durch 8 getheilt 1 als Rest. In ähnlicher Weise findet er, dass 616 mit 7 zu multiplicieren ist, so dass 4312 entsteht und, obwohl wegen des Restes 0, der für Division durch 11 bleiben soll, die Rechnung, wie er selbst sagt, nicht nöthig ist, führt er sie doch ebenfalls durch, und findet, dass 504 mit 5 zu vervielfachen ist. Sie wird dann 2520. Die so erhaltenen Hülfszahlen multipliciert er nun mit den jeweilig verlangten Resten, und die entstehenden Zahlen 3960, 24255, 25872, 0 geben addiert eine Lösung der Aufgabe, die durch Addition oder Subtraktion des Produktes aller Divisoren, also von 5544, weitere Lösungen liefert, deren kleinste 4191 ist. Diese Lösung stimmt absolut überein mit der chinesischen im *Swan-King* des Sun-tsze und der von Gauss in den *Disquisitiones arithmeticae,* die ja die obige Lösung, nur in moderne Zeichen gebracht, darstellt. Unser Verfasser geht aber noch weiter, wie Yih-hing im *Tayen lei schu.* Er erweitert nämlich seine Betrachtungen auch auf den Fall nicht theilerfremder Divisoren. Sein Beispiel ist in den Gleichungen enthalten:

$$N = 6x + 2 = 8y + 6 = 10z + 4 = 14t + 8.$$

Er sucht das kleinste gemeinsame Vielfache der Divisoren, das ist 840, und theilt dasselbe wie früher durch die einzelnen Divisoren, so erhält er die Quotienten 140, 105, 84, 60. Nochmalige Division durch die Theiler geben die Reihe 2, 1, 4, 4.

Hie saget ALGEBRAS zu finden die zal, welche durch angezaigte diuisores vnd residuantes primi sein; als er vormals gecleret hat, ob ein zal an jr selbst primus oder nicht sey, werden hie vorgeschlagen diuisores vnd residuanten, die do wider sich selbst primi der zu findenden zaln, vnd laut zum teutschen also:

So do seind proponirt diuisores vnd residuantes, die do wider sich selbst primi seind der zu findenden zaln, mit welchen divisoribus sollen getheilt werdenn der vberbleibendt restanten, so ist alweg die gemeine denomination, das ist der Nenner, communiciren oder zelen alle divisores oder die thail, die do also gezelt werden vnd benennt von jrem divisore, demselben thail wird verlossen oder entzogen die zelung oder commensurabilitas mit jren denominantibus, das ist von dem divisore, dauon sie genenet werden; welcher thail also benent, so die also durch jren divisoren gethailt werden, dauon sie genent werden, vnd reducirt wird dermas, das alwege vnitas residuirt, vnd so solche reducirung ist geschehen durch alle divisores, so sollen solche reducirte producte jtzlichs mit seinem residuum gemultiplicirt werden, vnd darnach das zusamen gethun von allen producten minder des gemeinen Nenners, so offt man den mag
103 herab nemen, das pleibende ist dj cleinste zal | wider sich primus der furgelegten thailern vnd restanten probirt.

Von disem text grundtlich zu reden vnd den vorstandt an tag zu

---

Da der erste Rest der von der Aufgabe verlangte ist, so bleibt 140 unverändert, der zweite Quotient 105 ist, da ja der Rest 1 geblieben, mit 6 zu vervielfachen, das giebt 630; der dritte Quotient 84 giebt wieder von selbst den Rest 4, er bleibt also unverändert. Würde man ihn aber, ebenso wie den ersten, nach früherer Art prüfen, so bliebe beidemale 0 als Rest. Endlich giebt 60 durch 14 getheilt den Rest 4, also muss $2 \cdot 60 = 120$ den Rest 8 geben, der verlangt ist. Die Summe von $140 + 630 + 84 + 60 = 974$ ist die gesuchte Zahl. Auch hier giebt Addition oder Subtraktion von 840 weitere Lösungen. Die kleinste ist also 134. Auch auf den Grund der weitern Lösungen geht er am Schlusse des Kapitels ein. Zuletzt enthält das Göttinger Manuskript auch noch die Bedingung, unter welcher die Aufgabe unmöglich ist. Das Beispiel ist

$$N = 5x + 4 = 6y + 3 = 8z + 2 = 9t + 1.$$

Hier geht 6 in dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen 360 auf, und die obigen Betrachtungen lassen sich also nicht in Anwendung bringen. Vergleiche hierzu besonders L. MATTHIESSEN, *das Restproblem in den chinesischen Werken Swan-king* von SUN-TSZE und *Tayen lei schu* von YIH-HING (CRELLE's *Journal* XCI, 254—261). Die Bekanntschaft mit solchen Aufgaben habe ich früher nachgewiesen bei LEONARDO PISANO, bei FRATER FRIDERICUS in Regensburg um 1450, bei REGIOMONTAN. Die Aufgaben, welche letzterer gestellt hat, siehe oben S. 219 und 295.

geben, wollen wir setzen zu finden ein Numerum primum mit 7, mit 8, mit 9; mit 11 soll er compositus sein: also mit 7 sollen im restanten 5 sein, mit 8 7 vnd mit 9 6, aber mit 11 soll er gar aufgehen. Also ist der suchende numerus primus gegen angezeigten theilern vnd residuanten, vnd ist auch compositus, wann mit 11 soll er communicirn. Sagt der text, das die gemeine denomination aller thailern communicir auch mit jtzlichem thailer. Hierumb giebt er anzeigung, das man soll machen einen gemeinen Nenner der divisoren, der dann ist 5544, welcher mit einem jtzlichen thailer ist communicirn. Als mit 7, so wird er gezelt 792mal, vnd mit 8 zu 693mal, vnd mit 9 zu 616mal, vnd mit 11 zu 504mal. Sagt fort der text, das solche benente thail von dem thailer, dauon benent werden, das ist von jren denominanten, nicht werden commensurirt: als 792 werden gesagt ein benent thail von jren denominanten 7, mit dem solch thail khein mensur hat, deſsgleichen die andern. Meldet der text fort, so die gethailt werden mit jren thailern, als 792 mit 7, restat vnitas; 693 mit 8, restat 5; vnd 616 mit 9, restat 4; vnd 504 mit 11, restat 9, vnd solche thail sollen dermas | reducirt werden jn andere zal, welche alſsdann, so 103′
die mit jtzgemelten thailern gethailt werden, das dann allenthalben vnitas residuir. Das soll dermassen geschehen: so wir thailen 729 mit 7, restat 1, dauon darf die nicht weither reducirt werden, als der text sagt, sunder sie pleiben vnuorwandelt. Aber so wir thailen 693 mit 8, restat 5, die mussen wir reducirn jn ein ander zal, so sie in die wirdt gethailt mit 8, das dann vnitas pleibt. So examinirn wir sie auch nach denn loca, vnd addirn 5 zu 5, wirdt 10. Dauon wirf 8 hinweg, pleiben 2; addir 5 vnd 2, wirdt 7, vnd 5 zu 7 seind 12; vnd von 12 wirf aber 8 hinweg, pleiben 4; addir 5 vnd 4, wirdt 9, dauon wirf 8, restat vnitas. Also zele die loca, findestu 5 loca, also multiplicir 693 mit 5, wirdt 3465, so ich die thaile mit 8, restat 1. Also ist der ander thail ausgericht. Dermas so wir thailen 616 mit 9, restat 4: also addir 4 vnd 4, wirdt 8, vnd 4 + 8 werden 12. Dauon wirf 9, restat 3. Addir 4 zu 3, wirdt 7; addir 4, wirdt 11, dauon 9, pleiben 2. Addir 4, wirdt 6; addir zu 4, wird 10, dauon 9, pleibt vnitas. Examinir die loca, der dann 7 seind. Hierumb multiplicir 616 mit 7, khumen 4312, so die mit 9 gethailt werden, restat vnitas. Desgleichen mogen wir thun mit 504, wiewol es nicht not, wann sie khein | Residuanten hat, darin sie soll gemultiplicirt 104
werden, als der text sagt. Nicht desterweniger wollen wir sie examinirn. Wir thailen sie mit jrem diuisore 11, pleiben 9, hierumb sollen wir die reducirn jn ein zal, jn welcher, so sie gethailt wirdt mit 11, das vnitas residuir. Addir 9, facit 18, vnd wirf hin 11, restant 7; addir 9 vnd 7, werden 16, wirf weg 11, restat 5, addir zu 9, facit 14, nun ab 11,

pleiben 3; zu 9 wirdt 12; dauon 11 restat vnitas. Also zele solche loca, khomen 5. Die multiplicir mit 504, facit 2520, so die mit 11 gethailt werden, restat vnitas, vnd also sagt der text, das bemelte thail seind reducirt jn zal, welche so die gethailt werden durch furgelegte divisores, restat vnitas. Warumb wir aber solche Reductionen durch die loca examinirt haben, propter hoc fit, das ist die vrsach. Wann, so wir nemen die reducirte zal eine, als 504, do pleiben 9, so wir zwispalten, duplirn sich auch 9, das residuum jn jr; hierumb haben wir gesagt 9 vnd 9 ist 18, hinweg 11 gegangen an der gespalten zal, vnd pleibt 7, wann 504 zu 2mal ist 1008, das gethailt mit 11, restat 7. So wir noch einmal 504 zu 1008 addirn, addirn sich 9 vnd 7 zusammen, wann jn dem ersten ist 9 das residuum, vnd jm andern 7, das wirdt 16, vnd ist die zal worden getriplicirt. Werfen wir von 16 die 11, restat 5, so man 1512 in 11 thailt, werden auch 5 pleiben. Wir addirn aber 504 zu 1512, so ist die zal quadruplicirt, vnd ist die vierdte stadt, khumbt 2016, welche so die
104′ gethailt wirdt mit 11, pleiben 3; wann jn 504 | pleiben 9, vnd in 1512 pleiben 5. Nun 9 vnd 5 zusamen, khumen 14. Nim 11, restat 3. Wir addirn 504 zu 2016, facit 2520, das ist die zal, die do gereducirt worden ist, vnd ist nun gequintuplicirt, als wir sagten, sie wirdt an der funfften stadt. Wann in 504 restat 9, vnd in 2016 restat 3, vnd 9 wirdt 12, also thailet sich 11 weg, rest vnitas, das haisst also reducirt in vnitatem residuantem, als der text sagt. Er meldet furter und spricht, das die jtzgenanten reductiones als 792 vnd 3465 vnd 4312 vnd 2520, ein ytzliche soll jn jrem residuanten gemultiplicirt werden. Also multiplicirn wir 792 mit seinem residuanten 5, facit 3960; wir multiplicirn 3465 mit dem restant 7, facit 24255; wir multiplicirn 4312 mit seinem Restanten 6, facit 25872; wir multiplicirn 2520 mit seinem Restanten 0, khumbt 0; vnd hierumb khumen solche product alle zusamen, als 3960 + 24255 + 25872 vnd 0, vor das letzte, als wir vrsach werdenn sagen. Die machen jn einer Summa 54087. Was vrsach das ist, darumb man sie zusamen thut, vnd mit dem restanten seind gemultiplicirt: wann ein ytzliche zal vorgemacht geht durch alle divisores auf ausgenomen mit seinem divisore, dauon sie den namen hat, do pleibt vnitas. Dieselbig vnitet ein ytzliche ist in den reducirten zalen mit jrem residuanten gemultiplicirt worden vnnd ist das residuum
105 daraus wordenn, vnd darumb, das ein ytzliche reducirte zal mit allen | diuisoribus aufgeht, aufsgenomen mit dem seinen, so geht sie nicht auf, hierumb

	Residuantes.		
5	7	6	0
	Diuisores.		
7	8	9	11
Partes denominatae.			
792	693	616	504
	Reducirt.		
792	3465	4312	2520

so mus die gantz summa 54087 auch durch die gemelten divisores nicht aufgehen, vnd mus residuirn mit jtzlichem divisore, als der text sagt. Sprechen wir, das 54087 sei die zal, die wir suchen, vnd so offt wir die gemein denomination darzu addirn 5544, ye grosser die zal wechst, nach der proposition gemes. Sagt der text: *coacervatum minus denominatione.* Hierumb zu yederweis, so offte wir die denomination herab nemen, so bleibt ein cleinere zal vnserm proposito gemes, vnd so die gemelte denomination nimer khan herabgezogen werden, so concludiren wir mit dem text, das das residuum sein mus minimus numerus, das ist die cleinste zal der angezaigten divisoren vnd residuanten. Also thaile 54087 mit 5544, pleiben 4191, vnd das ist die cleinste zal, so die gethailt wirdt mit 7, restant 5; mit 8, pleiben 7; mit 9, pleiben 6, vnd mit 11 ist er compositus.

Nun mogen wir abnemen bej disem text einen treffenlichen punct. So do wurden vorgeschlagen divisores, die do communicirn mit einander vnd khein ordnung wirdt gehalten derhalben, als ich setzen will oppositum textu, zu finden numerum primum mit disen diuisoribus. Wann jn zelet 6, sollen 2 pleiben, wann ich mit 8 zelen, sollen 6 residuirn, | vnd wann 105′
ich jnen mit 10 zele, soll 4 vberpleiben ⟨vnd wann ich jnen zele mit 14, soll 8 vberpleiben⟩. So machen wir einen gemeinen Nenner, darinn wir die denominantes partes vf das cleinste haben mogen, das ist 840, darjnn suchen wir die denominantes partes, machen nach einander volgendt 140 vnd 105 vnd 84 ⟨vnd 60⟩, vnd thailen jnmassen wie oben 140 in 6, pleiben 2, vnd hierumb, das er nicht khan in die loca khumen, dar jnn er aufging an der dritten stadt, darumb lassen wir jn reducirt vnd gemultiplicirt sein mit sein restanten 2. Wir thailen 105 in 8, vnd restat vnitas. Die multiplicir in seinen restanten 6, facit 630; wir thailen 84 mit 10, restat 4. So wir die wollen examinirn nach den locis vormals gethun, als 4 vnd 4 macht 8, vnd 4 macht 12, wirf 10 hinweg, restat 2, vnd 4 seind 6, vnd 4 machen 10. Nun 10 von 10 rest 0, soll vnitas pleiben. Dieweil 84 ist gethailt mit seinem divisore 10, vnd 4 jm restant, der im geben ist, lassen wir 84 reducirt sein. Wir thailen 60 durch 14, restant 4, vnd sollt vnitas restirn. So wir examinirn, so stedt er an der siebenden stadt auf in 0. Wie sollen wir dann examinirn? So mercken wir, das die, die do aufgehenn jn 0, vnd jrn restanten nach der proposition nicht furn sollen, seind reducirt. Dieweil aber 60 aufstehet, vnd seinen Residuanten 8 nicht mit furt, also sollen wir 60 examinirn, an welcher stadt jm werde gegeben | der restant 8. Sprich, so ich 60 mit 14 thaile, 106
restat 4, vnd sollten 8 restirn. Addire 4 vnd 4, wirdt 8, also geschieht das an der andern stadt. Multiplicir 60 mit 2, wirdt 120; so ich die

mit 14 thaile, restat 8. Also thue jm allerwegen, so die loca aufstehen mit der vnitet, so examinir jn nach den locis so lang, pifs jm sein restat gegeben wirdt. Also addirn wir 140 + 630 + 84 vnd 120, facit 974, vnd das ist die zal, so offt wir die gemelte denomination herabziehen, als 840. So wir sie aber addirn, so wirdt die zal grosser nach laut des texts. So wir abzihen, restat 134.

Warumb wir aber die denomination herabziehen vnd sagen, das Residuum sey die cleinste zal? Nach dem ersten capitell: *Omnis numerus rationans totum* etc. Ein ytzliche zal, so die thailt das gantz vnd herabgezogen, so thailet auch das Residuum. Dieweil also gemelte divisores thailen die gantze der proposition gemes, vnd thailen auch die denomination, sie thailen auch das Residuum, vnd also haben wir beider seit den text schrifftlich eingefurt.

In disem Exempel jtzt vorzeichendt ist denominator communis 360, vnnd nach dem jm ersten Exempel vermeldung gethun neben der figur des Exempels, das ein ytzliche zal aus gemeinem Nenner gezogen durch alle divisores, aufsgenomen durch seinen, soll aufgehen, | so begibt sich in solchem Exempel jtzd vorhanden, das 60 durch seinen diuisorem, welchs nicht sein solte, aufgehet, vnd nicht durch die andern alle. Deshalben befinden wir, vnd mogen sagen, das solchs vnmuglich sey zu machen, vnd andere dergleichen, so sich begibt, das ein zal durch seinen thailer vfgehebt vnd 0 restirent ist. Vnd volget also das funffte Capitel.

4	3	2	1	Residuantes
5	6	8	9	Divisores
72	0	45	40	Partes denominatae
864		900	280	Reducirt.

106′

De numeris compositis eorumque expositio, Capitulum quintum, et primo de perfectis.

Omnes numeros, quorum est mensura praeter unitatem, compositos esse contra se necesse est. Quod si partium aliquotarum numerositates colliguntur, aut maiorem, aut minorem, aut aequalem toto sortiuntur substantiam. Horum autem tam parium quam imparium solum perfecti, qui paritatis sunt substantiae, numerositatibus suarum partium reducuntur aequales, qui et paucissimi sunt et unius constanti ordine limitum procreati.[1])

Nachdem Algebras gesaget hat de numeris primis zum ersten, so do

1) Der vorliegende Paragraph handelt von nicht theilerfremden Zahlen und zunächst unter diesen von den vollkommenen Zahlen, von denen die drei ersten angegeben und auf die betreffende Eigenschaft geprüft werden.

furgelegt wirdt ein einige zal, zu finden, ob die primus sei oder nicht; zum andern, ob vns furgelegt wurden zwo zaln, zu finden, ob die primi contra se sein oder nicht, vnd jr groste mensur; zum dritt hat er gesagt von einer gemeinsamen mensur vnitatis aller zaln; zum vierdten halt er zu verstehn 107
geben zu finden ein zal, welche mit vorgeschlagenen divisoribus primi sein, vnd also ist de primis gesagt. Hierumb cleret er sprechende von den numeris compositis zum teutschen also lautendt:

Aller zalen, welcher do ist ein gemeine Mensur on die vnitet, dauon wir gesagt haben, dieselbigen seind von not compositi. Do derselbigen zal jrer benenten thail zusammen geclaubt werden, so machen die ein grosere zal, oder eine cleinere, oder eine gleiche zal der furgelegten. Der aller miteinander so do seind gerad oder vngerad allein die perfecti gesprochen, welche einer geraden substantzen sein, werdt gefunden werden gleich den zalen zusamen jrer gemelten thail, welcher auch sonst wenig ist, vnd einer vnvoruckten ordnung der limit, das ist der staffel der zalen, gemacht werden.

Disen text schrifftlich vorstentnus zu geben, cleret der text nachuolgendt von den diminutis vnd superfluis, welche, so ire benente thail zusamengefugt werden, machen sie ein weil zu viel, vnd ein weil zu wenig der gantzn zal vngemes. Aber die perfecti, von welchen wir sagen wollen, das ist von den volkhumenen zaln, die seind irer benanten thail zusam gesatzt gleich der furgelegten zaln, welcher zumal wenig ist, vnd werden also funden, so wir setzen nach ordnung die pariter pares also (Fig. 16): | 107′

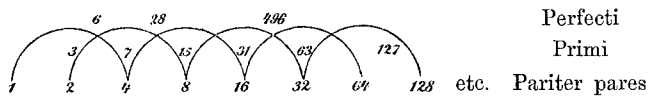


Fig. 16.

So wir addirn die ersten zwei 1 + 2, werden 3, der ist primus durch das erst Capitel. Also 3 werden gemultiplicirt mit dem letzten pariter parem geaddirt, das was 2; werden 6, vnd also sprechen wir, das do 6 ist compositus durch das erst capitel, vnd ist perfectus vnter dem limit 10. Wann ein ytzlicher limit hat nicht mehr dann eines, wann darumb sagt der text, jr seind wenig vnd nach ordnung der limites gemacht. Wann, so wir 6 examinirn nach dem ersten capitel, finden wir in der scala Jacob, das ist in dem descens der leiter, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$. Das seind alle benente thail in 6, welche an jrer zalen, sagt der text, zusamen seind gleich 6, der gantzen zal. Wann $\frac{1}{3}$ ist 2, $\frac{1}{2}$ ist 3 vnd $\frac{1}{6}$ ist 1; das zusamen facit 6, vnd solchs

endet khein zal vnter 10, die do seind compositi gerad oder vngerad. Also hat der limit vnter dem centenario auch nicht mehr dann ein. Wann wir in der obern disposition addirn 3 vnd 4, werden 7. Der ist primus, mul-
108 tiplicirt mit dem letzten pariter parem, als 4, | khomen 28, welcher ist perfectus oder volkhumene zal vnter 100. Wann, so wir jn examinirn nach vnserm ersten gesatzten Capitel des tractats, so finden wir jn *scala* Jacob $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{28}$, das seind alle bemelte Theil von 28, welche an der zal machen 28. Wann $\frac{1}{2}$ ist 14, $\frac{1}{14}$ ist 2, $\frac{1}{7}$ ist 4, $\frac{1}{4}$ ist 7 vnd $\frac{1}{28}$ ist 1. Das alles zusamen macht 28, vnd das thut khein andere zal vnter 100, vnd hierumb wirdt sie des andern limits gerechent ein volkhomene zal. So enden sich alle perfecti in 6 vnd 8 durch alle limiten aus. Wir gehen fort, addirn 8 zu 7, werden 15, vnd examinirn den nach dem ersten Capitell, finden wir, das der nicht primus ist, darumb mag er nicht perfectum constituiren, vnd vacat mit 8. Wann, so das mit 15 gemultiplicirt, facit 120, das wirdt nit perfectus vnd khemen zwene vnter dem Limite millenario. Wann so wir addirn 15 vnd 16, werden 31, vnd der ist primus. So der mit 16 wirdt multiplicirt, facit 496, vnd der ist perfectus vnter dem limit 1000, vnd khein andere. Wann alle seine benente thail seind die zalen von den er compositus ist, das ist von 1 von 2, 4, 8, 16, welche also jre Correlatiua multiplication herwider haben. Wann 1 ist genant $\frac{1}{496}$ vnd herwieder von 496 ist genandt $\frac{1}{1}$, also $\frac{1}{2}$ ist 248 vnd $\frac{1}{248}$ ist 2; $\frac{1}{4}$ ist 124 vnd $\frac{1}{124}$ ist 4; vnd $\frac{1}{8}$ ist 62 vnd $\frac{1}{62}$ ist 8; vnd $\frac{1}{16}$ ist 31
108′ | vnd $\frac{1}{31}$ ist 16, vnd solchs alles ist 496, khan also khein andere zal solchs vnter 1000 volenden, vnd also beschliesen wir mit dem text, das alle perfecti pares sein, welche ex suppositione werden gesagt compositi. Also mogen wir finden mit Hilfe des ersten Capitels alle thaile den compositen gleich wie der incompositen, vnd volgt das sechst Capitel.

De numeris compositis, qui diminuti atque superflui nominantur, Capitulum sextum.

Diminuti vero compositi contra se sunt, qui et substantiam paritatis atque imparitatis partiti sunt. Sub pariter namque paribus atque pariter imparibus resident simul et sub secundis et compositis imparibus. Superflui autem immoderata plenitudine sui corporis partium numerositate substantiam superabunt, et ipsi quidem sub sola impariter pari forma nascentur.[1])

1) In diesem Kapitel werden die mangelhaften und überschiessenden Zahlen behandelt, dabei auch die Ausdrücke *pariter par*, *pariter impar* und *impariter par* erklärt, letztere besonders deshalb, weil die *numeri superflui* sich nur unter den letztern finden sollen. Als Beispiel dient 36, das nach zweimaliger Halbierung unpaarig wird, und dessen Divisorensumme 55 beträgt.

Als Algebras hat gecleret jm negsten Capitel: *aut maiorem, aut minorem, aut aequalem* etc. Nun hat er aequalem demonstrirt, perfectum genant, eruolget nunmals die andern membra dividentia den numerum compositum, vnd laut der text zum teutschen also: | 109

Es seind auch diminuten compositi an jn selbst, welche auch gethailt haben die substantz gerad vnd vngerad. Wann sie seind vnter den pariter paribus vnd vnter den pariter imparibus funden, auch vnter den Compositen der imparen. Aber die vberflussigen zalen seind mit einer vngewisen vberflussigkeit vbertreffen durch jre benente thail der gantzen substantz der furgelegten zal, vnd werden allein geborn vnter den impariter paribus.

Von disen text zu sagen, nachdem er zwen partes hat von den diminutis vnd superfluis, ist not, das wir sagen kurtz zu vormelden, was pariter par sey, pariter impar vnd impariter par. Kurtz zu sagen, nachdem allenthalben in andern Buchern der kindern gemain ist, doch von anfahender diser disciplinen, so haisen wir, das pariter pares, die do mogen halb gethailt werden, das ist mit 2, bifs auf vnitatem, als 16, 32, 8 etc. Wir haisen die pariter impares, die do mit 2 gethailt werden einmal vnd nicht weither khonnen descendirn in paritate, das ist in der geradigkeit, als 10, 14, 22, 26, 34 etc. Wir nennen die impariter pares, welche descendiren vngleich in paritate einmal mehr dann das ander, khomen sie doch nicht vff die gemeinen mensur vnitatem, als 12, 36, 144. Vnd ye weither sie descendirn in paritate, ye mehr die benanten thaile, von dem sie wirdt compositus genant, erwachsen zusamen vber die substantz jrer zal, | daraus 109′
sie genomen sind. Als wir wollen cleren den ersten thail der diminuten; sagt der text, das sie allein vnter dem pariter pare seind vnd vnter den pariter imparibus. Wann, so wir setzen einen ytzlichen pariter parem vnd examinirn den in der scala auch, nachdem er absteigt in paritate vff die vnitet, finden wir, das sie allwegen diminuti seind, das ist, das sie nicht gantz jre zal vermugen die benenten thail, daraus sie genomen seind, vnd ist der Bruch allwegen an einer vnitet in pariter paritibus. Als wir setzen 16; hat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ vnd $\frac{1}{16}$, wann sie nach ordnung nach disen zalen in paritate steiget. $\frac{1}{2}$ ist 8, $\frac{1}{4}$ ist 4, $\frac{1}{8}$ ist 2, vnd $\frac{1}{16}$ ist 1, vnd so wir das alles copulirn, so finden wir 15, das ist einer vnitet minder, dann der corpus ist, vnd also ist es in allen pariter paribus, vnd hierumb so sprechen wir propter quid in der dupla progression, das man das letzte sol duplicirn vnd vnitatem oder das erste herabzihen, dann das letzte hat alle benante fordere thaile, die zusamen machen corpus minus 1, vnd hierumb hastu vrsach, warumb das geschieht etc. Die diminuti werden auch gemacht von den

pariter imparibus. Als wir sprechen 14, welcher compositus ist, vnd
110 so seine benenten thail zusamen werden | gethun, machen sie weniger, dann das corpus ist. Sie werden auch gefunden vnter den imparibus die do compositi seind, als 27. Wann $\frac{1}{3}$ ist 9, vnd $\frac{1}{9}$ ist 3, vnd $\frac{1}{27}$ ist 1; solche thail zusamen machen 13, die dann weniger seind dann das Corpus. Aber als der text sagt im andern thail, die superflui, das ist die vberflussigen, werden allein funden vnter den impariter paribus vnd sunderlich, welche so sie nimer descendirn mogen, das sie seind secundi vnd compositi der inparen. Als 36, so wir descendirn: halb ist 18, halb ist 9, vnd 9 ist secundus vnd compositus. Hierumb wirdt 36 zumal sehr superfluus gesprochen. Wann $\frac{1}{2}$ ist 18, $\frac{1}{4}$ ist 9, $\frac{1}{6}$ ist 6, $\frac{1}{9}$ ist 4, $\frac{1}{12}$ ist 3, vnd $\frac{1}{3}$ ist 12, vnd $\frac{1}{18}$ ist 2, vnd $\frac{1}{36}$ ist 1. Solchs alles zusamen facit 55. Vnd also sprechen wir, das alle die zaln diminuti, superflui vnd perfecti seind compositi, vnd nicht primi, die wir also jrer thailen, dauon sie compositi seind, mogen examinirn nach vnserm ersten Capitel. Vnd also haben wir grundlich gesagt von den primis vnd compositis, welche so jre jtzliche einfeltig proponirt wirdt oder selbander, zu finden dieselbig mensur. Nun volget hernach von den zalen, so jr mehr dann zwo oder eine proponirt werden, zu erforschen, welchs die groste Mensur sey vnter jnen, oder ob sie gegeneinander
110′ primi seind oder nicht. Dann es khumbt, | das vnterweilen zwo compositi sein vnd von des driten wegen mussen sie vntereinander vnd gegeneinander primi gehalten werden, das ist, das sie minimi werden gesatzt in der proportion der furgab, als volgendt ist.

De numeris rationalibus et communicantibus, ex qua aequatione digesta semper nascentur rationales in coniecturis et antiquiori modo. Capitulum septimum.

Omnes numeros, quorum proportio ut numeri ad numerum, rationales et communicantes inseruimus, eosque absolutos semper ex sola nostra prima aequatione unitatuum nasci descripsimus, quos et in coniecturis Ylici *quatuor quantitatum proportionalium expediti sunt, alii vero ex erroribus, quos Arabes itata vocant, nos autem lancem ducem posuimus, produxerint. Quorum vero quandoque proportio non velut numeri ad numerum, aliis dictis aequationibus rationari investigentur, quare dictas sectas refutare antiquorum necesse est.*[1])

1) Dieses Kapitel will zeigen, dass der einfache falsche Ansatz, von dem Verfasser die vier proportionierten Zahlen des Yles genannt, so wenig als der doppelte falsche Ansatz, die *Itata* der Araber und die *Lances* der Lateiner des Mittelalters, zur Auflösung von solchen Aufgaben gebraucht werden können, welche auf Gleichungen des zweiten Grades führen, sondern dass sie einzig und allein bei solchen zum Ziele führen, welche auf solche des ersten Grades zurück-

Hie saget ALGEBRAS von den zaln, so jr mehr dann zwo proportionirt werden, zu erforschen ob die primi sein vnd gehalten werden nach der proportion die sie haben, vnd laut der text zum teutschen also:

Wir haben gesagt vnd gesatzt, das alle zal ratio|nales vnd 111
communicantes, welcher zaln sich die proportion heltt als do ein zal zu der andern, also sind sie primi, so ist vnitas gesagt die gemeine mensur, seind sie compositi, so seind sie communicantes, die werden allein proportionirt oder selbander; welche zaln also, die wir cleret haben, werden allein geporn rationales alwgen rationales jrer vniteten von vnser erst gesagten equation, welche also jn der satzung oder coniecturen der proportionum von den YLICIS, die do waren der secten YLIS, examinirt wurden vnd funden durch 4 proportionalische zalen. Aber andere, die do waren der secten der alten Arabischen sorgten, das do in den Coniecturen wurden gefunden allwegen durch die errores rationalische zaln, die die Arabes nenten Itata, das wir nennen lancem, das ist numerum fallacem, ein weitleuffige vngewise zal der Enigma nicht gemes, vnd erforschen hieraus die obgerurten zaln, die do allwegen werden funden rationales. Sagten auch, was also durch die errores oder Ylische zaln nit funden wirdt, das das vnmuglich in der zaln gegrundt werden muge. Aber, sagt der text, die zalen, welcher khein proportion zusamen ist, als do mag gesein einer zal zu der andern, sie sey geprochen oder gantz werden gefunden zu rationirn durch die andere vnsere equationes an die erste, welche zaln also von not wegen zurucke schlagen oder richten die gemelten secten von den alten gesatzt. | 111′

Von disem text einen schrifftlichen Bericht einzunemen, sagt der text, das alle zaln rationalisch sein, als welche do haben ein proportz als ein zal zu der andern, von den dann genug gesagt ist. Als ich spreche, $1\frac{1}{3}$ gegen $2\frac{2}{7}$ hat ein proportz, als do hat jr numerus 48 gegen 28. Hierumb so seind sie rationales, dann vnitas ist ein gemeine mensur, vnd communicantes, wann sie noch vber die gemeinenn mensur haben 4. Welche 4 sie thailt jn die vordern proportion: als 7 gegen 12 seind als 28 gegen 48.

---

geführt werden können. Obwohl die Alten behauptet hätten, wenn durch eine der beiden erwähnten Methoden keine rationalen Zahlen gefunden werden könnten wären die Aufgaben überhaupt nicht möglich, so zeigt Verf. doch, dass gerade durch die Gleichungen solche Lösungen gefunden werden können, die den Alten als unlösbar galten. So würde die in Zeichen geschriebene Gleichung $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 13\frac{1}{2}$ nach dem Verfahren des YLES $x = 3\frac{3}{8}$, nach dem der Araber $10\frac{4}{71}$ geben, obwohl der wirkliche Werth von $x = 9$ ist.

Vnd solche zaln werden alwegen aus der ersten gesatzten Equation. Wann, das wir wollen sprechen, es mochte radix von 7 oder radix von 3 herauskhomen, die haben kheine proportz als ein zal gegen der andern, wann jr radix nicht wissent ist. Also mogen wir sprechen, das allwegen jn den furgaben der Arismeticen vnd Geometern, was jn vnserer ersten equation fellet, das also one zweifel die furgabe data, das ist, das sie mag sein rationalisch. Aber die Alten, als do waren die von secten Ylis, wusten noch nicht von den equationibus Algebrae, vnd sprachen, wann do ein furgab kheme dem grossen geometro Ylo, wer also dieselbe frag durch die vier quantitet der proportionalischen satzung nicht vfgelost mocht werden,
112 also zu verstehen, das sie nach aller muglig|keit examinirt wirdt, als ane zweifel Ylis kunt, sagten die gemelten Ylici, das solche fragstückhe der zalen vngemes weren. Weiter sagt der text: *Alii vero* etc. Aber etzliche andere, die do waren der secten der alten Araber, sagtenn, hetten ein gemein scibile bej jnen gesprochen Itata, das weren Errores, do durch sie examinirten, so in Arithmetern vnd Geometern kheine solche scibile, als pej vns wirdt gesagt, vnd das nemen mogen von den weitleufigen zalen der aufgab vngemes, das ist, das sie durch zwei weitleüfige zaln der Aufgab a casu genomen vnd vngeproportionirt funden, durch die errores, das ist, wie weit sie a veritate distirten, das ist, wie weit sie irrten, do drucken sie aus ein rationalische zal der Aufgabe gemes, vnd sagtenn auch, welche aufgab, so sie examinirt wurde durch die lances, als sie von rechts wegen solten, vnd nicht durch die errores funden wirdt, die were bei jnen vnmuglich zu erforschen. Sagt der text furter: *quorum vero etc.* So do aber khumbt, das do ist die proportion einer zal gegen der andern nicht als ein rationalische zal zu der andern, solche zal mussen erforscht werden durch vnser Gebra, das ist durch die equationes, die wir gesatzt haben an die erste. Also mogen wir sagen mit dem text Algebrae, das solche zaln
112′ refutiren vnd vorcleinen die secten | von den alten gesatzt, wie wol das vnsere altenn viel hubscher fragen haben aufgelost, vnd doch durch kheine genante Regel soluirt, sonder durch particulares demonstrationes, von welchen also vnser Gebra vnd Almuchabola sagendt ist, welche zaln hieraus rationalisch ergehen mogen vnd welche nicht, also mogen wir concludirn mit dem text, das alle zaln, so durch die erste equation ersprissen, werden rationalisch geporn vnd nimmermehr irrationalisch. Also mugen auch alle fragen durch die aufgelost werden, die do gehen durch die vier quantitet der Ylicorum, oder durch die errores der Arraben, vnd herwiderumb, wo do aufgelost ist durch die 4 quantitet proportionaln oder durch die lances, mogen auch gehen durch vnsere gesatzte equationes, nemlich durch die erste. Aber viel rationalische zaln werden geporn durch vnser andere ge-

satzte equationes, die do nimer funden werden durch die lances, vnd hierumb werden durch solche vnser equationes, except die erste, refutirn die gemelten secten der Araben vnd der Ylicorum. Als wir setzen von den vorstant wegen des texts, zu finden ein zal, welcher ich $\frac{1}{2}$ vnd $\frac{1}{3}$ in vnd mit einander multiplicir, das $13\frac{1}{2}$ khume. So wir das examinirn durch die quantitet der Ylicorum, so erfindt | sich das nicht, vnd wird examinirt 113
nach der Ylischen Form also vnd nicht anderst. Wir nemen ein zal 24, die hat $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{2}$, wann $\frac{1}{3}$ ist 8, vnd $\frac{1}{2}$ ist 12, vnd 12 mal 8 macht 96. Sprich 96, das Examen, gibt 24, propositum, was gibt $13\frac{1}{2}$, das Examen? facit nach der Ylischen zaln oder form $3\frac{3}{8}$, vnd so man das examinirt probative, so felet es. Examinirn wir das durch die errores, dermas wir setzen lancem 12, sagt in errore zuuil $11\frac{1}{2}$; setzen wir den lancem 24, so khumbt zuuil $82\frac{1}{2}$, volfuren das durch die errores, so finden wir $10\frac{4}{71}$. So wir das probatiue examinirn, so findt sich vngerecht, vnd doch solche zal muglich zu finden ist 9, vnd hierumb das Exempel a latere eingefurt, dapei du magst mercken, das viel seind, die do rationalisch durch vnsere equationes, ausgenomen die ersten, erfunden werden, ohne durch die 4 proportionalisch quantitet oder durch die errores, Itata genandt, wann wir khumen durch vnsere andere Equation auf dj rationalische zal 9. Also volget hernach von dem ersten membro zu sagen, als der text sagt: *quos et in coniecturis*, das ist von den vier proportionalischen zaln, die do allererst Yles gebraucht hat zu coniecturis. | 113′

De quatuor numeris proportionalibus Ylicis de eorumque mensura, qua minimos contra se proportione data terminos exuentur. Capitulum octavum.

Quorum proportio primi ad tertium data, eademque secundi ad quartum data erit, qua vero data primi ad secundum, eadem et data erit tertii ad quartum. Ex hoc manifestum, quartum quotientem primi divisoris producti tertii per secundum. Constat proprium, id produci ab extremitatibus, quod ex medietatibus conficitur; in minimis enim terminis quatuor datos contra se esse reperies proportione eadem proportionales.

Hie saget Algebras von den vier proportionalischen zaln Ylis, vnd laut gemelter text zum teutschen also:

Welcher zaln die proportion des ersten vnd dritten ist geben, dieselbige proportion wirdt auch gegeben dem andern gegen den vierdten; welche proportion aber offenbar ist des ersten vnd andern, dieselbige wirdt auch gegeben dem dritten gegen dem vierdten. Hierumb wirdt offenbar, das die vierdte zal ist ein quotient der ersten zal, des thailers, des multiplicirten dritten

mit dem andern. Also sprechen wir, das ein rechte eigenschaft ist der proportionalischen satzung, das khumbt von den extremis, das ist von dem ersten vnd letzten, gemultiplicirt gleich dem,
114 das do khumbt aus | den zweien mitteln, das ist vom dritten vnd andern. Also finden wir, das in vier termini, die do noti vnd gegeben seind, die vier proportionalisch zal werden funden in andern vier zaln vff das cleinste jn der ersten proportion rationales.

Von disem text zu sagen vnd einen schrifftlichen sin einzufuren, saget er eigentlich: welcher zaln die erste proportion geben zur dritten ist, dieselbige wirdt auch gegeben dem andern vnd vierdten. Wann wir sagen hier von den vier proportionalischen zaln, die erste zur andern als die dritt zur vierten, also werden sie auch permutatim aus der 16. proposition quinti Euclidis Geometriae[1]) proportionales sein, wann welche proportionales seind, seind auch permutatim proportionales; vnd welche auch permutatim proportionales seind, die seind auch per diffinitionem proportionalium proportionales. Als wir setzen wollen a latere dem text: Ye 6 Eln vor 10 fl., wie 12 khumem vor 20 fl., wann so 6 vmb 10 komen, so sein 12 zwir 6, darumb mufsen 12 komen vmb 20, das ist vmb zwir 10. Sprechen wir permutatim, das do sein disparate 6 gegen 12 als 10 gegen 20. Sagt der text von dem ersten corollario, der letzte terminus were der quotient des gemultiplicirten products des dritten vnd andern gethailt durch den ersten. Als wir multiplicirn 10 mit 12, facit 120, thailen solchs durch den ersten;
114' khumpt 20: also ist 20 der quotient des products | 120, welcher entsprossen ist ducch den andern vnd dritten gemultiplicirt, welche also die mittlen termini seind vnter den vieren proportionalen quantiteten. mogen wir sagen mit dem text, das aus dem multiplicirn, nemlich der mitteln khumen sei dem gleich, das von den extremen khome. So nun der erste terminus ist divisor vnd wirdt gefurt jn quotienten den letzten, so khumht wider das gemultiplicirt ist worden vom andern vnd dritten, als vns das grundtlich

eln	fl.
a. 6	*c.* 10
b. 12	*d.* 20

---

1) Euclides V, 16: Si fuerint quatuor quantitates proportionales, permutatim quoque proportionales erunt.

Der ganze Paragraph handelt von den Proportionen des Yles, und zeigt, wie man eine vorgelegte Proportion sowohl nach jeder ihrer vier Glieder als Unbekannten auflösen kann, wie auch die Umwandlung einer solchen in eine andere, die vier relative Primzahlen enthält. Als Beispiel bringt er die Proportion:

$$480 : 900 = 108 : 216$$

auf die einfachste Form $40 : 80 = 9 : 18$, indem er sämtliche Glieder durch das grösste gemeinschaftliche Maass aller vier Glieder, das ist 12, dividiert.

beweist wirdt septimo Geometriae an der zweinzigsten proposition demonstrirn. Von kurtzwegen sagt der text weiter, das solche vier quantitet proportionalisch werden auch jn vorgemelter proportion jn den cleinsten termini proportionales. Solchs zu ergrunden, von wegen wir hie ad propositum reden, die mensur zu finden dreyer oder vier terminorum oder mehr, welche sie ad minimos terminos theilet vnvorruckter proportion. Wir suchen die ersten zwen nach vnserm dritten Capitel, vnd finden jre groste Mensur. Dieselbigen Mensur nemen wir vnd examinirn den dritten damitt, anch nach dem dritten capitel, vnd finden aldo noch ein mensur. Wir nemen aber solche mensur vnd mensuriren oder examinirn den vierdten, vnd finden do aber ein Mensur, vnd solche, | die do durch ausgeht, die thailet sie ad 115
minimos terminos jn der ersten pleibenden proportion. Als wir setzenn wollen 4 quantitet proportionales, vnd wollen sie examinirn jn die minsten terminos. Wir suchen die ersten zwene, finden sie nach dem ersten Capitel,

a. 480 *c.* 108
b. 960 *d.* 216

das 480 die groste Mensur ist der ersten zweier nach vnserm dritten Capitel. Wir nemen 480, die Mensur, examinirn den dritten 108 damit, vnd finden, das die groste Mensur ist der Zweier 480 vnd 108 ist 12; wir nemen 12, die mensur, vnd examinirn aber nach dem dritten Capitel 216 damit, vnd finden, das 12 solche zal vfthailt. Und so das nicht geschehen were, so hetten wir die gesucht nach dem dritten Capitel; dieweil aber 12 die 216 aufthailt, so sprechen wir nach der dritten proportion des siebenden Buchs

$a \cdot 40 \cdot c \cdot 9$
$b \cdot 80 \quad d \cdot 18$

Geometriae, das 12 die groste Mensur ist vnter den vorgesatzten zaln, vnd ist khein ander terminus der obgemelten zaln aussucht jn ehegemelter vnverruckter proportion dann 12. So die werden aufgelost, khumen $40 \cdot 80 \cdot 9 \cdot 18$, vnd sein numeri contra se, das ist gegen ehegerurter proportion der zalen, die do waren $480 \cdot 960 \cdot 108 \cdot 216$. Also concludirn wir mit dem text, das sie 12 examinirt hat | in die minsten zal der vorigen proportion. 115′

De numeris minimis contra se sua proportioue exuta productis. Capitulum nonum.

Dixerunt Arabes ex itata semper produci numeros rationales minimos contra se sua proportione exutos, namque primi unitatis ad secundum examinans proportione data ad eadem data erit quaesiti ad propositum data, quae unitatis proportione ad quaesitum, et eadem data erit examinantis ad propositum. Ec hoc palam erit, quatuor numeros Yliacos esse proportionales, et in quibus ita non fuerit, nequaquam rationales per Itata invenies. Quaesitum necesse

erit moram relinqui equationibus, quibus praeter primam demonstrationem gestavimus.[1])

Hie saget ALGEBRAS vns von den zaln, die do werden exuirt in die minste proportion aus den zaln Itatis, vnd laut der text zum deutschen also:

Es haben gesagt die alten Arabes, das do aus den zaln zu den erroribus werden gefurt rationalische zaln, die do seind ausgezogen in die minste proportion jrer terminum. Dann des ersten der vnitet zu dem andern der erforschung gegebener proportionen, dieselbe wirdt auch gegeben der suchenden zal gegen der furgab; vnd so der vnitet proportion gegeben zu der gesuchten
116 zal offenbar ist, dieselbige wirdt | auch gegeben der zaln des examinirn zu der furgelegtenn. Hierumb wirdt offenbar, das do werden 4 YLIS zal proportionales, vnd jn welchen zaln das auch also nicht funden wirdt, so wirdt nimermehr rationirt das quaesitum durch Itata, sunder es wirdt gelassen die beharrung den ander equation, von welcher wir sunderlich an die ersten haben gesagt ir demonstrationes.

Von disem text gleichmesig vorgethan einen vorstentlichen sin einzufueren, mussen wir cleren die gemelten Itata der Araben, vnd was die gesatzt haben, daraus sie nachuolgendt haben gefurt rationalische zaln in numeros exutos, das ist, die do seind die cleinsten an jrer proportion, mercken wir, das sie haben genant die Itata regula errorum, die wir sagende die regula lancis, die do ist in zweien weitleufigen zaln, welche examinirt werden nach der aufgab, die dann sagendt ist zuuil oder zu wenig der Aufgab gemes. Die selbigen zwo zaln nenneten sie errores, das waren die jrrenden zal von der warheit der auffgab durch das examen funden die genenten lances, welche errores, so die gleich warn nach dem Excess oder defect der Wahrheit, so ziehen sie die von einander, und sprechen, das der Residuant solte sein der thailer zu der zalen, die man thailen soltt, welche sie producirten, so sie multiplicirten einen lancem jn den errorem des andern,
116′ vnd zeuchen auch | ein product vom andern. Sagende sie, das solcher Restant solte sein die zal, die man thailen sollt, durch welche also beweist wurde die frag, so sie mit gedachtem thailer gethailt wurdt. Wer aber sach, das das defect vnd excess der errorum nicht gleich were, wo, vnd

---

1) Dieses Kapitel setzt in bekannter Weise den doppelten falschen Ansatz auseinander und kommt am Schlusse nochmals darauf zurück, dass nur solche Aufgaben durch denselben gelöst werden können, welche den ersten Grad nicht übersteigen. In den Dresdner Handschriften *C. 405* und *C. 349* sind die in den Text eingeschobenen übersichtlichen Beispiele nicht beigegeben, welche die Anordnung der Rechnung für jeden Fall andeuten.

sie vor voneinander gezogen waren, damit gemacht ward der thailer vnd die zalen, damit man thailen soltt, also wurden sie gemacht; so man addirt die excess vnd defect, wurdt der diuisor, vnd die gemultiplicirten producta der errores in des andern lancem werde gesagt der diuidendus. Also solche mainung des texts nenneten sie Itata. Das wir aber auf die meinung des texts khomen, wollen wir setzen ein einfurendt leicht Exempel durch die errores, damit wir khumen vf den Intentum des auctors. Zu finden ein zal, welche, so wir von jr nemen $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, vnd solche zusamen thun, das 47 khumen. Sagten die alten Arabes vnd namen vngeuerlich ein zal oder lancem, als 12, welche sie nach gemelter frage examinirten. Wann $\frac{1}{3}$ von 12 ist 4, $\frac{1}{4}$ ist 3 vnd $\frac{1}{5}$ ist $2\frac{2}{5}$. Solchs zusam macht $9\frac{2}{5}$ vnd jrret von 47 jn $37\frac{3}{5}$. Also sagten sie, das der defect, als $37\frac{3}{5}$, ward genant der error von der wahrheit, der aufgefunden | durch gemelten lancem. Sie namen den 117
andern lancem, als 24 mocht sein, welchen sie auch also examinirten vnd funden aber im defect der warheit $28\frac{1}{5}$. Also ziehen sie einen errorem vom andern, nachdem sie gleich seind in defectu, vnd wird der residuant $9\frac{2}{5}$. Das sollte sein der divisor. Als nun multiplicirn sie ein lancem in den errorem des andern, als 24 mit $37\frac{3}{5}$ vnd 12 mit $28\frac{1}{5}$, vnd nemen solche producta von einander, jnmassen wir subtrahirn, restabunt 564, vnd thailen das vbrig, khumb 60, das quaesitum. Vnd desgleichen theten sie, wo die errores excedirten. Wir wollen setzen von anheben diser kunst ein schlecht einfurendt Exempel durch die errores, jn welchem Exempel sie beide superabundant sein oder excediren, als wir schimpflich setzen: Es wollen jr zween khaufen ein pferdt vor 30 fl. Spricht der erst zum andern: leih mir deines gelds $\frac{1}{2}$, so hab jch 30 fl,, so wil ich obgemelt pferd kauffen. Spricht der ander zum ersten sprechende: leih mir deins gelts $\frac{1}{3}$, so will ich das pferdt kaufen, so hab ich auch 30 fl. Die frage, wieuil yeder gelts habe. Setzen wir lancem, der erst hab 12 gehabt, so mus von not wegen der ander 36 haben. Wann, so er dem ersten $\frac{1}{2}$ leihet, so hat er 30; gibt aber der erst dem andern $\frac{1}{3}$, so khumbt $+$ 10 an der Warheit. Wir nemen den andern lancem vnd examinirn in dermas, als 9, so werden wir finden im excess 15, subtrahirn wir | obgemelte 10 von 15, pleiben 5 vor 117'
den thailer. Wir multiplicirn ein jtzlichen lancem mit des andern error vnd subtrahirn die producta von einander, restabunt 90, vnd diuidirn wie vor, khumbt 18, das quesitum, also mus der ander von not wegen 24 fl. haben, vnd also hastu genuglich, so die errores excedirn oder diminuirn. Nun von dem

Lanx	Error		
12	defectus $37\frac{3}{5}$	residuum	
	Error	$9\frac{2}{5}$	
24	defectus $28\frac{1}{5}$		

Lanx	Error	
12	excessus 10	residuum
9	excessus 15	5

dritten punct der alten secten der Itata zu sagen, setzen wir aber ein kindisch Exempel, in welchem die errores nicht gleich sind, sondern von einem lance der ein diminuirt wirdt vnd vom andern excedirt. Es hat einer einen seuberlichen Deckel, wiegt 16 lot, darzu zween Becher, vnd so er den Deckel setzet vff den ersten Becher, so wiegt er 5 mal souil sam der andern; so er auf den andern gesatzt wirdt, so vberwiegt er den ersten 8 mal. Nun fragen wir, wieuil yeder pecher gewogen hab. Setzen wir lancem 12. Nun habe, so der deckel darauf stund er 28, sagt die proposition, er wege zu 5 mal mehr dann der ander: darumb thail 28 in 5, facit $5\frac{3}{5}$, Souil mus der ander gewogen haben. So wir nun den deckel darauf setzen, khomen $21\frac{3}{5}$, solt 96 sein, so ist error defectus $74\frac{2}{5}$. Wir setzen den andern lancem 2, vnd examinirn vorigermassen, finden wir errorem excedirn $3\frac{3}{5}$. Also addirten sie die errores, wurden 78, das solt sein der thailer, vnd multiplicirten einen

Lanx	Error	
12	defectus $74\frac{2}{5}$	summa
2	excessus $3\frac{3}{5}$	78

118 yeden Lancem in des andern errorem, addirten | die producta, khomen 192. So wir die thailen mit vorgemachten thailer, khomen $2\frac{6}{13}$. So schwer ist der erste Becher gewest. So du dis examinirt der proportion gemes, wie du dann dem lancem hast gethan, findestu, das der ander hat gewogen $3\frac{9}{13}$, vnd ist recht nach der proposition. Also haben wir cleret den punct, die difficultates der Itata. Nun von solcher einzufuren von jres wegen den text vorgemeldet von der Itata, das ist von den lancibus vnd erroribus, sagen wir, das der text vorgemeldet: Hierumb, wann sie gebern allwegen, die errores vnd lances, so die nach der proposition examinirt werden, rationalische zaln, welche also, als der text sagett, werden producirt ex Itata allwegen in die cleinsten proportion der 4 quantitet proportionalen. Als wir nemen vor, damit der text desto vorstentlicher sey, das erste gesatzte Exempel, so finden wir, das wir ex Itata producirn minimos numeros contra se proportione exutos nach den 4 quantiteten proportionalium der Ylischen. Als wir setzten der lanx war 12, der wurde examinirt, khomen $9\frac{3}{5}$, welche sich halten gegen der vnitet als 1 gegen $\frac{47}{60}$, wann 12 wirdt gerechent vor 1 gantz. Nun ist $9\frac{3}{5}$ nicht gantz 12, wann $\frac{9\frac{3}{5}}{12}$ macht $\frac{47}{60}$, also setzen wir 47 das propositum vnd suchen ein zal, die do hat die proportz gegen jr als 1 gegen $\frac{47}{60}$. Also finden wir 60, quesitum, durch vnser vorgesatzte negste

118′ Capitel khombt, das wir | finden durch die 4 quantitet Ylis, das 1 kegen $\frac{47}{60}$ sein in der proportion als 60 gegen 47, welche so sie reducirt werden, komen sie jn vier quantitates proportionales, die do numeri rationales seind. Also sprechen wir mit dem text, wo solchs nicht geschicht, das kheine rationalische zal noch die berichtunge der frage nicht khan gefunden werden

durch die Itata, sondern sie wirdt gleichmesig gerechent vnser ersten Regel Gebre, vnd also solche Frage zu berichten wirdt gelassen vnsern Equationibus, die wir ane vnser ersten equation demonstrirt haben. Als wir setzen wollten, vff das wir khomen mogen zu beschliesen den text, wir suchen ein zal, wann wir daraus nemen $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ vnd multiplicirn das mit einander, das 9 khomen, vnd setzen durch gemelte Itata den ersten lancem 12 vnd den andern 24 etc., vnd so wir solchs examinirn finden wir quaesitum 11, vnd so wir die proportz suchen 11 als quaesiti vnd 9 das propositum, so finden wir nach dem text 11 gegen 9. Also suchen wir gegen der vnitet auch die proportion, finden wir $1\frac{9}{11}$, vnd solchs $1\frac{9}{11}$ soll sein examen der lances, so finden wir $\frac{1}{12}$, das hat nicht die proportion gegen der vnitet, als do hat propositus gegen den quaesito, also concludirn wir mit dem text, das das 11 das quaesitum nicht sein khan, vnd sprechen also, das solche frage vnmuglich zu uolfuren durch die Itata, | vnd relinquiren sie vnsern andern 119
equationibus. Darumb sagen wir, das der text allein cleret die Itata, das ist die errores vnd lances, zu erfaren vnd demonstriren, ob alle frage muglich sein do durch zu machen vnd welche nicht, vnd also haben wir volfurt genugsam den Intentum des texts: was durch die erste equation ergehen mag, vnd wirdt auch durch die errores volfurt vnd lances, desgleichen durch die 4 quantiteten proportionales Ylis, vnd was solchs, wie vorlautet, nicht gegeben wirdt mit 4 quantiteten proportionales, sonder disproportionales, so relinquiren wir vf vnsere andere Equationes.

De inveniendis compositis numeris et partibus multitudinis per quasdam proportiones propositas ex quodam numero toto et toto aequales. Capitulum decimum.

Propositis quibuscunque proportionibus et numero toto rationali invenire licebit per easdem partes multiplicativas quodam toto numero priori aequales producentes compositos rationales eidem toto aequales.[1])

Als nun Algebras hat gesagt von dem numerum rationalem, cleret er alhier sein letzte Capitel des tractats sagende, das auch rationalische zaln werden funden, welche also compositi auch in den coniecturen der propositionen, vnd laut der text zum teutschen also: | 119′

So do werden vorgeschlagen, was proportiones die sein mögen,

1) Hier wird die *regula virginum* oder *regula coecis* durchgesprochen und eine ganz allgemeine Methode zu ihrer Lösung gegeben. In dem lateinischen Texte ist nur gesagt, es sei eine solche möglich, wenn die Anzahl der verlangten Grössen und die dafür zu entrichtende Geldsumme einander gleich seien, aus einer Bemerkung des deutschen Bearbeiters aber folgt, dass diesem klar war, es sei diese Bedingung nicht unbedingt nöthig.

vnd sonderlich, eine rationalische zaln zu finden, vnd ist muglich vnd gepurlich durch die ehegerurten proportiones multiplicirende thail, welche der gantzen furgesatzten zal rationalis gleich seind, vnd welche also sein producirn compositos rationales aus den proportionibus vorgesatzt, welche alſsdann gleichermas gleich seind dem numero rationali vorgeschlagen.

Von disem Text schrifftlich ein vorstentnus zu geben, so ist zu wissen das Aliabras, der Indus, geprauchet an vielen orten die so gemelte Regeln, vnd khumbt vrsprunglich aus den communicirenden zaln, als wir figuriren wollen exemplariter, damit wir auf den vorstandt des texts khomen.

Es hat einer willen zu kaufen 100 stuckh viehes umb 100 fl., nemlich schaf, Esel vnd Ochsen, das dann die Kinder ratende vorgeschlagen, aber vns hieher zu geprauchen. Erofnen wir, souil vns not ist der rationalischen zaln halber, welcher kauft 20 schaf vor 1 fl., 1 Esel pro 1 fl. vnd 1 Ochs pro 3 fl., vnd solch summe der fl. ist 100 vnd des viches ist auch 100 stukh.

1	20	60	
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	denominans res
	Regula virginum		

Sagt der text, so do werden vorgeschlagen etzliche proportiones, als do seind: 20 schaf vor 1 fl, 1 Esel pro 1 fl vnd 1 Ochse pro 3 fl, nun durch solche proportiones zu finden mul-
120 tiplicirende thail | durch eegenannte proportiones, welche machen 100, vnd die compositi daraus eruolgent auch 100. Saget Aliabras Indus in dem Buch seiner thaten[1]), das do aus den dingen sol gemacht werden ein gemeiner thailer oder Nenner, als 20 mal 1 ist 20, als in der figur figurirt ist worden. Nun sol ein ytzlicher thail jr nenner gesucht werden, als $\frac{1}{20}$ von 20 ist 1, vnd $\frac{1}{1}$ von 20 ist 20, vnd 3 thail von 20 ist 60. Also setzen wir dise gefundene thail $1 + 20 + 60$, vnd zihen 1, das ist das minste, vom andern, restat $19 + 59$, vnd solche werden die thailer. Wann so wir zihen 1 von jme selbst, restat Nulla. Also solchs ist geschrieben,

	divisores
60	59
20	19
1	0
denominator	
20	

so multiplicirn wir den minsten numeranten der thailen, das ist 1, in das ding, person oder vich, vnd die gantze denomination in das gelt. Sam also, ein mal 100 ist 100, vnd 20 mal 100 ist 2000, wann in disem vil das ding vnd geldt des vihs in einer zal. Also zihen wir 100 von 2000, pleiben 1900, vnd solchs sollen wir diuidirn in 19 vnd 59 dermaſsen, das eins mit dem andern aufgeht, vnd wann er nicht ganz aufgeht, so ist die frage nicht muglich. Also so wir thailen 1900 mit 19 zu 41 malen, pleiben 1121, welche zal, so die mit 59 gethailt wirdt, khumen 19, also sprechen wir, das wir haben funden

1) Das soll *daten* heissen, die andern Handschriften lesen *datorum*.

partes multiplicativae | 41 vnd 19, welche wir zusamen addirn, werden 60, 120'
von 100 gezogen pleiben 40 vor das 0 gesatzte vnd den nechsten numerant der schaf, das ist 40, der esel 41 vnd 19 ochsen, welche partes multiplicative machen 100, als der text sagt, das die partes multiplicative sollen gleich sein dem numero proposito rationali, welche also partes genant solle machen integros numeros rationales compositos, von welcher zaln wegen hie der text ruret. So wir multiplicirn 40 mit 1, nachdem die proportion saget, 20 schaf gelten 1 fl, so machen 40 2 fl, vnd so wir multiplicirn 41 mit 1, wann 1 esel gilt 1 fl, facit 41, vnd 19 mit 3, wann 1 ochs gilt 3 fl, facit 57. Also haben wir 40, 41 vnd 19 ding, das ist partes multiplicative, gleich toto rationali 100 vnd compositos integros rationales aus den multiplicativa, das ist das gelt 2 vnd 41 vnd 57, auch gleich toto rationali. Also mogen wir sagen mit dem text, das Aliabras in seinem daten hat gefunden rationalisch zaln, welche auch also durch vnsere erste equation mogen volfurt werden vnd die 4 proportionalische zaln Ylis. Aber von des wegen, das sie integra werden rationalisch als man recht mogen compositi mugen sein, hat Aliabras cleret, von welcher | zaln also zu finden 121
Algebras als sequax hat geschatzt vnd genant dise numeros rationales producirt ex partibus multiplicatiuis, welche zu finden seind vorgeschlagen worden gegeben proportiones. Vnd also wollen wir hie gantz geendet haben, zu sagen von den rationalischen zalen, vnd heben an von den irrationalischen den dritten tractat des dritten Buchs Algebrae.

2	41	57		Gelt.
Partes multiplicatives				
40	41	19		Vieh.
Proportiones propositae				
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$		

	Ochs	3	59	Divisores	2000
100	Esel	1	19		100
	Schaf	$\frac{1}{20}$			1900

So man dividirt, khombt yedem das facit.[1])

1) Die Lösung der vorgelegten Aufgabe, welche auf die Gleichungen

$$x + y + z = 100$$
$$3x + y + \tfrac{1}{20}z = 100$$

hinauskommt, ist folgendermaassen geführt. Zuerst ist die zweite Gleichung mit 20 multipliciert, das giebt

$$60x + 20y + z = 2000,$$

dann davon die erste subtrahiert; es entsteht

$$59x + 19y = 1900,$$

und diese Gleichung ist dann so aufzulösen, dass x und y ganze rationale Zahlen

Tractatus tertius libri tertii ALGEBRAE *de numeris surdis.*[1])

Capitulum primum. Quid sit numerus surdus eiusque expositio.

Irrationalis numerus Gebrae longitudine ipse quidem potentialiter tantum rationalis, numerus vero potentialiter tantum rationalis longitudine surdus invenitur. Medialis autem potentialiter surdus ipse et longitudine, potentionalis numeri surdi irrationalis esse probatur. Ex hoc manifestum, omnem numerum longitudine rationalem et potentia rationalem esse, necesse est.

Hie eruolget ALGEBRAS seinen dritten tractat seines dritten Buchs. sagende von den zalen, die do seind irrationales, jnmassen als er am an-
121′ fang hat verheisen. Welcher zal, als wir vorgesaget haben, khein proportz | ist gegen der andern, als do mag sein ein rationalische zal gegen der andern, als wir gesagt haben im dritten Capitel des andern tractats. Laut also:

---

werden. Für $x = 19$ wird hier offenbar sofort $y = 41$ Um dann z zu finden, subtrahiert man $x + y$, das ist 60, von $x + y + z = 100$ und erhält $z = 40$, und es ist wirklich $19 + 41 + 40 = 100$ und $3 \cdot 19 + 1 \cdot 41 + \frac{1}{20} \cdot 40 = 100$. Es wird nicht angegeben, wie die Endgleichung zu lösen ist, *nur dass sie in ganzen rationalen Zahlen gefunden werden muss.* Die Lösung selbst wird auf das Buch *datorum* des ALIABRAS INDUS zurückgeführt, wohl wieder ein Beweis für die nicht schlechte Geschichtskenntnis des Bearbeiters. Dass die Inder zuerst die unbestimmten Gleichungen des ersten Grades unter Forderung ganzer rationaler Werthe der Unbekannten, auflösten, ist erst seit etwa einem Jahrhundert bekannt. Woher stammt nun die Kenntnis unseres Bearbeiters dieser Thatsache? Wo ist das Buch *datorum* des ALIABRAS INDUS, das hier erwähnt wird? Die Auflösung ähnlicher Aufgaben bei BACHET DE MÉZIRIAC beruht auf völlig anderen Betrachtungen. Jedenfalls aber hat nicht er zuerst in Europa das Verlangen nach ganzen rationalen Werthen der Unbekannten aufgestellt, schon vor 1545, in der Urschrift unserer Handschriften, muss es gefordert worden sein. Dass aber der deutsche Bearbeiter weiter ging als der ihm zur Kommentierung vorliegende Text, liegt in den Worten: „Sam also, ein mal 100 ist 100, vnd 20 mal 100 ist 2000, wann in diesem vil das Ding vnd geldt des vihs in einer zal.“ Es muss also doch auch möglich sein, dass beide Zahlen nicht gleich sind. So würden die beiden Gleichungen BACHET's $x + y + z = 41$, $4x + 3y + \frac{1}{3}z = 40$ nach unserm Bearbeiter so gelöst worden sein. Nach 2 ist auch $12x + 9y + z = 120$, davon Gl. 1 giebt $11x + 8y = 79$. Da für x nur ein ungerader Werth möglich ist, so sieht man sofort, dass $x = 5$ für y den Werth 3 ergiebt, dann ist aber $z = 33$, das sind die Lösungen BACHET's. Die am Ende des Kapitels stehende Übersicht des Lösungsganges haben nur *Gotting. Philos. 30* und *Dresd. C. 8.*

1) Der dritte Traktat dieses dritten Buches handelt von den irrationalen Wurzeln, während der erste Traktat das Ausziehen der rationalen Wurzeln lehrte. Im ersten Paragraphen wird zunächst gezeigt, dass eine in der Länge irrationale Zahl nur in der Potenz rational sein kann, und umgekehrt eine nur in der Potenz rationale Zahl in der Länge irrational sein muss. Die Zahl aber, die sowohl in der Länge als in der Potenz irrational ist, heisst medial.

Die irrationalische zal vnser Gebra in der lenge wirdt alleine jn jrer potentz rationalisch; aber die zal, die allein in potentia ist rationalisch, werden gesagt in der lenge, das ist jres radicis, irrationalis oder numerus surdus. Die medialische zal aber, welche do ist in potentia irrationalisch vnd in longitudine, in potentia jres radicis vnd in longitudine radix radicis. Wann so die potentia ist irrationalisch so ist die radix von jr die potentz, vnd radix der potentz ist die longitudo, also ist numerus medialis radix radicis irrationalis. Hierumb wird offenbar, das jetzliche zal in der leng rationalisch ist auch in potentia rationalisch von not wegen. | 122

Von disem text gleichmesig, wie vor gethan, einen schrifftlichen vorstandt einzufuren, so ist zum ersten not, das wir cleren von punct zu punct den text. Zum ersten, was do numeris oder eyn zal sey irrationalisch. So nennen wir das ein irrationalische zal, welche khein radicem quadratam, cubicam noch ʒʒ hat oder khein radicem der furgegebenen duction, als 7 oder 11, oder welche khein duction begreifft, jnmassen wir vorgesagt haben. Welche in dieser lenge wirdt geschrieben also ſ mit einem vorgesatzten punkt der figurirten duction, als ſʒ 7, das ist radix quadrata von 7, oder ſc̊ von 11, oder ſʒʒ von 13, das ist radix radicis von 13, vnd also werden sie nachuolgent jn der lenge, das ist jrer radicum figurirt, wie hernach volget.[1])

In longitudine ita scribitur numerus surdus per ductiones absolute.

ſʒ 7	Radix ziens oder quadrata von	7
ſc̊ 11	Radix cubica von	11
ſʒʒ 13	Radix ziens de zens von	13
ſß̃ 15	Radix, das ist sursolida von	15
ſʒc̊ 14	Radix censicubica von	14
ſbiß̃ 17	Radix bissursolica von	17
ſʒʒʒ 19	Radix census censui de censu von	19
ſcc̊ 15	Radix cubi de cubo von	15

1) Wie schon in der Einleitung gesagt ist, ist das Wurzelzeichen ein starker Punkt, an welchen sich ein nach oben gerichter längerer Strich anschliesst. Um zu wissen, von welcher Potenz die Wurzel ist, wird das entsprechende algebraische Zeichen daneben gesetzt. Es ist also:

Sagt der text weither, das die potentionalische zal, die allein in potentia ist rationalisch, wirdt in longitudine surda genant, welcher zaln khein proportion khan gegeben werden gegen einander als ein rationalischen zal gegen einer andern, vnd werden also in der potenz figurirt $\underline{|5}_{ʒ}$, das das ist quadratum 5, $\underline{|3}_{cℓ}$ cubus 3, $\underline{|17}_{ʒʒ\,ʒʒ}$ census de censu 17, $\underline{|9}_{ß}$ sursolidum 9 etc, vnd so werden sie durch die andern ductiones in der potentz
122′ gesatzt, vnd in longitudine werden sie geschrieben, | wie hie vorgesatzt mit dem punct, vnd hie in der potentz mit dem gnomone, darumb, das alle ductiones angulum rectum nicht refutirn, vnd stet die figur also:[1])

In potentia figurantur ita numeri surdi longitudine.

$\underline{\|5}_{ʒ}$	Quadrat von	5
$\underline{\|3}_{cℓ}$	Cubus von	3
$\underline{\|7}_{ʒʒ\,ʒʒ}$	Census de censu von	7
$\underline{\|9}_{ß}$	Sursolidus von	9
$\underline{\|7}_{ʒcℓ}$	Censicubus von	7
$\underline{\|10}_{bißß}$	Bissursolidus von	10
$\underline{\|11}_{ʒʒʒ\,ʒʒʒ}$	Census censui de censu von	11
$\underline{\|13}_{ccℓ}$	Cubus de cubo von	13

Saget der text furter von dem numero mediali: in potentia ist er irrationalis vnd in longitudine, vnd von wegen der potentz zu schöpfen den radicem, welcher also die potentz bezeichnet, welche alſsdann in longitudine

---

$$ſʒa,\quad ſcℓa,\quad ſʒʒʒʒa,\quad ßa,\quad ſʒcℓa,\quad ſbißa,\quad ſʒʒʒʒʒʒa,\quad ſccℓa$$

der Reihe nach

$$\sqrt{a},\quad \sqrt[3]{a},\quad \sqrt[4]{a},\quad \sqrt[5]{a},\quad \sqrt[6]{a},\quad \sqrt[7]{a},\quad \sqrt[8]{a},\quad \sqrt[9]{a},$$

wobei stets vorausgesetzt ist, dass a keine gleichnamige Potenz ist.

1) Soll weiter angezeigt werden, dass eine bestimmte gegebene Zahl nicht als in der Länge, also als einfache Zahl gegeben ist, sondern als eine irrationale Potenz, so wird sie in einen rechten Winkelhaken (*gnomon*) eingeschlossen, und das Zeichen der Potenz, welche sie vorstellen soll, diesem Winkelhaken rechts angehängt. Es heisst also z. B. $\underline{|3}_{cℓ}$, es sei 3 ein Würfel und nur als solcher rational. Ebenso ist $\underline{|3}_{ß}$, eine nur in der fünften Potenz rationale Grösse. Auf diese Erweiterung der Euklidischen Erklärung von in Potenz rational haben wir schon oben hingewiesen.

jrs radicis auch irrationalisch ist, Vnd also hat der numerus medialis ein ytzliche duction zu erforschen radicem radicis, vnd werden also vorzeichent in der potentz irrationalis, als ſ̄ʒ̄ |12, das ist, der radix von 12 ist die potentz, vnd radix des radicis quadrata ist die longitudo. Desgleichen ſ̄cc̄ |14, das ist radix cubica von 14 ist die potentz, vnd radix cubica von | dem radix longitudo etc. Also sprechen wir ſcc̄ des 12, des medials, 123
ist longitudo, vnd also werden sie figurirt in der potentz durch alle ductiones aus die numeri mediales, die do in potentia seind irrationales, vnd werden gezeichent in longitudine mit dem punct gezwifacht. ſ̄ʒ̄ |6 ist radix radicis des medialis ſ̄ʒ̄ |6, aber die quantiteten oder die potentionalischen ductiones irrationales werden verzeichent in diser weise ſ̄ |5 ʒ̄, das ist der quadrat von 5 ist irrationalis etc, vnd ſ̄ |5 ʒ̄ ist latus in longitudine, vnd wirdt genant medialis, darumb das er jn medio loco proportionalis zwischen zweyen quadraten aber cuben oder anderen ductionen. Sam wir wollen figuriren, das die vorstandt haben, dauon wir gesagt haben.[1])

Also werden die mediales vorzeichnet

ſ̄ʒ̄	6	*quadrato*
ſ̄cc̄	13	*cubico*
ſ̄ʒʒ̄	9	*censo de censo*
ſ̄ß̄	8	*Medialis a sursolido*
ſ̄ʒcc̄	10	*censicubo*
ſ̄bißß̄	15	*bissursolido*
ſ̄ʒʒʒ̄	16	*censu ʒ de ʒ*
ſ̄ccc̄	9	*cubo de cubo*

Ita figurantur mediales in longitudine

ſ̄ʒ̄	16	*ʒ*
ſ̄cc̄	12	*cc*
ſ̄ʒʒ̄	5	*ʒʒ*
ſ̄ß̄	13	*Das ist radix radicis* *ß*
ſ̄ʒcc̄	17	*ʒcc*
ſ̄bißß̄	15	*bißß*
ſ̄ʒʒʒ̄	19	*ʒʒʒ*
ſ̄ccc̄	11	*ccc*

1) Die Bezeichnung der Medialen ist wieder eine andere. Sie sollen bekanntlich sowohl in der Länge als in der Potenz irrational sein. Als irrationale Potenz werden sie so charakterisiert, dass *über* das Wurzelzeichen noch ein Punkt gesetzt wird, natürlich die Zahl selbst in einen Winkelhaken eingeschlossen, also z. B. so: ſ̄ʒ̄ |3. In der Länge aber werden sie so geschrieben, dass zwei Punkte neben einander, unter sich verbunden und an dem zweiten der längere Strich angehängt wird, also z. B. so: ſ̄ʒ̄ |3, gelesen Quadratwurzel aus der Quadratwurzel von 3. Obgleich für unser Gefühl das mit $\sqrt[4]{3}$ übereinstimmt, so ist doch für die Auffassung der damaligen Zeit ſ̄ʒʒ̄ |3 und ſ̄ʒ̄ |3 etwas wesentlich Verschiedenes. Die nicht mediale irrationale Zahl wird nämlich wieder anders gekennzeichnet. Als mediales Quadrat sahen wir ſ̄ʒ̄ |3 schreiben, als einfaches irrationales Quadrat wird dieselbe Zahl ſ̄ |3 ʒ̄ geschrieben, also der Potenzexponent, um so kurz zu sagen, hinten angehängt, und die Wurzel dieser irrationalen Potenz ist dann natürlich ſ̄ |3 ʒ̄.

Item numeri quadrati in potentia irrationales disiuncti a mediali.

ſ|5 ʒ	der quadrat
ſ|5 cℓ	der cubic
ſ|5 ʒʒ	der census de censu

Ita figurantur numeri quadrati in potentia irrationales in longitudine.

ſ|5 ʒ	der quadrat
ſ|5 cℓ	der cubus
ſ|5 ʒʒ	der census de censu

Wir nemen *ac* (Fig. 17) vor radicem der quadratischen duction in numeris ſʒ 5 vnd *cb* ſʒ 3, vnd quadrirn *ac*, facit |5 ʒ, vnd quadrirn *cb*, facit |3 ʒ; das sein zwei quadraten in potentia allein rationales, als wir oben gesagt haben. Nun in quarta secundi geometriae, wir multiplicirn ſʒ 5 vnd ſʒ 3 mit einander das ist *ac* jn *bc* bis, khomen die zwei supplementa vnd khumbt ſʒ |15, das sein zwei numeri mediales, die do in potentia seind irrationales vnd seind gesatzt medio loco proportionales zwischen den zweien quadraten |5 ʒ vnd |3 ʒ. Also sagen wir das die drei numeri |3 ʒ, ſʒ |15 vnd |5 ʒ sein continui proportionales. Also haben wir geclert die vrsach des medii. Als wann radix quadrata von 15, das ist das supplement, vnd radix von dem radice ist das latus tetragonicum des supplement in longitudine vermag proportionaliter describirn, vnd also ist es in cubicis vnd andern ducti|onibus, welche do mehr media proportionalia haben dann eins, vnd werden alle genant mediales, von wegen das sie nach ordnung der duction seind media proportionalia der ductionen. Sagt der text per modum corollarii, das alle zal an der lenge rationales werden hieraus erkant in potentia rationales. Wann eine yede zal absoluta ist vff das minst in potentia rationalis, vnd hierumb werden die rationalischen zaln in longitudine absoluta gesatzt, vnd in potentia, wie andere zaln, die allein potentia rationales seind, als wir gesagt haben. Als 2 bedeut ein radix vnd |4 ʒ sein potentz quadrat, also der gleichen wir jn der glosa angezaiget; vnd volget also das ander Capitel vnsers dritten tractats des dritten Buchs.

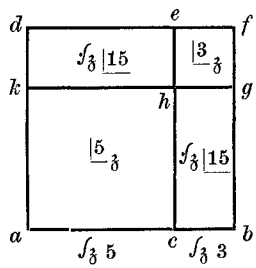


Fig. 17.

124

Capitulum secundum de additione radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine. |

124'

Radicum numerorum irrationalium coacervatio omnium ductionum constabit, cum, si longitudine communicantes fuerint proportione et mensura

quadam, ductiones, quae proponantur, si primi et minimi in eadem exuentur, inde radices coacervandae erunt. Productum vero, si vocabulum ductionis accepit, excrescens huius, cum si communicantes quantitate ductionum fuerit, huius producti radix aggregationem radicum numerorum propositorum ostendet.[1])

Hie saget ALGEBRAS von der ersten speties der numerorum irrationalium, vnd sagt von den radicibus der irrationalen in longitudine communicantium. Als wir sagen, das 12 vnd 3 seind communicantes in longitudine, vnd seind doch an jn selbst surdi, darum sagt er hie, zu addirn ſ̃ 3 zu ſ̃ 12, dergleichen welche zal do communicirn in longitudine vnd sie haben ein proportz gegeneinander als ein quadrat gegen dem andern, hierumb communicirn sie der dritten duction der quantitatum in longitudine, vnd laut gemelter text zum deutschen also:

Die zusammengebung der radicum aller ductiones, welche so die zaln longitudine communicirn in der proportz vnd einer mensur der | furgehaltenen ductionen, welche zaln, so die exuirt 125
werden in die cleinsten zal vnd proportz der duction, vnd von welcher also genomen werden die radices vnd werden zusamen geaddirt, was daraus khumbt, das der duction gemes gefurt wirdt, vnd letzlich solch product erwechst durch den communicanten, damitt sie haben communicirt, sagen wir, das der radix desselbigen erwachsenden der duction die addirung beweise der gemelten radicum furgelegter zaln.

Als wir wollen schrifftlich cleren, das, so wir vornemen den quadrat, welcher die erste duction ist, so ist nicht not die rationalen vorzuschlahen, wann wir dauon genugsam zu erkhennen gegeben haben vnd beweisen jre Addirung durch ihre offene radices an jr selber. Welche aber so die longitudine communicirn, als zu addirn ſ̃ 8 zu ſ̃ 18, welche in potentia vnd longitudine communicirn mit den rationaln, sagt der text, das man sol suchen die mensur $8 + 18$, finden wir 2, welche sie thailt zu 4 vnd 9; das ist die proportion der duction, als der text sagt. Von welchen 4 vnd 9 wir nemen jre radices zusamen, nach den sie rationales seind, werden 5,

---

1) In diesem Kapitel wird die Formel entwickelt:

$$\sqrt{a^2 b} + \sqrt{c^2 b} = \sqrt{(a + c)^2 b}\,.$$

Gerechnet wird so: $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, $\sqrt{c^2 b} = c\sqrt{b}$, also ist $\sqrt{a^2 b} + \sqrt{c^2 b} = (a + c)\sqrt{b} = \sqrt{(a + c)^2 b}$. Aber die Rechnung gilt auch allgemeiner $\sqrt[n]{a^n b} + \sqrt[n]{c^n b}$ ist auch gleich $\sqrt[n]{(a + c)^n b}$. So ist in seinem Beispiele ſ̃ 3 + ſ̃ 96 = 1 ſ̃ 2 + 2 ſ̃ 3 = 3 ſ̃ 3 = ſ̃ 243 · 3 = ſ̃ 729, das ist in unsern Zeichen $\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{729}$.

vnd multiplicirn das quadrate, das ist mit den rational ductionibus, wirdt
25. Solchs, sagt der text, soll wider gemultiplicirt werden mit dem com-
125′ municanten, das was 2, wird 50, vnd radix | von 50 ist radix der an-
gegebenen zal, welche also was ſ̃ von 8 vnd ſ̃ 18. Sprechen wir, jr beder
radix ist ſ̃ 50, vnd defsgleichen in den andern ductionibus, welche nun so
die jn longitudine communicirn furgegebene duction. Als wir wollen setzen
von dem cubic; ich soll addirn ſ̃c̃ von 4 zu ſ̃c̃ von 32. So wir suchen
Mensur nach dem dritten capittel vnsers andern tractats, finden wir pro
mensura 4, vnd die numer werden minimi 1 + 8, welche in proportione
seind der cuben. Wir nemen jre radices zusamen, werden 3, vnd cubirn
die, werden 27, vnd solche multiplicirn wir mit 4, dem communicanten,
khumen 108 vnd ſ̃c̃ von 108 ist geaddirt ſ̃c̃ 4 vnd ſ̃c̃ 32, vnd also gleich
in andern ductionibus, welche, so sie longitudine communicirn. Als ich
wollte addirn ſ̃ß̃ von 3 zu ſ̃ß̃ von 96, so examinirn sie sich ad ductionem
in 1 vnd 32 vnd die summa der radicen von dem ist 3. Das multiplicirn
wir der duction gemes, khomen 243, vnd solchs sollen wir mit dem com-
municanten multiplicirn, das ist mit 3, wirdt 729 vnd ſ̃ß̃ von 729 ist die
126 addition der radicum der furgelegten zaln, vnd also furter. |

Das wollen wir geometrice ostendirn (Fig. 18), vnd nemen vor zum ersten den quadrat, vnd wie er sich in dem hellt, also ist es in den andern ductionibus. So wir suchen mensuram, finden wir das ſ̃ 18 vnd ſ̃ 8 seind

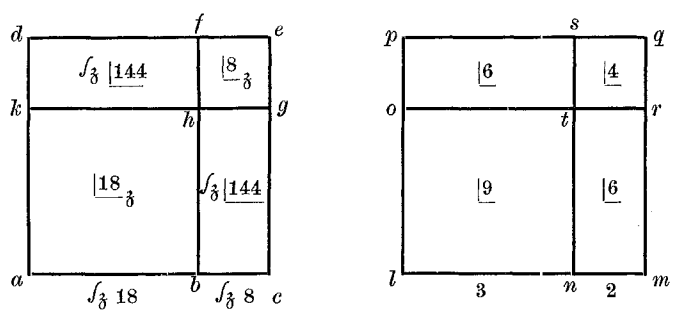


Fig. 18.

equa multiplicia von 9 vnd 4, welche also jre radices machen 5, vnd jre potentz 25, wann 9 vnd 4 vnd 6 vnd 6 seind ex quarta secundi geometriae 25. Nun seind ſ̃ 18 vnd ſ̃ 8 equa multiplicia mit + 2, also 2 mal 25 seind 50. Also sagen wir, das die quadrata vnd supplementa seind equa multiplicia; haben wir ex 15 geometriae quinti, das multiplicabilia haben eine gleiche proportion, mogen wir sagen, das ſ |50 ̃ ist souil sam ſ̃ von 18 vnd ſ̃ von 8 zusamen geaddirt, wann 18 vnd 8 vnd ſ̃ |144, das ist 12 geduplirt mit 6 dem submultiplex, zwir genomen macht 50, vnd also mogen wir

solchs nachuolgend beweisen in der extraction der surden ad propinquitatem mit | dem numero mutuato, das ist mit der entlehnten zal, als du eigent- 126′
lich eher nicht wirst vnd magst also probirn, als wir tabellaria vestigia werden setzen dem numero mutuato. Vnd also haben wir genuglich vorstentnus eingefurt, damit man mag addirn etzliche radices der ductionum, welche do communicirn in longitudine. Nun volget hernach von den numeris irrationalibus, die do in longitudine kheine communicantes haben, als do seind ʃ3 von 5 zu ʃ3 von 3 zu addirn, welche also nicht sein in der proportion kheiner duction, vnd hierumb werden sie vnverstentlich addirt, es sey denn, das wir sonderlich geometrisch beweisung einfuren, als wir im negsten Capitel sagen werden von den zalenn, die do nicht sein in kheiner proportion der ductionum.

Capitulum tertium de additione radicum irrationalium incommensurabilium longitudine.

Incommensurabilium vero numerorum longitudine descensus radicum relinquitur, cum in adaucta proportione ductionis, qua versantur, non sedent, sed binomiis, trinomiis, quadrinomiis et quampluribus numeris irradicabilibus hi numeri construuntur, et geometrica quadam figuratione propter quid ostenduntur. | [1]) 127

Nachdem Algebras gesagt hat von den radicibus der zaln irrationalen, welche in der lenge communicirn, das ist, das sie sein similes, das ist in proportione quadratorum oder ductionum etc, hie saget er von zaln, welche do sein jn kheiner proportion der duction vnd laut der text zum deutschen also:

Der irrationalischen zalen absteigung zu iren radicibus, welche do nicht communicrn jn longitudine, wird verlossen, wann sie seind nicht equa multiplicia, das ist, das sie nicht sein jn der proportion der ductionen, jn welcher dann sie proportionirt

---

1) Addition allgemein irrationaler Wurzeln nach der Formel:

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(a+b)+\sqrt[n]{(n_1)^n\,a^{n-1}\,b}+\sqrt[n]{(n_2)^n\,a^{n-2}\,b^2}+\cdots+\sqrt[n]{(n_{n-1})^n\,a\,b^{n-1}}}$$

unter $n_1, n_2, \cdots, n_{n-1}$ die Binomialkoefficienten verstanden. Sein erstes Beispiel ist $\sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt{8+\sqrt{60}}$. Um dabei anzudeuten, dass die erste Wurzel sich auf den ganzen Ausdruck erstreckt, der ihr folgt, ist ihr unmittelbar cs angehängt, das heisst *communis,* die sonst dort stehende Bezeichnung des Wurzelexponenten jedoch an das Ende des den ganzen Ausdruck einschliessenden Winkelhakens gerückt. In cossischen Zeichen heisst also die obige Gleichung:

$$ʃ_{ʒ}\,3 + ʃ_{ʒ}\,5 = ʃ\text{cs}\,\underline{|8 + ʃ60}_{ʒ}\,.$$

werden, sondern sie werden, spricht er, mit gespalten zaln, das ist mitt zwifach genomigen, mitt drifach genomigen, mitt vierfach genomigen vnd mit der noch mehr vnradicirten zaln der quantiteten affirmatiue vnd negatiuen vmbschreiben, vnd werden also beweist durch geometrische formen jre vrsach, warumb sie dermas vnd nicht anderst sollen addirt werden.

Von disem text schrifftlich zu sagen, so nemen wir vor jn gleicher form jm negsten Capitel beweist aus quarta secundi geometrie vnd setzen zu addirn $\int_{\mathfrak{z}}$ 5 zu $\int_{\mathfrak{z}}$ 3, welche also, sam der text sagt, incommensurabiles seind longitudine vnd irrationales gemelter duction | vnd khein communicanten haben. Setzen wir ab sei $\int_{\mathfrak{z}}$ 5, vnd bc sey $\int_{\mathfrak{z}}$ 3 (Fig. 19), so wir ab quadriren, so khumbt $\underline{|5}_{\mathfrak{z}}$, der quadrat ah in potentia rationalis. Wir quadrirn bc, ist $\underline{|3}_{\mathfrak{z}}$, der quadrat he rationalis in potentia. Wir producirn ex quarta eiusdem secundi Geometriae die zwei supplementa fk vnd bg, welche erwachsen aus ab in bc zwir gefurt, machen $\int_{\mathfrak{z}} \underline{|15}$ vnd aber $\int_{\mathfrak{z}} \underline{|15}$, aus welchen circumscriptibilibus, sagt der text, die Addition sol werdenn. Wir addirn 5 vnd 3, das sind die zwo rationalisch potentz, ist 8; wir addirn die zwei supplementa, das ist die zween numeri mediales, ist $\int_{\mathfrak{z}} \underline{|60}$: also sprechen wir, das der gantze quadrat ac sey in numeris irrationabilibus $\underline{|8 + \int \underline{|60}}_{\mathfrak{z}}$, vnd radix von dem ist ac, das ist in longitudine in numeris irrationalibus, geschrieben dermas als

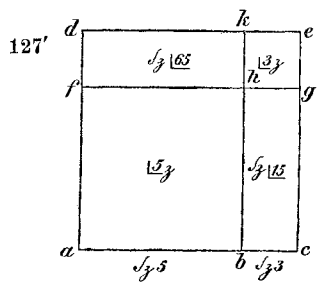


Fig. 19.

$$\int \text{cs} \underline{|8 + \int \underline{|60}}_{\mathfrak{z}}$$

vnd das ist $\int_{\mathfrak{z}}$ von 5 vnd $\int_{\mathfrak{z}}$ von 3 geaddirt, vnd wirdt binomius numerus, das ist mit zweifach gnomischen zaln vmbschrieben. Wann 8 vnd $\int_{\mathfrak{z}}$ von 60 sein gespalten, vnd hierumb sagt der text: binomiis. Saget furter mit trinomiis, das geschicht in cubic zaln. Sam also, wir wollen addirn $\int_{\mathfrak{cl}}$ von 8 zu $\int_{\mathfrak{cl}}$ von 27. Wir cubicirn $\int_{\mathfrak{cl}}$ von 8, wird $\underline{|8}_{\mathfrak{cl}}$, vnd cubicirn $\int_{\mathfrak{cl}}$
128 von 27, wirdt | $\underline{|27}_{\mathfrak{cl}}$, das seindt die zwen cubic pq vnd kl (Fig. 20) in der obersten superficie in rationalibus, wann khein duction schwerer ist zu addirn dann der cubic. Hierumb wollen wir exemplariter setzen zum ersten in rationalibus Exempel, darnach surden. So wir haben die zwenn cubic $27 + 8$, so nemen wir das vorgetriplirt quadrat von dem radix cubica des grosten cubic, der do ist 27. Das finden wir also: wir multiplicirn 27 cubice, khumen 19683; also $\int_{\mathfrak{ccl}}$ von 19683 ist $\int_{\mathfrak{cl}}$ von 27, das multiplicirn wir

ſcc℔ 19683 in ſcc℔ von 19683, khumbt quadratum radicis ſc℔ 27, das dann more irrationibilum ist 387420489. Also sagen wir, das quadratum cubice radicis von 27 ist ſcc℔ 387420489. Solchs sollen wir triplicirn, so multiplicirn wiz cc℔ von 3, der dann ist 19643 mit dem ſcc℔ 387420489, khumbt ſcc℔ 7428597484987, vnd das ist triplum radicis quadrati cubici

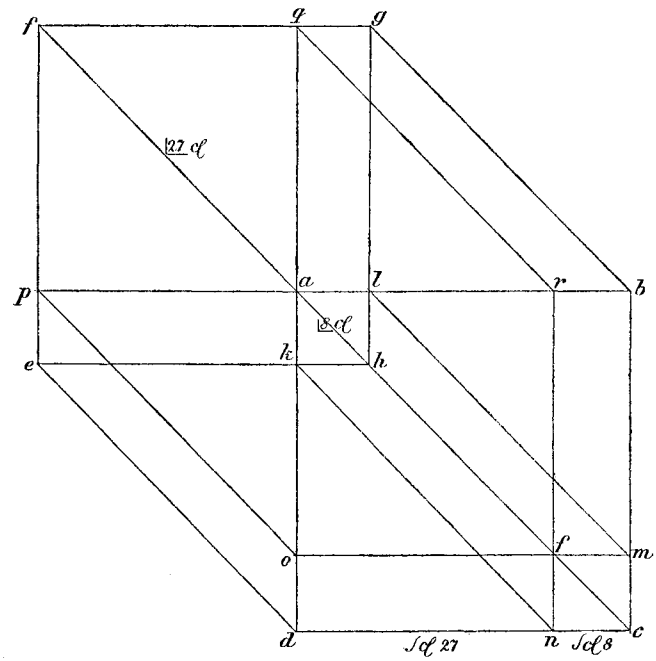


Fig. 20.

maioris cubici. Solchs sollen wir multiplicirn in ſc℔ von 8, das ist minorem cubicum, also cubirn wir 8, khumbt 512. Also multiplicirn wir ſcc℔ 512 mit ſcc℔ 7428597484987, khumen also 3803441912313344, vnd das seind die 3 zensus, damit der cubus wechst *fs*, *dg* vnd *hb* vnd haben also noch die radices zu solidirn, welche dann erwachsen aus dem triplicirten quadrat von dem radix cubica des cleinern cubic gemultiplicirt in radicem des grossen cubi, also finden wir, das wir wie oben multiplicirn | 8 cubice, 128′
khumbt 512, das ist ſcc℔ von 512, Nun multiplicirn wir 512 mit 512, facit in more irrationalium ſcc℔ 262144, vnd das ist quadratum von ſc℔ 8. Das sollen wir aber triplicirn, darumb multiplicir cc℔ von 3, der dann ist 19683, mit 262144, khumbt 5159780352, vnd ſcc℔ von solchem ist triplum quadratum cubicae radicis des cleinern cubus, der do was 8. Solchs sollen wir multiplicirn in radicem cubicam des grossen, was 27. Nun ist cc℔

gewest von 27 ſccℓ 19683, darumb multiplicir 19683 mit 5159780352, vnd khumbt 101559956668416, vnd das seind 3 radices solidatae $ph + ln + gk$, vnd also finden wir more irrationalium, 27 vnd 8, das macht 35 vnd 3803441912313344, das seind 3 ʒ, vnd 101559956668416, das seind die drei radices solidatae. Also sprechen wir, das gemelter cubic figurirt ist in potentia

$$\underline{|35 + \text{ſcc}\ell\ 3803441912313344 + \text{ſcc}\ell\ 101559956668416}_{\text{c}\ell}$$

vnd in longitudine wirdt es also figurirt:

$$\text{ſcs}\ \underline{|35 + \text{ſcc}\ell\ 3803441912313344 + \text{ſcc}\ell\ 10155995668416}_{\text{c}\ell}.$$

129 Wann die 3 ʒ seind | in rationalibus 54, vnd die drei radices solidirt 36, solchs zusamen macht 125, vnd ſcℓ von dem macht die addition, Vnd gleicherweis mogen wir figurirn in surdis, wann wir vermeiden die grosse muche der zal in der magnitudine, so wollen wir hie beschlisen, das die cubic mit trinomischen zaln werden vmbschrieben vnd wollen also die ductiones vormelden jn der subtraction, wann wie eine geht, so geht auch die ander, allein das sie mit jren circumscriptibilibus werden vorandert. Wann quadratum de quadrato in surdis wirdt quadrinomicis circumsribirt, vnd also fort. Nun volget dj substraction, vnd was wir hie haben vormyden also von den surden, das wollen wir jn den andern eruolgen von kurtz wegen, dauon der leser nicht verdrossen werde, vnd wollen den
129′ Artickel der surden auch declariren. |

Capitulum quartum de subtractione radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine.

Radicum numerorum irrationalium diminutio omnium ductionum notabitur, cum si, ut diximus, longitudine communicant, proportionis mensura, qua ductio proponitur, si primi et minimi eorum exuti in eadem ad radicis exsoluentur, radices segregandae sunt, residuum, si ductionis nomen usurpet. Exortum huius si communicantis quantitate dictum fuerit, huius tum producti radix subtractionis radicum numerorum propositorum manifestet.[1])

Nachdem Algebras cleret hat die addition der irrationalen, welche do communicirn vnd nicht communicirn, hie ervolget er die andern species,

1) Hier ist wieder die angewendete Formel:

$$\sqrt[n]{a^n b} - \sqrt[n]{c^n b} = \sqrt[n]{(a - c)^n b}\,.$$

Die Rechnung genau geführt wie bei der Addition.

sagende von der subtraction der communicanten in longitudine, vnd laut zum teutschen also:

Die abnemung der radicum von einander der irrational zaln, welche, als wir gesagt haben, communicirn in longitudine mit der mensur der proportion der duction, mit welcher sie proponirt werden, so jre termini exuti, das seind die minsten jn derselben proportion der duction, wird aufgeloset jn jre radices, so sollen sie von einander gezogen werden, vnd das | residuum, so es ge- 130
schopfet den namen der duction, vnd was heraus khumbt, so das mit der mensur communi gemultiplicirt wirdet, desselben product radix wirdt offenbar die abnemung der radicum von einander der vorgelegten zaln.

Von disem text, wie vorgesagt, eine schrifftliche meinung zu geben, nemen wir vor eine duction, als wir wollen subtrahirn ſ̃ʒ̃ʒ̃ 5 von ſ̃ʒ̃ʒ̃ 405, so suchen wir, als der text sagt, die groste mensur, ist 5; vnd die minimi termini seind 1 + 81, welcher radices gegebener duction ist 1 + 3. Nun ziehen wir 1 von 3, bleiben 2, vnd solche 2 sollen der duction gemes gefurt werden, facit 16, welche, als der text sagt, mit dem Communicanten sollen gemultiplicirt werden, facit 80, vnd ſ̃ʒ̃ʒ̃ von 80 ist die subtraction oder das restat, so ich subtrahir ſ̃ʒ̃ʒ̃ 5 von ſ̃ʒ̃ʒ̃ 405. Desgleichen in allen ductionibus, so sie seind similes ductiones propositae. Als ich wolte subtrahirn ſ̃cℓ 16 von ſ̃cℓ 1024, so soluirn wir ad minimas partes oder terminos ſ̃cℓ 16 + ſ̃cℓ 1024, khumen 1 + 64, von welchen die radices sein 1 + 4. So wir sie von einander zihen, pleiben 3. Solche cubicirn wir, seind 27, vnd multiplicirn mit dem communicanten 16, khomen 432, vnd ſ̃cℓ von 432 ist das Residuum, so man die eegemelten termini von einander zeuchet, vnd defsgleichen | wirdt solchs auch bewisen jn den andern ductionibus. 130′
Als ich wolt setzen ein sursolitet, ſ̃ß̃ 64 von ſ̃ß̃ 486 zu zichen, examinirn wir die ad minimos terminos, khumen 32 vnd 243, von welchen ſ̃ß̃ ist 2 + 3; ziehen wir 2 von 3, restat 1. Solchs multiplicirn wir der duction gemes, khumbt 1, das multiplicirn wir mit dem Communicanten 2, khomen 2: also khumbt jm restanten ſ̃ß̃ von 2, vnd desgleichen jn andern ductionibus.

Das wollen wir geometrice ostendiren. Wir nemen in den quadraten zu subtrahirn ſ̃ʒ̃ |18 von ſ̃ʒ̃ |200. Wir resoluirn sie in numeros, das ist in minimos terminos der duction, finden wir 9 vnd 100, von welchen die radices seind 10 vnd 3. Also seind 18 vnd 200 equa multiplicia, Was dann ist in simplicibus, das ist auch in equis multiplicibus. ex 15ª quinti Geometrie.[1])

1) Euclides V, 15: Si fuerint aliquibus quantitatibus eque multiplices assignate, erit ipsarum multiplicium atque submultiplicium una proportio.

Nun saget auch septima secundi geometrie[1]): Was do werde aus *ab* in
131 sich gefurt mit sampt *bc* in sich, das sei dem gleich, das | do khumbt aus *ab* in *cb* zwir vnd aus *ac* in sich gefurt (Fig. 21). So wir nun zichen *cb* von *ab*, restat *ac* in longitudine vnd in potentia *ak*. Nun ist *ab* in potentia |200 ʒ̊, vnd *cb* in potentia |18 ʒ̊, das macht zusamen 218: das soll gleich sein den zweien medialen in potentia *ge* vnd *ce* mit sampt dem quadrat *ak*. Also ziehen wir die zwei medial in potentia, die zusamen machen ∫ʒ̊ |1440 von |218 ʒ̊ dem quadrat des gantzen, restat 98, vnd das ist quadratum *ak* ignotum, des radix ist *ac*. Also sagen wir, so wir ziehen ∫ʒ̊ |18 von ∫ʒ̊ |200 restat ∫ʒ̊ |98, das was quadratum *ak*, also ist 98 auch gleich multiplex mit 49. Dann ipsa simplicia waren 3 vnd 10, vnd so wir 3 von 10 ziehen, pleiben 7, des quadrat ist 49. Vnd also haben wir solchs im quadrat bewisen, vnnd helt sich gleichmesig in andern ductionibus.

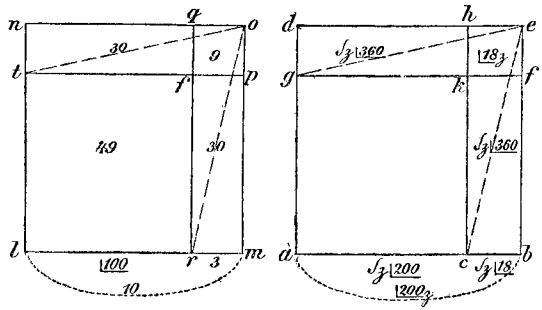


Fig. 21.

Als wir setzen, ich wil subtrahirn ∫c̊ |16 von ∫c̊ |250. Suchen wir die gantze mensur, ist 2, vnd seind die resolventen 8 vnd 125, von welchen radix ist 2 vnd 5. So wir nun subtrahirn 2 von 5, pleiben 3. Solchs sollen wir cubicirn, khomen 27, das ist mit der gemeinen mensur multiplicirn, als 2, khomen 54, vnd ∫c̊ von 54 restat, so wir subtrahirn ∫c̊ 16 von ∫c̊ 250. Vnd also helt es sich allerweis in andern ductionibus,
131′ vnd solchs dich also geometrice zu ostendirn | werden wir sagen jm nachuolgenden Capitel, von dem, so sie seind incommensurabiles in longitudine. Vnd also haben wir es in der duction mogen vorfurn des quadrats von dem quadrat, als wir setzen zu subtrahirn ∫ʒ̊ʒ̊ 7 von ∫ʒ̊ʒ̊ 567. Wir resoluirn ad minimos terminos, finden wir 1 + 81, von welchen radix radicis ist 1 + 3. Nun ziehen wir 1 von 3, restant 2; die furen wir der duction gemes, khumbt 16. Das multiplicirn wir mit dem communicanten, khumbt 112, vnd ∫ʒ̊ʒ̊ 112 pleiben, so wir subtrahirn ∫ʒ̊ʒ̊ 7 von ∫ʒ̊ʒ̊ 567, vnd ist recht. Volget von den incommensurabilibus longitudine das funfft capitel.

---

1) Euclides II, 7: Si linea in duas partes dividatur, quod fit ex ductu totius in se ipsam, cum eo, quod ex ductu alterius partis in se ipsam, equum est eis, que ex ductu totius linee in eandem partem bis et ex ductu alterius partis in se ipsam.

Capitulum quintum de subtractione Radicum numerorum irrationalium incommensurabilium longitudine.

Eorum vero, quorum rationamentum longitudinis non est, ipsi quidem nequaquam in adaucta proportione resident, sed ut prius irradicabilibus numeris plurinomicis et habitudinibus negativorum vel privativorum constituuntur. Et horum etiam causas, propter quid, geometricis demonstrationibus annexímus.[1]) | 132

Hie cleret ALGEBRAS die zaln, welche do seind in longitudine incommensurabiles, vnd saget von jren subtractionibus, welcher text laut zum deutschen also:

Der zalen, welcher do ist kheine Mensur der duction, vnd dieselbigen seind mit nichte in der proportion der similen ductionen, sondern sie werden vmbschrieben mit vngeradicirten zalen der manignamig zalen mitsampt den habitudinen der Negation vnd priuation, vnd der aller haben wir vrsach gesatzt vnd geometrischer demonstration anhangen.

Von wegen des textes, wie vormals gethan, einen schrifftlichen sin zu geben, vnd nachdem die quadratische duction die erste ist, so wollen wir dauon setzen. Als ich will abzihen $\sqrt{\text{ʒ}}$ 5 von $\sqrt{\text{ʒ}}$ 12. So nemen wir vor ein quadrat (Fig. 22) des lenge *ab* ist $\sqrt{\text{ʒ}}$ 12, von dem so gezogen wirdt $\sqrt{\text{ʒ}}$ 5, restat *ak*. Wir nemen fur, als in der Addition, septimam secundi Geometrie: Was do wirdt aus *ab* in sich gefurt mit samt dem *kb* in sich, das sei gleich dem, das do khumbt aus *ad* in *kb* zwir vnd aus *ak* in sich gefurt. Nun ist *ad* der quadrat $\underline{|12}_{\text{ʒ}}$, vnd *gd* der quadrat $\underline{|5}_{\text{ʒ}}$, das zusamen ist $\underline{|17}_{\text{ʒ}}$, vnd souil soll auch sein *kd* vnd *hd* vnd *ag*. Nun seind *hd* $\sqrt{\text{ʒ}}$ $\underline{|60}$, das zwir aus septima geometrie ist $\sqrt{\text{ʒ}}$ $\underline{|240}$. So wir das von $\underline{|17}_{\text{ʒ}}$ herabzihen, so pleibet $\underline{|17 - \sqrt{240}}_{\text{ʒ}}$, das ist der quadrat *ag*, vnd $\sqrt{\text{cs}}$ $\underline{|17 - \sqrt{240}}_{\text{ʒ}}$ ist *ak*. Also sprechen wir | de- 132'
monstratiue, so wir subtrahirn $\sqrt{\text{ʒ}}$ 5 von $\sqrt{\text{ʒ}}$ 12, restat $\sqrt{\text{cs}}$ $\underline{|17 - \sqrt{240}}_{\text{ʒ}}$ des quadrats, der was *ak* in longitudine, vnd also werden die irradicabiles

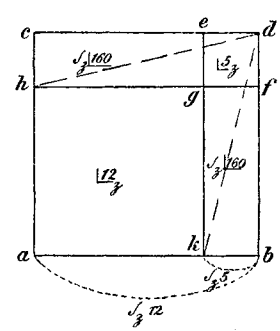


Fig. 22.

1) Für die Subtraktion allgemeiner Wurzeln wird die ähnliche Formel entwickelt wie für die Addition. Das Beispiel für die Quadratwurzel ist dabei folgendes:

$$\sqrt{\text{ʒ}}\,12 - \sqrt{\text{ʒ}}\,5 = \sqrt{\text{cs}}\,\underline{|17 - \sqrt{240}}_{\text{ʒ}} \text{ das heisst } \sqrt{12} - \sqrt{5} = \sqrt{17 - \sqrt{240}}\,.$$

numeri mit den habitudinen geschrieben —, das ist mit der Negation, als in der addition ist geformirt mit der affirmation, vnd ist in der ersten duction mit binomischen zaln, das ist mit zwiefach genomigen.

Nun wollen wir dich berichten mit den cubicen, welche mit trinomischen zaln vmbeschrieben werden. Sam also, wir setzen zu subtrahirn ſcℓ von 5 von ſcℓ 7. Solchs dich zu berichten khonnen wir nicht bescheiden, wir setzen dann eine rationalische zal oder exempel more irrationalium zu subtrahirn, vnd wie wir jn dem procedirn more irrationalium, also wollen wir in den irrational zaln in longitudine auch operirt haben. Als wir setzen wollen abzuzihen ſcℓ 8 von ſcℓ 125 in rationalibus, thun wir also: der cubus *ab* (Fig. 23) ist 125, vnd das solidum *ke* ist 20, welche do

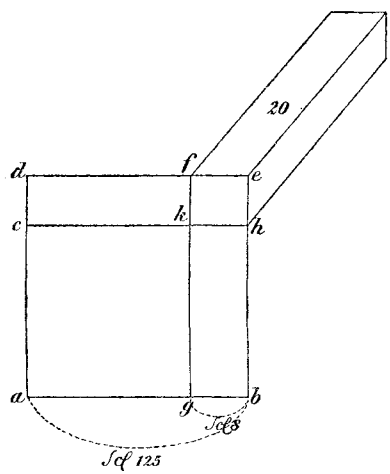


Fig. 23.

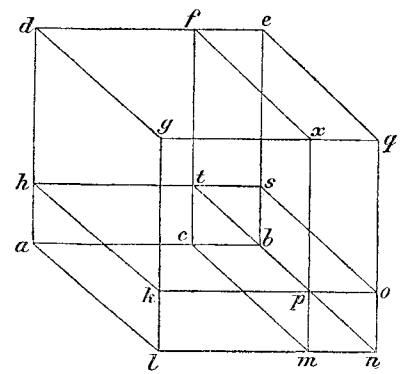


Fig. 24.

wirdt ex septima secundi geometriae aus *gb* in *ab*. Wann *gb* ist 2 vnd *ab* ist 5, vnd 2 mal 5 ist 10 vnd 2 mal 10 ist 20, oder khumbt aus *gb*
133 | in sich gefurt, das ist 4, in *ab*, als 5, macht 20. Also addirn wir ex septima secundi Geometriae 125 vnd das solidum 20, werden 145. Solchen ziehen wir ab ex septima secundi duplum solidi, das do wird aus *ab* in *gb*, wann *ab* ist 5, vnd *gb* ist 2 vnd 5 mal 2 ist 10, vnd 5 mal 10 ist 50, vnd das zwir ist 100, oder khumbt *ab* in sich gefurt, das ist 25 in *gb*, das ist 2, macht 50, das zwir ist 100. Das zihen wir ab von 145, restat 45, das ist das solidum, das do wirdt vom quadrat *ak* in *ab*. Also thailen wir 45 in *ab*, ist 5, khomen 9, das ist das quadrat *ak*, cuius radix quadrata 3, vnd also sagen wir, so ich subtrahire ſcℓ 8 von ſcℓ 125, so pleibt ſcℓ 27, das ist 3. Solches more irrationalium zu setzen in vnsere
133′ andere figur des cubics (Fig. 24), | wir nemen *dn* den gantzen cubic 125

vnd nemen *tn*, das ist 20, vnd addirn das, ist 145, wann 20 wirdt zwir genomen mit den andern circumscriptibilien. Nun der gantz cubic ist allerwegen jn der potentz rationalis, dj 20 finden wir more irrationabilium. Also wir cubiren 8, wird 512, vnd ſcc℔ von 512 ist ſc℔ von 8. Das multiplicirn wir in sich, facit ſcc℔ 262144, vnd das ist quadratum von ſc℔ 8. Das multiplicir in cubum de cubo von 125. Multiplicir 125 cubice, facit 1953125, vnd ſcc℔ von dem ist 5. Das multiplicir in ſcc℔ 262144, facit 51200001000, vnd ſcc℔ von dem ist das andere circumscriptibile. Also haben wir 145 + ſcc℔ 51200001000. Dauon sollen wir subtrahirn duplum solidi, so do wirdt aus *ab* in *gb*; finden wir, so wir das quadrat *ab*, das was 25, in *cb* furen, das was 2, vnd solchs zwir setzen wir more irrationalium. Also wir cubirn | 125, facit 1953125, vnd ſcc℔ von dem ist 5, 134
das multiplicirn wir jn sich, facit ſcc℔ 3794705265625, vnnd das ist quadratum von 5. Das multiplicir in 2, als wir gesagt haben, hierumb in cc℔ von 2, ist 512. Multiplicir die gantze zal oder die gemelte, facit 19428896000000, vnd ſcc℔ ist 50, das ist *hn* Das solidum sol noch einmal genomen werden *fn*, darumb multiplicir 512 jn das negste product, khumbt 9847592191521000000, vnd ſcc℔ von dem ist 100, also sagen wir more irrationabilium, das

$$\underline{|145 + \text{ſcc℔ } 51200001000 - \text{ſcc℔ } 19428896000000},$$

das ist *hf* solidum altitudinis *ho*, welchs, so es gethailt wirdt in *ab*, restat quadratum *hf*, des radix ist *ht*, das was 3. Also dergleichen in irrationalibus vnd andern ductionibus. Nun volget hernach die multiplication.

Capitulum sextum de multiplicatione radicum numerorum irrationabilium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Radicum numerorum irrationalium multiplicatio aequalis radici numeri unius in alterum, cum fuerit ductionum similium. Et si diversarum sint denominationum ad eadem et in idem genus reducentur, capiatque unus alterius denominationem. Quod si exinde unus in alium ducatur, radix unius radicis alterius ductionis multiplicationem radicum propositorum numerorum ostendit. | [1]) 134′

Nachdem Algebras genugsame meinung zu vorstehen gibt der Addition vnd subtraction, sagt er hie von den zaln jrer radicum multiplicationis, vnd laut zum teutschen also:

---

1) Hier wird allgemein die Multiplikation der Wurzeln gelehrt. Die gebrauchten Formeln sind in neuerer Bezeichnung:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}.$$

Die multiplication der radicum der jrrationalischen zaln ist dem radici gleich der multiplication einer zal irrationalisch in die andere irrationalisch gefurt, so sie einer duction seind. So sie aber vngleicher benenung sein, so sollen sie zuuor jn eine benenung vnd jn ein form reducirt werden, als ein jtzliche irrationalische zal sol der andern denomination an sich nemen vnd darnach, so eine wird in die ander gemultiplicirt, so beweist radix des radicis der andern duction die multiplication der radicum der furgelegter zaln.

Von solchen text schrifftlichen sin einzufuren, nemen wir vor zum ersten zu multiplicirn, die do seind similes, das ist, das sie einer benenung seind. Sagt der text, es sey gleich, so dj zalen mit einander gemultiplicirt vnd radix vom product, als so man ein radix mit dem andern multiplicirt. Das ostendirn wir also: ſ3 4 zu multiplicirn mit ſ3 9: sprich, 4 mal 9 machtt 36, vnd ſ3 von 36 macht 6, vnd ist gleich, so ich multiplicir ſ3 4, das ist 2, mit ſ3 9, das ist 3, khumbt auch 6, vnd also in den surdenn.
135 Als so wir wolten multiplicirn ſ3 5 mit ſ3 7. | Wir sprechen 5 mal 7 ist 35, vnd ſ3 35 ist die multiplication, defsgleichen in allen ductionibus. Als ich sprechenn: ſcℓ von 2 mit ſcℓ von 7 macht ſcℓ von 14. Vnd so ist es jn allen, die do seind in longitudine incommensurabiles oder nicht, vnd das wollen wir kurtzlich den ersten thail des text distinguirt haben. Sagt der text furter: so sie aber vngleicher benenung seind. Als wir setzen zu multiplicirn ſ3 4 mit ſcℓ 27, sagt der text, das ein jede rationalische zal soll nemen der andern benenung. Als wir cubicirn 4, facit 64, vnd sollen quadriren 27, facit 729. Nun multiplicirn wir eine mit der andern, facit 46656. Also so wir nemen daruon ſ3, khumbt 216 vnd ſcℓ dauon, ist 6, beweist die multiplication. Hierumb spricht der text: *radix unius radicis alterius ductionis* etc. Nun mugen wir auch sagen, ſcℓ von 46656 ist 36, vnd ſ3 von 36 ist 6, das beweist die frage. Also mogen wir auch setzen jn andern ductionibus der zalen, sie seind rationales oder nicht. Als ich wolt setzen, wir wollen multiplicirn ſ3 von 5 mit ſcℓ von 3, thun wir jme wie vor, vnd cubicirn 5, wirdt 125; wir quadrirn 3, khomen 9, gemultiplicirt mit 125 wirdt 1125, vnd ſ cubica von der quadrata radix ist die multiplication, vnd defsgleichen in andern ductionibus. Sam ich will
135′ multiplicirn ſcℓ von 2 mit ſ3 3 | von 3. Wir cubicirn 3, facit 27, vnd quadriren die quadrat von 2, facit 16, vnd multiplicirn 27 mit 16, facit 432, vnd ſcℓ der ſ3 3 beweist die frage oder radix quadrata de quadrato des cubice radicis, vnd also jn andern multiplicationibus. Mogen wir bej dem text einfuren heraus nemen. Als wir sprechen: ich will multiplicirn 3ſ3 2 mit 4ſ3 3. Wir reducirn 3 radices in die denomination des 3 facit 9;

sprich: 2 mal 9 ist 18, vnd ſ̃ von 18 seind 3 radices von 2. Wir cubicirn 4, facit 64; das multiplicirn wir mit 3, facit 192, vnd ſ̃c̃ von 192 seind 4 radices cubi von 3; vnd seind in proposito 3456, vnd radix cubica des quadraten radix, oder radix quadrata des cubicen radicis ist bewisen vorgelegte multiplication, vnd defsgleichen in andern ductionibus. Solchs zu ostendirn, propter quid das sey, das radix der multiplication eins radicis jn den andern sey gleich der radix der Multiplikation einer irrationalen in die andern, das wollen wir geometrice ostendirn. Wir multiplicirn ſ̃ 5 mit ſ̃ 2, vnd sagen ſ̃ 10 sei die multiplication. So wir *ac* (Fig. 25) multiplicirn in *bc*, wirdt *dh* supplementum oder *kb*, also ist der eins ein superficies, hierumb so ein radix in den andern wird gemultiplicirt, macht er numerum superficialem, darumb radix von 10 | ist die superficies *dh* oder *cg*. Hierumb ist zu vormercken, so ein irrationalische zal in die ander gemultiplicirt ist, das dieselbige producirt medialem, von welcher radix ist die superficies jrer radicum, so sie miteinander werden gemultiplicirt, vnd seind allwegen genandt mediales potentionales, vnd hierumb ist ſ̃ von 10 gleich, das ist die superficien *dh*, deme, so ſ̃ 5 vnd ſ̃ von 2 mit einander gemultiplicirt. Solche zal seind auch alle wege mediales, wann sie seind in potentia allwegen irrationales, als wir jm ersten capittel genugsam von dem gesagt haben. Das wollen wir nachuolgendt sagen von der diuision der surden, sie seind in longitudine commensurabiles oder nicht.

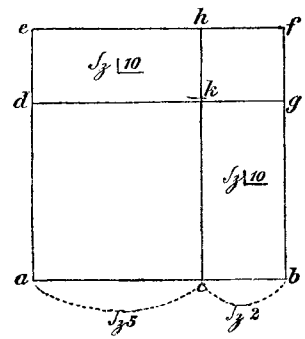


Fig. 25.

Capitulum septimum de diuisione radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Omnium radicum numerorum irrationalium diuisio aequalis radici quotientis unius diuisi per alium, cum sint similis ductionis propositi. Quod si diuersi, quemadmodum diximus, ad idem genus reducantur. Quod si unus per alium committatur, radix quotientis unius radicis alterius ductionis diuisionem explanat. | [1]) 136'

Hie saget Algebras von der diuision der radicum numerorum irrationalium, vnd laut der text zum teutschen also:

---

1) Division der allgemeinen Wurzeln nach den Formeln:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}.$$

Die thailunge der radicum jrrationalischer zal wirdt gleich dem radici des quotienten, der do ist, so ein zal irrationalium wirdt gethailt durch die ander, so sie anderst sein einer gleichen duction die vorgelegten zal. So sie aber einer vngleichen benenung seind, als wir vormals auch gesagt haben, so sollen sie in einer benenung gereducirt werden, vnd alſsdann, so einer durch den andern gethailt wirdt, radix des quotienten von dem radice der andern duction beweist dj theilunge.

Von dem text einzufuren wie vor eine schrifftliche meinung, so nemen wir vor zu thailen ſ̃ von 81 durch ſ̃ von 9. So thailen wir 81 durch 9, facit 9, vnd radix vom quotienten 9, als 3, beweist die diuision, vnd also sagen wir, so wir thailen ſ̃ von 81 in ſ̃ 9, khomen 3, vnd also ist radix des quotienten gleich dem, so ein radix vorgelegter zaln mit dem andern gethailt wirdt. Vnd also ist es auch jn jrrationalibus. Sam also, wir setzen wollen: ſ̃ von 136 durch ſ̃ 4; wir thailen 136 mit 4, facit 34, vnd ſ̃ 34 ist die thailung, vnd bey dem mögen wir einfuren zu disem vnd
137 vordern capittel, das allewege sollen sein gleiche duction, | als der text sagt. Als wir wollen setzen ſ̃ 128 zu thailen mit 4 oder zu multiplicirn, so muſsen wir 4 auch mit der duction benenen, das ist ſ̃ 16 vnd thailen ſ̃ 128 durch ſ̃ 16, khomen 8, vnd ſ̃ von 8 beweist die thailung, als wir dann weiter werden sehen. Ich will thailen 24 mit ſc̃ 5; also mussen wir 24 cubicirn, khumbt 13824, das thailen wir mit 5, facit $2764\frac{4}{5}$, vnd ſc̃ von dem beweist die diuision, vnd dergleichen mögen wir auch setzen jm quadrato de quadrato. Wir wollen diuidirn ſ̃ſ̃ von 128 durch ſ̃ſ̃ 4. Wir thailen, khumen 32, vnd ſ̃ſ̃ 32 beweist dj frage. So sie aber weren von vngleichen benenungen, als ich wollte thailen ſ̃ von 64 durch ſc̃ von 8, so sollen sie, als wir vorgesagt haben, jn eine benenunge reducirt werden. Also wir cubicirn 64, wirdt 262144, vnd quadrirn 8, khumen 64; wir diuidirn eins jn das ander, khomen 4096, vnd ſc̃ des quadraten radicis von 4096 beweist die thailunge, oder ſ̃ der cubic radicem von gemelter zalen, vnd hierumb sagt der text, radix des quotienten der einen duction des radicis der andern duction beweist die frage. Wann ſc̃ von 4096 ist 16, dauon ſ̃ ist 4. Also ich thaile ſ̃ von 64, ist 8, mit ſc̃ von 8, ist 2, khumbt 4, vnd ist recht. Oder radix quadrata von 4096 ist 64, dauon ist ſc̃ 4, vnd khumbt wie vor, vnd also wollen wir dich auch in surdis gewisen haben. Als ich spreche, ſc̃ von 10 durch ſ̃ 2; also cubicir 2, wirdt 8, vnd
137′ quadrir 10, wirdt 100, | thaile eins in das ander, khumen $12\frac{1}{2}$, vnd ſc̃ des quadraten radicem oder ſ̃ des cubic radicem von gemelter zal beweist die thailung. Vnd also mugen wir erfarn, ob man spreche 3 ſ̃ 3 zu diuidirn mit 2 ſc̃ 2. Also benennen wir 3 radices, das werden 9 in gleicher

duction von 3, vnd sprechen, 3 mal 9 ist 27. Also benennen wir 2 radices cubice, werden 8 in gleicher duction von 2, vnd sprechen 2 mal 8 ist 16. Also sein ſcℓ 16 2 ſcℓ von 2. Nun thailen wir ſʒ von 27 mit ſcℓ von 16, also seind wir in vnserm proposito wie vor, vnd mussen gleicher massen halten in andern ductionibus, das sie also alle gespaltne radices jn ein gebracht werden, vnd darnach nach dem text jn den propositum zu machen, das wollen wir dich geometrice demonstrin (Fig. 26). Wir haben, das gemultiplicirt ist ſʒ 2 in ſʒ 32, die medie ſʒ 64 producirt; also so aus ſʒ 32 in ſʒ 2 khumbt ſʒ 64 des radix superficien ist *kf*, also so ich thaile ſʒ 64 mit ſʒ 2, khumbt ſʒ 32, das ist *ac* in longitudine, als es vor was. Also mogen wir elicirn, das do die thailunge thailet numeros potentionales, also der diuisor, latus correlatiuum ist der quotienten, mit welchen der quotient multiplicative producirt den superficien, also welcher superficies, so er durch sein latus correlatiuum gethailt wirdt, | khumbt das ander, 138

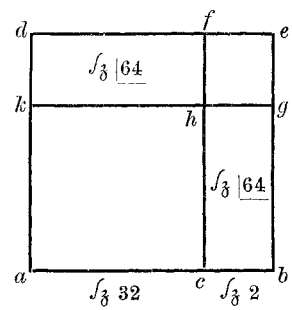


Fig. 26.

vnd deshalb sagen wir, das die diuision vnd multiplication seind seine correlativa. Multiplicatio hat sich ut potentia, diuisio ut longitudo, der quotient ut latus relatiuum, welche longitudo vnd latus relatiuum machen die gesprochen multiplication.

Capitulum octavum de duplicatione radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Omnium radicum numerorum propositorum duplatio, triplatio, val quadruplatio est, quemadmodum numerorum propositorum quadruplatio, nonuplatio vel sedecuplatio, ut semper nomine ductionis, qua versantur, vocentur. Radix exinde vocabuli propositum ostendit.[1])

Hie eruolget Algebras seine funffte spetien der jrrationalischen zaln, welcher text laut zum teutschen also:

Aller radicum duplatio, triplatio oder quadruplatio ist gleich der vorgelegten zaln quadruplatio, nonucuplatio oder sedecuplatio, also das allewege die zalen werden genent in potentia,

1) Hier werden die Regeln entwickelt:

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n a};$$

Beispiele nur für $b = 2, 3, 4$ und $n = 2$ und 3. Schon in dem vorigen Kapitel war dieselbe Regel in allgemeinerer Fassung angegeben.

von welchen geduplicirt sollen werden radices der zaln vor-
138′ geleget. Vnd radix also der duction gemes beweist die frage. |

Sam also, zu duplirn $\sqrt{3}$ von 36, so wissen wir, das radix quadrata von 36 ist 6, vnd zwir 6 ist 12. So sprechen wir, das 36 quadruplicirt ist 144, vnd $\sqrt{3}$ von 144 ist 12, vnd dergleichen in surdis. Wir wollen duplirn $\sqrt{c}$ 8, wir benennen die duplatio der duction gemes, wirdt 8, wann duplatio in cubicis ist octuplatio, do sie was jn dem quadrat quadruplatio, vnd also 8 mal 8 ist 64, vnd $\sqrt{c}$ von 64 ist 4, der geduplirt radix cubica von 8. So wir aber solten duplicirn $\sqrt{33}$ von 81, also musten wir nemen sedecuplatio, wann 2 dem vocabulo gemes gefurt ist 16. Nun ist 81 quadratum de quadrato vnd 16 quadratum de quadrato von 2. Wann also 16 mal 81 ist 1296, vnd $\sqrt{33}$ von 1296 ist 6, vnd das ist auch geduplicirt $\sqrt{33}$ von 81, der do was 3, vnd also dergleichen jn surdis. Wir wollen duplirn $\sqrt{3}$ von 12. Also sagt eer text: *ut semper nomine ductionis, qua versantur, vocentur.* Darumb ist die duction quadrata, darumb 2 auch geduplicirt wirdt quadruplatio. Also 2 mal 2 ist 4, vnd 4 mal 12 ist 48, vnd $\sqrt{3}$ 48 ist der geduplirte $\sqrt{3}$ von 12, vnd also in andern ductionibus. Defsgleichen in der triplicatio. Im quadrat so ist es nonecuplatio, wann, als wir sprechen, wir wolten triplicirn $\sqrt{3}$ von 4, also denominirn wir triplatio wird nonecuplatio.
139 Wann 3 mal 3 ist 9, vnd 4 mal 9 ist 36, vnd $\sqrt{3}$ 36 ist 6. | Also sagen wir, das 6 ist triplum radicis von 4, vnd desgleichen auch jn surdis. Als wir wollen triplirn $\sqrt{c}$ von 5, also multiplicirn wir 5 in 27, facit 135, vnd $\sqrt{c}$ von 135 ist die getriplicirte $\sqrt{c}$ von 5, vnd also ist es auch in quadratis de quadrato. Als wir setzen, ich will duplirn $\sqrt{33}$ von 7. Also quatratum de quadrato von 2 ist 16, das multiplicirn wir in 7, facit 112, dauon $\sqrt{33}$ ist die duplation, vnd also halt dich in den andern ductionibus. Solchs dich geometrice zu ostendiren, mogen wir sagen, das dir solchs genugsam jn der multiplication bericht ist worden, wann mit 2 geduplicirt ist mit 2 gemultiplicirt, vnd mit 3 getriplicirt ist mit 3 gemultiplicirt, als wir jn der figur haben gesatzt, das kf, das supplement (Fig. 27), das ist $\sqrt{3}$ |35, der medialis, welchs radix ist die superficies. So wir nun wollen in eine summa bringen die zwei supplementa kf vnd cg, vnd nachdem sie gleich sind, so duplirn wir $\sqrt{3}$ |35 dermassen, wir multiplicirn das mit 2, dermas die multiplication saget, wir multiplicirn nicht 35 an sich, sondern den radicem hierin, dieweil also $\sqrt{3}$ |35 potentia ist vnd superficialis, so mus
139′ gleich mit gleich multiplicirt werden. Wir machen 2 auch ad potentiam |

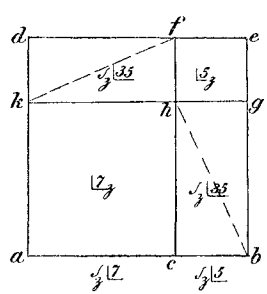


Fig. 27.

der furgelegten duction, khumbt 4. Also multiplicirn wir 35 mit 4, khomen 140, vnd $\sqrt{3}$ von 140 seind die supplementa, vnd hierumb ist diser numerus in potentia irrationalis. Sprechen wir, das geduplirt jm quadraten sey mit dem quaternario gequadruplicirt, vnd in cubo mit dem octonario geduplicirt, das ist die vorgelegt zal geoctuplicirt. Also das allewege der duplandus, triplandus, quadruplandus etc. an sich neme das vocabulum der vorgelegten zalen des radix, der do soll geduplicirt werden, getriplicirt oder gequadruplicirt werden, vnd also mugen wir sprechen gleichmessig jn der vngleichen benennungen. Also wir wollen duplirn $2\sqrt{c}$ von 5. Wir cubicirn 2, werden 8, vnd 5 mal 8 macht 40, vnd $\sqrt{c}$ von 40 seind $2\sqrt{c}$ von 5. Nun sollen wir 40 duplirn, so haben sie jre benenung vom cubic, darumb so wir $\sqrt{c}$ von 40 sollen mit 2 multiplicirn, vnd 2 vnbenent sein, hierumb benennen wir 2 a cubo, khumbt 8, vnd das multiplicirn wir jn 40, khumbt 320, vnd $\sqrt{c}$ von 320, das seind geduplicirt $2\sqrt{c}$ 5, vnd also dergleichen in andern vnglicher benennunge, die wir also von kurtz wegen abschneiden, vnd wollen sagen von der Mediation, das ist die opposita speties diser beschriebenen. Vnd also | haben wir genuglich aufsgedruckt, 140
souil vns der duplatio not ist zu den surden.

Capitulum nonum de mediatione radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Mediatio vero, vel tertiatio, sive quaternatio radicum numerorum propositorum est, quemadmodum numerorum propositorum per ductionis vocabulum divisio. Radix huius quotientis propositae ductionis quaesitum divulget.[1])

Hie eruolget Algebras seine letzte spetiem der irrationalischen zaln, welche do ist die mediation, ein anfang der diuision, als do duplatio ist der multiplication, wann die cleinste merung wirdt mit 2, vnd die cleinste thailung mit 2, vnd laut der text zum teutschen also:

Die Mediation oder tertiation oder quaternation der radicum furgelegter zaln, ist gleich als die vorgelegten zaln durch das vocabulum der duction gemes gethailt wirdt. Vnd radix des quotienten furgelegter duction eroffnet die frage.

Als wir clerlich wollen berichten, wir wollen medirn $\sqrt{3}$ 64, so wissen

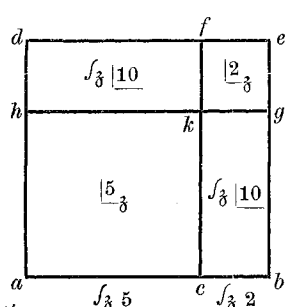
1) Die hier entwickelte Regel ist in moderner Bezeichnung

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}},$$

wieder für $b = 2, 3, 4$ und $n = 2$ und 3.

140′ wir, das vocabulum ist ſ̄ʒ, hierumb so mussen wir gleich ducirn 2, so wir | sprechen 2 mal 2 ist 4, also ſ̄ʒ 4 ist gleich in der duction 64. Hierumb thailen wir 64 in 4, khomen 16, vnd radix dauon, als 4, bericht die frage, vnd also ist es auch in der ternation, das wir allewegen similia similibus sollen opponirn. Als ich wolt tertioniren ſ̄ʒ von 7, so für der duction gemes die 3, wirdt 9, damit thail 7, facit $\frac{7}{9}$, vnd ſ̄ʒ bericht die frag, vnd defsgleichen jn andern ductionibus. Als wir setzten, wir wollen quarternirn ſ̄cℓ von 920. Wir nemen den principen, das ist den fursten der quaternation, ist 4, furen den der duction gemes, wird 64; damit thailen wir 920, steet $\frac{920}{64}$, vnd ſ̄cℓ ist die quaternation.

Vnd ob aber kheme einem jtzlichen, der do lesendt were, zweifel, das sich solchs nicht finden soltt etc, wollen wir in nachuolgendem capitel beweysen von jtzlichen speties besonder, wie man die radices der surden extrahirn solt, damitt ein jtzlicher vorstehen mag, was wir hervorgesagtt haben vnd durch alle speties demonstrirt. Also mogen wir auch wie vor pey dem text einfuren, so die benennung vngleich were. Als ich wollte medirn 3 ſ̄cℓ 5, so thun wir jme wie vormals. Wir reducirn die 3 radices
141 in einem radicem. Also | nachdem 3 kheine benente quantitet ist, so benennen wir sie der duction gemes, khumen 27, vnd multiplicirn 27 mit 5, khumen 135, seind 3 radices cubice von 5. Solche 135 thailen wir mit dem principi der mediation der duction gemes, seind 8, khumen $16\frac{7}{8}$, vnd radix cubica von disem beweist gemedirte 3 radices cubice von 5, vnd ist recht. Und alle natur, die die diuision hat, die hat auch die mediation, vnd doch auch mit vnterschid. Wann die diuision thailet numeros potentionales mit dem divisori ad longitudinem, wann der quotient allwegen ist das latus relativum des diuisoris, welcher, so er wider jn den quotienten gemultiplicirt wirdt, gebirt den vorigen numerum superficialem. Aber die mediation die halbirt die potentionalische zal vnd longitudines (Fig. 28), wann wir sprechen in die vorigen demonstrationes geometrice, das die zwei supplement *dk* vnd *cg* seind zusamen ſ̄ʒ |40, welche also in potentia seind. So sie wider gemedirt werden, khumbt wider ſ̄ʒ |10 wie vor, vnd pleibt in potentia, das ist in der division nicht. Also, wollen wir solchs wie vor jn der duplation demonstrirt haben, vnd also streckt sich die duplation vnd | Mediation ad potentiam vnd longitudinem, wiewol sich die diuision in numeris auch dahin zeuchett, das wir auch mugen longitudinem thailen, wir sind das aber hieher nicht gebrauchent, sondern wir nemen



141′ Fig. 28.

ein zal gewenlich vnd thailen die, das ist in potentia, vnd der divisor latus relatiuum des quotienten, vnd die multiplication nemen wir producirt aus zweien numeris linearibus, welche, so die mit einander werden gemultiplicirt, producirn einen superficien. Aber die duplation vnd mediation hat ALGEBRAS gesatzt, darumb das sie sich strecken, als wir sie hie gebrauchen ad utrumque, das ist ad numeros potentionales vnd longitudines. Aber die additiones vnd subtractiones haben wir demonstrirt, wann wir mogen addirn radices oder subtrahirn der potentz oder longitudinem. Als wir dann in binomiis sagen werdenn, vnd wollen also vnsere speties hie haben beschlossen, die wir alle sembtlich zu probirn durch die numeros mutuatos fürnemen werden, damit ein jtzlicher muge sprechen vnd erkennen, das der numerus surdus ad instans, das ist in den letzten quadranten oder scherpf nicht moge quadrirt werden, vnd solche demonstration wollen wir in den binomiis einfuren, vnd sagen, jn welcher weise er | vngequadrirt pleiben 142
mus, vnd warumb es vnmuglich ist, surdum zu quadrirn, wiewol etzliche vornemen den surdum zu quadrirn durch wege der fraction radicis, sagen wir vnd noch kunfftig demonstrirt wirdet, das dj nicht zu hertzen nemen, das vnser vorfarn so grosse muhe gehabt haben jn den Binomiis vnd andern surden, vnnd so es muglich were, es auch demonstrirt hetten. Sag ich commentator, wo das muglich were, das der diameter commensurabilis costae, vnd do gar vnbillich wurde gesprochen bey den philosophis aus, so werden wir sunderlich hernach setzen von den Binomiis.

Capitulum decimum de propinquitate radicum numerorum irrationalium exstirpandarum numero mutuato.

Radicum exstirpationem numerorum irrationalium penitus ab arte reliquit natura; ea vero propinquitate quadam, qua praediximus, numero mutuato rationali, quod cum discrimine demonstrare licet. Quoniam quidem in simplicem, quadratum vero eius in denominationem si ducatur quantitatem propinquitatem quaesitae radicis. Radix huius de tanto propinquius ostendit, de quanto maior numerus millenarius mutuabitur. Sic reliquarum ductionum proponitur notitia propinquitatis radicum. | [1]) 142'

1) Die Fassung des lateinischen Textes giebt die Anweisung, zunächst aus $\sqrt[n]{a}$ die neue Aufgabe $\frac{\sqrt[n]{ab^n}}{b}$ zu bilden, und aus der neuen Zahl die Wurzel, so weit es in Ganzen möglich ist, auszuziehen. Der deutsche Bearbeiter benutzt als solche Hilfszahl stets 1000 oder überhaupt eine Potenz von 10, so dass er also Decimalbrüche erhält. Er zeigt die Art der Benutzung an Beispielen, die er bei den einzelnen Rechnungsarten früher gefunden hat.

Hie eruolget ALGEBRAS die extraction der numerorum surdorum, vnd wie man hie radices soll extrahirn mit dem numero mutuato, das ist mit einer gelehenten zal, welcher text zum teutschen laut also:

Die extrahirung des radicis der irrationalischen zaln hat die kunst der natur gantz vorlassen, das ist vnmuglich zu finden, aber von dem wir gesagt haben zu demonstrin sollen mit einer nahenden weis mit einer entlehnten zal, welche so sie in jr gleich gefurt wirdt, das ist die vnbenenth jn die vnbenenthe, vnd der quadrat derselbigen jn die benenthe, von welcher zal also radix die nahent vnd propinquitet des gesuchten radix beweist. Also ist naher, souil grosser ist die entlehente zal genomen mit den limiten der millenaren, also wirdt gefunden die propinquitet des radicis der andern duction, die wir gesatzt haben.

Von solchem text einen schrifftlichen sin einzufuren durch alle speties, vnd wie wir den text vorstehen sollen, gibt der text anzeigung der andern duction, das ist der quadratischen, vnd desgleichen jn andern, vnnd kurtzlich zu treffen zu der materien, heben wir an, als in andern Capiteln ge-
143 satzt ist. |

Additio radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine.

Wir addirn $\sqrt{3}$ 8 zu $\sqrt{3}$ 18, soll machen geaddirt $\sqrt{3}$ 50. Das mochte einer dubitirn oder zweifeln, so wollen wir mutuiren millenarium, das ist 1000, wollen den nach dem text quadrirn, wirdt 1000000. So wir nun haben zwo benente quantiteten $\sqrt{3}\,8 + \sqrt{3}\,18$, so multiplicirn wir der jtzlichen eine in das quadratum, das ist in 1000000, khomen mit 8 jn numeris 8000000, vnd von solchen sollen wir extrahirn radicem ad propinquum, facit 2828 millesimas. Also so wir eine grossere zal hetten mutuirt, so were das residuum, so vber ist bliben, noch subtiliter resoluirt, vnd also fort, vnd dennoch khombt es nicht ad verum quadratum. Wir multiplicirn desgleichen 18 jn die zal, extrahirn, khomen 4242, die addirn wir zu 2828, wird 7070, vnd die zwey residua mogen vielleicht vnam millesimam machen. Wir extrahirn $\sqrt{3}$ 50, multiplicirn auch in die zal 1000000, extrahirn, soll radix bringen 7070 oder auf das negst 7071, dann ytzlicher extraction ist blieben ein gros Residuum. Wir mogen den radix noch subtiliter suchen, so wir den Millenarium noch grosser mutuiren, zugleich jn cubicis vnd andern ductionibus, doch khomen wir nimer ad ultimum quadratum oder scherpf.[1])

1) Verfasser hat früher gefunden $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$. Um das zu prüfen sucht er, mit Hilfe der Zahl 1000, $\sqrt{8} = \frac{2828}{1000}$ und $\sqrt{18} = \frac{4242}{1000}$ nebst jedesmal

Additio radicum numerorum irrationalium incommensurabilium longitudine. | 143'

Wir haben gesatzt jn vnserm dritten Capittel der incommensurabilium, das $\int_{\mathfrak{z}} 5 + \int_{\mathfrak{z}} 3$ geaddirt seindt $\int$cs $\underline{|8 + \int 60}_{\mathfrak{z}}$.[1]) Das wollen wir durch mutuatum probirn. Wir suchen, was do seind vor $\int_{\mathfrak{z}} 5$ vnd $\int_{\mathfrak{z}} 3$, multiplicirn ytzliches jn 1000000, wie vor, vnd extrahirn, finden wir jn millesimis vor $\int_{\mathfrak{z}} 5$ 2236 vnd residuum $\underline{|304}$, das schreiben wir ad proprinquitatem also, wir duplicirn radicem, wird 4412, addirn vnitatem, wird 4473, das setzen wir vor den nenner. Also sprechen wir, der negste radix von 5 sei in millesimis $2236\frac{304}{4473}$. Zugleich den andern von 3, khomen $1732\frac{176}{3465}$. Solchs addirn wir ad propinquum jn den millesimen, khumen 3968, vnd so wir die fractionen solen zusamenbringen, thun sie kheinen gantzen Millesimam. Nun haben wir 8, ein vnbenenthe quantitet, darumb multiplicirn wir, als der text sagt, 8 darein jn den mutuatum simplicem, werden 8000, vnd in 60 multiplicirn wir quadratum, wann sie benant ist, vnd suchen radicem in gleicher form wie vor, khumbt 7745 vnd residuum 14975. vnd steet also $7745\frac{14975}{15491}$ zusamen facit 15745, vnd die fract macht beileuffig einen Millesimam vnd doch nicht gar. Nun saget der erste quadrat $\int$cs, darumb multiplicirn wir 15746 in den mutuatum 1000 vnd extrahirn radicem, khumbt | 3968, die obgemelten Millesimen, vnd ist rechtt. Warumb wir 144
aber 15746 jn 1000 multiplicirn, dann dj millesimi seind nicht benent sondern allein von der gantzen quantitet. Vnd also mogen wir die andern ductiones auch probirn.

Subtractio radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine.[2])

Wir haben gesatzt in der subtraction, das do restat $\int_{\mathfrak{zz}} 32$, so ich subtrahire $\int_{\mathfrak{zz}} 5$ von $\int_{\mathfrak{zz}} 405$, so sehen wir an zum ersten die duction. Wir

einem Bruchtheil eines Tausendstel. Beides addiert giebt also nahezu $\frac{7071}{1000}$. $\sqrt{50}$ ist aber ebenfalls nahezu 7,071, also die Rechnung richtig ausgeführt. Noch genauer würde man die Wurzeln finden, wenn man eine noch höhere Potenz von 10 genommen hätte, ohne aber jemals zum vollen Werthe derselben zu gelangen.

1) Das Beispiel $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{8 + \sqrt{60}}$ findet er so als richtig. $\sqrt{5}$ ist in obiger Weise gesucht $= 2236\frac{304}{4473}$ Tausendstel, wo der Bruch nach der Formel $\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2n + 1}$ gefunden ist. Ebenso ist $\sqrt{3} = 1732\frac{176}{3465}$ Tausendstel, das ist mit $\sqrt{5}$ zusammen gleich 3968 Tausendstel, wobei die Bruchtheile noch kein ganzes Tausendstel ergeben. Ferner ist $\sqrt{60} = 7745\frac{14975}{15491}$ Tausendstel, dazu 8 Ganze = 8000 Tausendstel, giebt 15745, oder des Bruches halber nahezu 15746 Tausendstel. Daraus die Wurzel, nachdem nochmals mit 1000 vervielfacht ist, giebt wie oben 3,968.

2) Hier verzichten wir, ebenso wie in den folgenden Beispielen, auf eine Wiedergabe in moderner Bezeichnung.

nemen quadratum de quadrato von 1000, facit 1000000000000, vnd in solche quantitet multiplicirn wir 5, extrahirn radicem, khumbt nach der duction gesatzt von dem ȝȝ 1499 millesimae. Wir multiplicirn auch 405 in die zal, extrahirn, khumen 4486. Von dem zihen wir ab 1499, bleiben 2987. Souil sollen auch khomen von ſȝȝ 32. So thun wir, wie gemelt, khumbt auch 2987, ist rechtt. Desgleichen operirn wir von den numeris, die do seind incommensurabiles longitudine.

Subtractio radicum numerorum incommensurabilum longitudine.

Als wir gesatzt haben jn der subtraction, so wir subtrahirn ſȝ 5 von ſȝ 12, restat ſcs $\underline{|17 - \sqrt{240}_{ȝ}}$, also thun wir wie vor, vnd multiplicirn jn
144' quadratum 1000, | das ist in 1000000, den ſȝ 5, werden 5000000, vnd ſȝ von dem ist $2236\frac{304}{4473}$ millesime; vnd gleicherweis suchen wir von 12, khomen in den mutuaten $3464\frac{704}{6929}$ millesime vff das negste. Wir subtrahirn von einander, pleiben 1228, die Bruche lassen wir faren, dann sie bringen khein jrrunge, angesehen, je grosser man den numerum mutuirt, je grosser der residuum wird, vnd weniger an seiner bedeutung ist. Vnd also khomen vom quadrat in potentia auch souil ſcs $\underline{|17 - \sqrt{240}_{ȝ}}$. So nun 17 ist vnbenennt, das multiplicrn wir jn 1000, khomen 17000. Nun suchen wir ſȝ von 240. Also nach dem sie ist benent, so multiplicirn wir sie in das quadrat 1000000, khumbt 240000000, vnd ſȝ ist $15491\frac{28919}{30983}$. Das subtrahirn wir von 17000, als die negation des surden quadrat weist, bleiben 1509, die Bruch lassen wir stehen, als du vormals gehort hast. Sagt der quadrat ſcs, also multiplicirn wir 1509 millesime, nachdem sie vnbenent sein, allein was sie von der gantzen quantitet sein, jn 1000, khumbt 1509000, vnd radix von dem khumbt 1228, vnd ist rechtt. Also mogen wir sprechen, das gemelter quadrat surd in seiner potentz der war restat ist. Vnd dergleichen magstu nemen experientiam jn andern ductionibus durch numerum
145 mutuatum. |

Multiplicatio radicum numerorum tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Wir haben gesatzt in der multiplication zu multiplicirn ſȝ 5 mit ſȝ 7, vnd solte bringen ſȝ 35. Das probirn wir, bringen 5 ad numerum mutuatum, khomen $2236\frac{304}{4473}$, defsgleich 7, khumbt jn millesimis $2645\frac{3975}{5291}$, vnd solche millesime multiplicirn wir mit einander, facit mit den Bruchen gemultiplicirt vnd wider gantz aufgehoben, als man in den Bruchen multiplicirt, 5916097, das Residuum lassen wir faren, vnd so wir mit 1000 aufheben, khomen 5916, das residuum lassen wir faren. Vnd so wir ſȝ von 35 extrahirn,

finden wir auch souil, vnd desgleichen magstu jn andern ductionibus alle surden radicen probirn, die wir weiter zu extrahirn jn der multiplication vormeiden von kurtz wegen, vnd wollen sagen von der division.

Divisio radicum numerorum irrationalium tam communicantium, quam incommensurabilium longitudine.

So wir thailen $\sqrt{3}$ 136 mit $\sqrt{3}$ 4, khumbt jm quotienten $\sqrt{3}$ 34, das sollen wir auch ad propinquitatem ostendirn. Wir suchen $\sqrt{3}$ 136, inmassen vormals gethan, khumbt $11661\frac{21079}{23323}$; | wir suchen $\sqrt{3}$ von 4, ist 2000; Wir 145′
multiplicirn 11661 in den radicem 1000, khumbt 11661000, vnd so wir das dividirn durch 2000, khomen 5830; das residuum lassen wir faren, vnd souil soll khumen, so wir extrahirn von 34 radicem, vnd khumbt gleich 5830, das residuum lassen wir bleiben, vnd also magstu propinquitatem noch neher finden, so du einen grossen numerum nimbst vnd den mutuirst. Vnd wie du dich also jm quadrat hellst, also magstu gleichmessig in andern ductionibus thun.

Duplatio radicum numerorum tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Also mogen wir sagen, das wir gesatzt haben zu duplirn $\sqrt{3}$ 12, vnd seind khomen $\sqrt{3}$ 48. Das sollen wir demonstriren durch numerum mutuatum. Haben wir vormals zu vorstehen geben, das do duplatio sich gleichmessig heltt in den multiplicationibus. Wir suchen $\sqrt{3}$ 12 aus gemeltem mutuato 1000, vnd multiplicirn 12 in seine quadraten, darumb sie eine benente quantitet ist, khumen pro radice $3464\frac{704}{6929}$; vnd so wir solche millesime duplirn, khomen 6928, vnnd souil khomen auch von $\sqrt{3}$ 48, vnd ist recht. Wir mogen solchs auch nach der multiplication vorfurn. Also wir wollen multiplicirn $\sqrt{}$ 12 mit 2. Also denominirn wir 2, wirdt 4, vnd 146
multiplicirn $\sqrt{3}$ 4 mit $\sqrt{3}$ 12, khumbt | $\sqrt{3}$ 48. Wir suchen auch $\sqrt{3}$ 4 durch das mutuatum, finden 2000, das multiplicirn wir in die millesime von 12, werden 6928000, vnd solches dividirn wir mit 1000, facit 6928, khumbt wie vor, vnd ist recht.

Mediatio radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Wir haben anfengklich vormeldung gethun von der Mediation der surden vnd gesatzt zu tertionirn $\sqrt{3}$ von 7. Wir suchen $\sqrt{3}$ von 7 durch numerum mutuatum, das ist 1000000, khumbt $\sqrt{3}$ 7 in millesimis $2645\frac{3975}{5291}$ vnd $\frac{1}{3}$ von den millesimen ist $881\frac{2}{3}$ ad propinquum, vnd souil soll auch machen $\sqrt{3}\ \frac{7}{9}$, als wir im Anfang gesatzt haben. Wann 7 ist 2645, das

multiplicirn wir in 1000, khumbt 2645000, vnd thailen das mit ſ̃ 9 in millesimis, der do seind 3000, vnd khumbt wie oben $881\frac{2}{3}$, vnd desgleichen in andern ductionibus, mogen wir vns halten nach dem form der oben vermelten diuision; wann die mediation ist ein thailunge durch den minsten diuisor, als do ist duplatio eine multiplication durch den cleinsten multiplicatorem, vnd also wollen wir haben jnserirt um vorgesatzte speties vnd
146′ wollen also weiter melden von der extrahirung. Solln wir mercken drey namhafftige | stuckh. Zum ersten, wie man per numerum mutuatum khan erkhennen, welche zal irrationalis sey oder nichtt; zum andern wollen wir sagen, wie man vff das subtilest ein yede fract schreiben soll der residua so in den zaln vberpleiben der duction; vnd zum letzten wollen wir geben Anzaigung, jn welcher gestalt vnser vorfarn vnd maiores jn manigfaltige wege gebraucht haben die propinquitet der surden vnd numerum mutuatum, als sonderlich, so wir gebrauchen der Astronomie der sinuum vnd andern tabellen, als wir im andern tractat sagen werden, der Areen, das ist von den Commensuren (Continentzen) der Zirckel vnd ander superficien. Vnd zum ersten, wie wir sollen erkhennen durch den mutuatum numerum, ob ein zal rationalisch sey, wollen wir setzen ein mercklich beyspil.

Primus punctus annexus.[1]) Ich hab gefunden in einer furgab, das do ist valor cosse ſ̃ von 121. Wolte ich gern wissen, was do radix were, vnd ob er kheinen rationalen hette, das man nichts dester weniger mochte wissen, was ſ̃ von 121 were an schilling in goldt, das do eine gemeine rechnung ist in allen andern; vnd ob er schon radicem hett, das wir dann noch nichts desterweniger in der operatien abgienge. Also multiplicirn wir wie vor in quadratum von 20, machen 400; das mit 121 gemultiplicirt
147 facit | 48400. Also extrahirn wir radicem, finden wir 220, vnd gehet auf. Also sprechen wir, das sie hat einen rationalen radicem ex secunda parte secundae noni geometriae sagende, so ein quadrat ein zal multiplicirt, welche also vffgehet, so mus also dieselbige Zal sein gewesen ein quadrat. So wir suchen den radicem finden wir 220 schilling in goldt, vnd darumb ist es aufgangen, sagen wir, nachdem 20 ist gewesen der mutuant, also heben wir auf 220 schilling in goldt durch die mutuanten, khomen 11. Sagen wir, das ſ̃ von 2121 ist 11; vnd also magstu uff yede operation operirn, als in cubicen, quadraten de quadratis vnd andern ductionibus.

---

1) Hier sagt der Verfasser, man solle eine Zahl, von der man nicht weiss, ob sie ein Quadrat ist, mit einem Quadrate multiplicieren, dann aus dem Produkte die Wurzel ziehen, geht dann die Wurzel auf, so ist auch die ursprünglich gegebene Zahl ein Quadrat gewesen, nach Euklides IX, 2: *Si vero ex ductu tetragoni in numerum aliquem tetragonus producatur, illum numerum aliquem esse tetragonum.*

Secundus punctus annexus.[1]) Zum andern wollen wir einpilden, wie man aus rechtem grunde die negste propinquitet schreiben soll der surden fraction. Wollen solchs erstlich in quadrato erclern. Sam also, wir extrahirn durch den mutuatum numerum 1000, finden wir in den millesimen ſ̃ von 3 1732, vnd das residuum ist 176. Also duplirn wir 1732 vnd addirn vnitatem, wirdt 3465, das schreiben wir vor den nenner also $1732\frac{176}{3465}$. Vnd ist die vrsache, nachdem alle zalen zwischen allen quadraten surden sind, vnd alle quadrat distiren durch die impares, die wir nennen gnomones, also sagen wir, das zwischen dem quadrat von 1732, der do ist 299824, vnd dem quadrat | von 1733, der einer vnitet mehr ist, darin das vber- 147'
pleibende residuum participirt 3003289. So wir sie von einander ziehen, pleiben 3465, der vorgemeldet nenner, jn welcher distantz die fract auf das negste proportionirt. Wann, so jme der zeler gleich were dem nenner, so erreicht es den negsten quadrat einer vnitet mehr, vnd also ist es allwegen, der radix geduplirt vnd einer vnitet mehr die distantz des negsten quadraten, wann der quadrat wechst mit zweien supplementen, die do seind der geduplirte radix erstlich, vnd mit dem gnomone, welche also circumscriptibilia thun ein imparem, wann alle zal geduplirt gerad oder vngerad mit zugebung der vnitet erwechst vngerade. Haben also genugsam vom quadraten gesagt, vnd defsgleichen in andern ductionibus. So khunen wir die fract nicht neher schreyben, dann durch die distantz der negsten zweien potentionalischen zaln vorgelegter duction werde gesatzt vor den nenner des Residui. Doch haben wir erkhennen geben vom cubic, als wir wolten suchen den nechsten ſc̃ℓ in mutuato 1000 von 2. Wir cubicirn 1000, khomen 1000000000, darin furen wir 2 vnd extrahirn, finden wir nach der propinquitet pro radix 1259. Nun fragen wir, wie wir sollen signiren die denomination des residui. Wir cubicirn 1259, | vnd was khumbt, be- 148

1) Die hier gegebene Anweisung, eine angenäherte Wurzel beliebigen Grades aus einer Zahl zu erhalten, kommt auf die Formel hinaus, welche H. Staigmüller in der Festschrift zu Cantor's siebzigstem Geburtstage bei Johannes Scheubel nachgewiesen hat, nämlich

$$\sqrt[n]{a^n + b} \sim a + \frac{b}{n_1 a^{n-1} + n_2 a^{n-2} + \cdots + n_{n-2} a + 1}.$$

Den Nenner nennt er die Distanz zwischen a^n und $(a+1)^n$, sie ist ja auch die Differenz beider. Für $n = 2$ ist so $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2n+1}$ die schon den alten Griechen bekannte Formel, für $n = 3$, $\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1}$, oder wie Verfasser es noch darstellt, $= a + \frac{b}{3a(a+1) + 1}$ u. s. w.

halten wir vnd lassen den radix einer vnitet mehr sein, in welcher das residuum participirt, das ist 1260. Cubicirn den auch, vnd nehmen eins vom andern, vnd was pleibt, soll vor die denomination geschrieben werden des Bruchs, vnd also in allen ductionibus. Oder addir vnitatem zu dem radici, das ist 1260, solchs multiplicir mit dem extrahirten 1259, was khumbt, triplicire, vnd dem triplat gieb aber vnitatem, so khumbt die obgemelte distantz auch der zweier negsten cubic.

Tertius punctus annexus,[1]) Zum dritten wollen wir sagen, wie vnsere vorfarn solche mutuirung gebraucht haben. Khurtzlich der halbe zirkhel wer 1000 gethailt, vnd haben funden ein sin durch cordam vnd arcum; denselbigen zu extrahirn von 2000000: die frage, wieuil gradus der sinus habe in gemelten diametro. Also exstrahirn wir den radix, finden wir 1414 millesime des gemelten sinus jn diametro gestreckt. Solche millesime heben wir auf durch den mutuanten 1000, khumbt 1, vnd ist 1 gradus, Rest 414. Das multiplicir in 60, khumen 24840, das thail auch mit dem mutuanten 1000, khumen 24 minuten, vnd pleiben 840; das multiplicir wider mit 60, khumen 50400, vnd das dividir aber mit dem Mutuanten 1000, khumen 50 secund, pleiben 400, Die multiplicir mit 60, khumen 24000, thaile mit
148′ dem Mutuanten, khumen 24 tertz, geht gleich auf. Also sagen wir, | das gemelte sinus in diametro hat 1 gradum, 24 minuta, 50 secunden vnd 24 tertz. Defsgleichen magstu suchen cordam et arcum per gradus in radicibus, vnd also magstu jn auch in die signa applicirn, das die erste vnitet ein gantz signum ist, die 404 resoluir mit 30, werden 12 gradus, restant 420, die resoluir in 60, vnd thaile allwegen mit dem mutuanten, khumen 25 minuten, pleiben 200, die resolvir mit 60, wie vor, khumen 12 secunden, vnd gehet auch auf; vnd so du solche resoluten reducirst in die secunden vnd thailest jrer gemeinsamen denomination, so khumbt der erste radix 1414 wider. Vnd also wollen wir beschliessen vnd gesagt haben, souil vns in der gebra geburlich ist gewesen von dem mutuirn.

---

1) Durch diesen dritten Anhang zeigt der Verfasser, weshalb man im Mittelalter jene merkwürdige Umwandlung der decimal in der vorher gezeigten Weise gefundenen Wurzel in Sexagesimalbrüche vornahm. Es war bei allen astronomischen Rechnungen, für die es ja nur Tafeln in Sexagesimaltheilung gab, nothwendig, die Resultate in derselben Form zu erhalten, wenn man solche Tafeln benutzen wollte. War also z. B. ein Sinus zu finden, der $= \sqrt{2000000}$ sein sollte für den Halbmesser gleich 1000, so fand man durch Wurzelausziehung zunächst dafür 1,414. Den Decimalbruch verwandelte man dann durch Multiplikation mit 60 und Division durch 1000 in Minuten, den bleibenden Minutenbruch in ähnlicher Weise in Sekunden u. s. f. Man erhält so $\sqrt{2} = 1$ Grad 24′50″24‴, und konnte nun in der ebenso berechneten Sinustafel den Bogen finden, der dem Sinus zugehörte.

Capitulum undecimum de numeris irrationalibus potentia de eorumque perquirendis radicibus.

Omnium ductionum irrationalium perquirendas radices longitudine descripsimus. Earumque vero, quarum potentiae irrationales sunt et medialis numeri participantes naturam, similiter, ut diximus, his digestis spetiebus numeri irrationalis expediuntur, solum interceptum est, quod ad radicem radicis devenitur ductionis propositae in longitudine. | [1]) 149

Nachdem ALGEBRAS declarirt hat die speties der numerorum irrationalium in longitudine, hie eruolget er sagende von den numeris irrationalibus, welche do seind potentia irrationales, vnd laut gemelter text zu vnserm teutschen also.

Aller duction radices zu finden jn der lenge, das ist in longitudine, haben wir anzeigung vnd beschreybung gegeben. Aber von den, welche potentz irrationalis ist, vnd die natur haben der numerorum medialium, als wir jnn ersten capitel gesagt haben, werden vns aufsgerichtt durch vorgemelte speties, allein das aufsgenomen, das man khumbt zu den radicibus der radicum der duction, welche dann furgegeben ist, jnmassen dann die natur des medials gelert ist.

Von disem text einzufuren, wollen wir dich berichtenn mit rationalischen Exempeln, vnd wollen sie also more irrationalium setzen, dabej abzunemen ist, wie es mit den surden soll gehalten werden, welche do khein mensur haben. Als wir setzen zu addirn zwen quadrat $\sqrt{\underline{4}}_{\mathfrak{z}}$ zu $\sqrt{\underline{9}}_{\mathfrak{z}}$. Wir wissen, das die potentz der gemelten quadrat more irrationalium gesatzt ist, der quadrat 5, vnd radix von 5 ist die longitudo. Also addirn wir durch vnsere vorgesatzte speties, finden wir, als der text sagt, $\sqrt{}_{\mathfrak{z}}$ 25, vnd ist in potentia $\sqrt{\underline{25}}_{\mathfrak{z}}$, vnd also radix radicis quadrati also figurirt $\sqrt{\underline{25}}_{\mathfrak{z}}$, vnd also steet in der longitudine, das ist $\sqrt{}_{\mathfrak{z}}$ 5, vnd desgleichen in andern | ductionen. Als ich will setzen in zwei proportionalische Cubic 149′
$\sqrt{\underline{18}}_{\mathfrak{cl}}$ vnd $\sqrt{\underline{27}}_{\mathfrak{cl}}$. Wir wissen, das 8 ist der Cubic in potentia von jn zweyen, vnd also, so wir die cubic addirn nach vnsern vorgesatzten speciebus more surdorum, khumen $\sqrt{}$cs $\underline{|35 + 54 + 36}_{\mathfrak{cl}}$ vnd $\sqrt{}\mathfrak{cl}$ von dem ist der cubic

1) Hier wird das früher Gesagte auf mediale Grössen ausgedehnt, also auf solche, die auch in der Potenz irrational sind, wie $\sqrt{\underline{5}}_{\mathfrak{z}}$ und $\sqrt{\underline{3}}_{\mathfrak{z}}$, sie geben natürlich als Resultat einer Addition $\sqrt{}$cs $\underline{|\sqrt{\underline{5}}_{\mathfrak{z}} + \sqrt{\underline{3}}_{\mathfrak{z}} + \sqrt{\underline{250}}_{\mathfrak{z}}}$, das ist in unserer Bezeichnung:

$$\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt[4]{250}}\,.$$

in potentia vnd also radix radicis cubica, der do ist $\sqrt{|35 + 54 + 36}_{cl}$, das ist $\sqrt{cl}$ 5, das ist additio, vnd desgleichen in andern ductionibus allein, das do khumbt $\sqrt{}$ der furgelegten duction der vorgesatzten spetien. Vnd solche zal participanten vnd haben die natur der zal medialis, dann als die zal medialis allwegen ist irrationalis vnd radix radicis desselbigen seind die supplementa, also seind die numeri potentionales surdi die quadraten aber cubi, welche der diameter thailet durch mittel entzwey, als vns cleret quarta secundi Geometrie. So wir aber wollen setzen den quadrat $\sqrt{|5}_{\delta}$ vnd den quadrat $\sqrt{|3}_{\delta}$ (Fig. 29), so wir sie nach den vorigen spetiebus addirn, khomen $\sqrt{cs}\,|8 + \sqrt{60}_{\delta}$, vnd radix von dem ist die potentz vnd $\sqrt{cs}$ das ist in longitudine. Vnd also haben dise numeri allein ein vnterschied, das sie durch radicem radicis khomen ad longitudinem, vnd solche zal

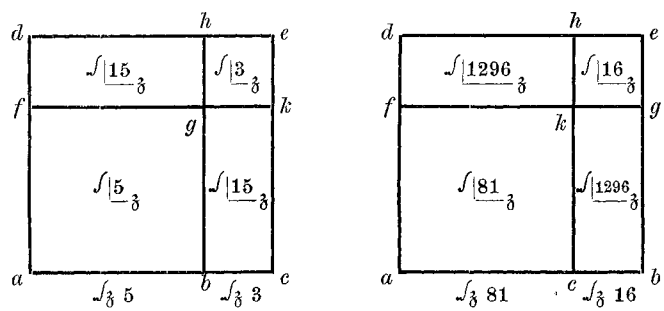


Fig. 29.

werden wir viel haben in den binomiis vnd den 13 zaln irrationaln, als
150 wir setzen werden mit sampt sonderlichen von dem numero | mediali. Vff das wir aber mogen khomen jn vorstandt der zaln, welche do potentia jrrationales seind, wollen wir setzen eine gemeine demonstration geometrie. Wir wollen addirn $\sqrt{}_{\delta}$ 5 zu $\sqrt{}_{\delta}$ 3. Also wir quadrirn $\sqrt{}_{\delta}$ von 5, khumbt $\sqrt{}_{\delta}$ 5, das ist der surd quadrat $\sqrt{|5}_{\delta}$; wir quadrirn $\sqrt{}_{\delta}$ von 3, khumbt $\sqrt{}_{\delta}$ 3, das ist der surd quadrat $\sqrt{|3}_{\delta}$. Solche zwen quadraten surd mit sampt den zweien medialen zusamen geaddirt radix gantzer quantitet als $\sqrt{cs}\,|\sqrt{}_{\delta}\,5 + \sqrt{}_{\delta}\,3 + \sqrt{|250}_{\delta}$, radix von diesem gantzen quadrat ist zusamen addirt $\sqrt{}_{\delta}$ 5 vnd $\sqrt{}_{\delta}$ 3, das ist in longitudine. So wir aber allein wollen addirn die zwei quadraten surden, als $\sqrt{|5}_{\delta}$ vnd $\sqrt{|3}_{\delta}$, sagen wir, jnmassen in vnsern vorgesetzten spetiebus, do wir sie genomen haben in longitudine, do waren sie zusamen $|8 + \sqrt{}_{\delta}\,60_{\delta}$. Also was vor jn longitudine ist genomen, das ist hier potentia, dann $\sqrt{}_{\delta}$ von 5 vnd $\sqrt{}_{\delta}$ von 3 zusamen geaddirt, sie sein potentionales oder in longitudine, so machen sie $|8 + \sqrt{}_{\delta}\,60_{\delta}$.

Wir nemen diese quantitet vor einen quadrat, so ist $\int\!\!\frac{z}{\delta}$ von solcher gantzen quantitet die longitudo also gefigurirt: so wir sie | aber nemen $\int$cs, den 150′
quadrat vom quadrat in potentia, so ist $\int$cs $\underline{|8 + \int 60}_{\delta}$ die longitudo, defsgleichen, so wir ansehen radicem von dem quadrat $\int$cs $\underline{|\int\!\!\frac{z}{\delta}\, 5 + \int\!\!\frac{z}{\delta}\, 3 + \int\!\!\frac{z}{\delta}\, 250}_{\delta}$ in potentia, so ist radix radicis der gantzen quantitet die longitudo. Vnd hierumb wollen wir mit dem text beschliessen, das der protentionalischen surdischen zalenn addirung vnd der longitudinen surden ist ein form, defsgleichen durch andere speties, Dann allein mit dem seind sie vnternomen vnd vnterschieden was vor radix radicis ist gewesen der potentz in longitudine das ist der radix radicis. Vnd solchs magstu auch durch numerum mutuatum probirn, als wir dich vnterricht haben. Vnd wollen also hiemit beschliessen das dritt Buch Gebre vnd Almuchabole, vnd seind furter sagen im vierdten Buch von den potentionaliteten der rationaln sampt den jrrationaln proportionaliteten vnd medieteten, welche also dienende zu den Binomien, von den wir jm funfften sagen werden.

Explicit tertius liber Algebrae. | 151

Librum quartum in alio volumine invenies. Siquidem quintum.

| *Liber quartus* Algebrae *Arabis de binomiis atque recisis, simul et omnium irrationalium numerorum, quorum sunt tredecim, et primo* Cod. Dresd. C. 405 Blatt 168

Capitulum primum de divisione eorundem in genere.[1])

Binomiorum disserere normas simul et recisorum una cum mediali et decem comitum praemissorum ducum praescripsimus, quorum omnium tredecim quantitates irrationales spetie differentes in genere continuarum ad numerum contrahuntur. Haec in ter geminas partes dogmate antiquorum et maiorum nostrorum distinguuntur.

---

1) Wie schon in der Einleitung gesagt ist, sollte dieses Fragment nicht als viertes, sondern als fünftes Buch bezeichnet sein, da nach dem Inhaltsverzeichnis des ganzen Werkes das vierte Buch von den Verhältnissen, Proportionen und Medieteten handeln sollte. Es ist sehr zu bedauern, dass der im Göttinger Manuskripte angezeigte zweite Band der Handschrift sich nicht ebenfalls gerettet hat. Das Fragment selbst giebt in etwas anderer Reihenfolge und abgekürzter Weise die Erklärungen Euklid's im X. Buche seiner Geometrie von den 6 Binomien und 6 Apotomen, während die Erklärung der dreizehnten Irrationale und die weitere Behandlung derselben verloren sind. Ich habe das Fragment mit aufgenommen, trotzdem die Erklärung des deutschen Bearbeiters fehlt, um wenigstens so weit als möglich über die Kenntnisse Rechenschaft zu geben, welche um die Mitte des XVI. Jahrhunderts in Deutschland in betreff der Arithmetik und Algebra bekannt waren.

Capitulum secundum de divisione bimembri in spetie binomorum et recisorum in sex normas.

Primo nosce distinguere geminas partes binomiorum et recisorum vel residuorum. Aut namque maius nomen tanto amplius minori portioni potest, quantum est quadratum communicantis, aut sibi incommensurabilis in longitudine. Hae ter sumptae distinxerunt normas sex binomiorum simul et
168′ recisorum eorundem. |

Capitulum tertium de sex normis binomiorum et recisorum seu residuorum secundum distinctionem tergeminam.

Tergeminae partes binomiorum et recisorum sunt: aut longior portio data rationali communicans et minor rationalis, sicque primum et quartum nominabitur; aut minus nomen rationali dato communicans et maius irrationale, sicque secundum et quintum vocabitur; aut neutri portionum eidem, sicque tertium et sextum appellabitur.

Capitulum quartum de modo inveniendi binomia et residua secundum sex differentias eorum.

Binomia atque recisa geminis partibus descriptis invenienda constant. Cum duobus numeris proportionalibus eorum primaeva fundamenta similibus proportione quatuor numerorum redigentur, et si primus amplius possit secundo quadrato aliquo communicanti maiori, aut incommensurabili in
169 longitudine, necesse est, quoque tertium | secundum illud esse posse quarto Palam itaque binomium atque recisum duobus numeris tantum potentia rationalibus constitui.

Capitulum quintum de radicibus inveniendis tam binomiorum quam residuorum secundum sex differentias.

Omnium binomiorum et recisorum radices investigemus, si maiorem portionem cuiuslibet in duas partes demetimur, quorum unius in alteram augmentum sit aequale quartae parti quadrati brevioris. Huius tunc radicem unius in alteram esse superficiem decem sequentium numeri medialis comitum distinguendam praemissorum ducum, quorum rationem geometricam subiecimus descriptam.

Capitulum sextum de duobus ducibus binomiorum et residuorum dicti binomium atque residuum absolutum.

Maiorem quidem portionem binomii primi atque sui residui si in duas partes, quemadmodum diximus, metimur, duoque hi numeri iuncti binomium

absolutum | atque idem residuum sub specie et differentia binomiorum con- 169′
stituunt. Ex hoc manifestum, binomium atque residuum absolutum duces geometrica ratione describendos subiecta esse necesse est.

Capitulum septimum de primis comitibus binomiorum et residuorum dicti binomiale primum et residuum mediale primum, deque eorum proprietatibus et demonstrationibus geometricis.

Secundi quidem atque sui residui sic eandem, ut diximus, binomii portionem permetimur, iunctique hi numeri bimedium primum et residuum mediale primum comitem componunt sub differentia bimembri prima binomiorum atque recisorum descripta. Mediales quidem sunt et rationalem unius in alterum duplum superficialem numerum continentes, quorum quadrata sunt mediale pariter accepta et potentia communicantia. | 170

Capitulum octavum de secundis comitibus binomiorum et recisorum dicti bimediale secundum et residuum mediale secundum, de eorumque proprietatibus et demonstrationibus geometricis.

Et tertii quidem eandem partitionem binomii maioris portionis discernimus, et bimedialem numerum secundum et residuum mediale secundum constituunt sub prima differentia bimembri binomiorum et recisorum inserta. Qui et mediale sunt et medialem superficiem continentes, quorum et quadrata mediale pariter accepta et potentia tantum, ut prius, communicantia.

Namensverzeichnis.

Aaron (der Bruder des Moses) 550, 552
Abenragel siehe *Hali*
Aesopus 461, 464
Alexander der Grosse 449, 457
Algebras, Initius Arabs, 435—609, 437, 438, 440, 442, 444, 445, 449, 450, 454 bis 457, 459, 461, 462, 464, 467—480, 485, 486, 488, 490—492, 494, 495, 497, 499, 500, 503, 505, 510, 512, 513, 516, 518, 519, 521, 523, 525, 528, 531, 533, 535, 537, 539, 541, 543, 545, 548, 550, 554, 558, 561, 563—565, 567, 571, 572, 574, 579, 581, 584, 587, 589, 591, 593, 595, 598, 605, 607
Algus 464
Aliabras Indus 447, 449, 468, 490, 512, 571—574
Aliprandi, Bonifaccio, 340
Aliprandi, Joseffo 340
Die *Alten* 563, 564
Anitius = Boetius 440
Anna (Kurfürstin von Sachsen) 439
An-Nairîzî 443
Antonio da Monte Olmi III
Apollonius 466, 467
Apuleius 449
Araber 447, 467, 470, 545, 562—565, 567—569
Archidiaconus Parmensis III
Archimedes 430—433, 449
Arisius, Franciscus, 340
Aristaeus 466, 467
Aristoteles 450, 454, 455, 457
August (Kurfürst von Sachsen) 439
Avicenna 470
Avogario, Pietro Buono, III

Bachet de Méziriac 447, 574
Bianchini, Giovanni, III
Blasius 341
Boetius 440, 466, 467
Boncompagni, Baldassarre, III, 339—341
Brechtel, Stephan, 439
Buono, Pietro, siehe *Avogario*

Cantor, Moritz, 439, 445, 461, 603
Cardano, Geronimo, 445, 490, 540
Cardinalis Sti Petri siehe *Cusa,* Nicolaus de
Cavitelli 341
Chinesen 447
Christus 447
Cotta, Lazaro Agostino, 340
Crelle, A. L., 554
Cusa, Nicolaus de, III

Diogenes Laertius 442, 450
Diophantus 447
Doppelmair, Joh. Gabriel, III

Elias = Euklides 442, 443
Euklides 386—389, 394—397, 439, 442, 443, 447, 449, 453—460, 462, 465, 523, 550, 566, 576, 585, 586, 602, 607
Euklides von Megara 442, 449, 450

Favaro, Antonio, 340
Florentinus, Paulus, siehe *Toscanelli*
Fridericus, Frater, 447, 554

Galenus 458, 459, 470
Gauss, Carl Friedr., 447, 553
Germanus, Johannes, siehe *Regiomontan*

Hali Abenragel 461
Halle, J., 339
Heron von Alexandria 386
Hippokrates 458, 459, 470

Jacob (der Patriarch) 546, 547, 559, 560
Inder 441, 449, 456, 458, 468, 545
Johannes Germanus siehe *Regiomontan*
Johannes de Lineriis 464
Johannes de Sacrobosco siehe *Sacrobosco*
Jordanus Nemorarius 386, 438

Laertius siehe *Diogenes Laertius*
Lamenus (der Arithmetist) 451, 457

Leonardo Cremonese 337—417, 339—343, 397, 402, 416, 417, 419
Leonardo Pisano 447, 554
Levi ben Gerson 438
Lineriis, Johannes de, siehe *Johannes*
Loria, Gino 362
Lowitz, Georg Manitius. 432

Mainardi, Leonardo, siehe *Leonardo Cremonese*
Maria (die Jungfrau) 340
Matthiessen, L., 554
Mechanici 386, 387
Montius, Paulus, 340
Morbio, Carlo, 340
Moses (der Prophet) 550
Muhamed (der Prophet) 441, 449
Muhamed ben Mûsa Alchwarîzmî 441, 449

Narducci, Enrico, 339
Nektanebus 449
Nemorarius, Jordanus, siehe *Jordanus*
Nikomachus 466, 467

Paulus Florentinus siehe *Toscanelli*
Pazzoni, Alberto, 340
Petrus Bonus siehe *Avogario*
Platon 442, 450, 454, 455. 457
Ptolemaeus, Claudius, 430, 431
Pythagoras 450, 451, 454, 457

Ratdolt, Erhardus, 453
Regiomontan, Johannes, III, 447, 527, 554
Riccardi, Pietro, III

Sacrobosco, Johannes de, 464
Salomon (der König) 461
Scheubel, Johann, 448, 603
Sitonis, Johannes de, 340
Staigmüller, H., 448, 603
Sun-Tsze 553, 554

Toscanelli, Paolo dal Pozzo, III

Vida, Hieronymus, 341
Vigenzo, Zuan, 339, 417

Yih-Hing 553, 554
Yles Geometra 435—609, 437, 438, 441 bis 444, 449, 450, 452, 453, 455 bis 457, 459, 462, 465, 467, 468, 482, 486, 490, 499, 545, 562—566, 568, 570, 571
Yles = Euklides 443
Ylici 562—566

Zapff, G. W., 339
Zitheus (der Sänger) 441
Zuterich (der Koch) 464

Sachregister
über Heft XII und XIII der Abhandlungen.

(Die Zahlen bis 336 beziehen sich auf Heft XII dieser „Abhandlungen", die spätern auf das vorliegende XIII. Heft.)

A

Absolute Zahl 468
Absehen (tavolete oder busi) 344—347, 358, 359, 370, 371. Siehe auch *Diopter*
Abstand zweier zu messenden Gegenstände 346—349, 352, 353, 358, 359, 364—369, 374—377; des in- und umgeschriebenen Kreises eines Dreiecks 332; des Mittelpunktes eines gleichseitigen Dreiecks von einer Ecke 418, 419
Accervatio = Addition 500
Acht Gleichungsformen 445
Achte Sphäre 264, 304
Addition 500; *allgemeiner Grössen* 500—502, Beispiele 501, 502, Probe 502; *allgemeiner Brüche* 513—515, Beispiele 513, 514; Probe 513, 514; *von Dreiecken* 350, 351; *von Wurzelgrössen* 578—584, 594, 599, Beispiele 579, 580, 582—584, 598, 599, geometrische Begründung 580, 582—584
Aehnlichkeit der Dreiecke erklärt 24, 25
Aequatio prima Algebrae 484—486, allgemeine Lösung 485, Beispiele 485, 486; *secunda* 486—488, allgemeine Lösung 487, Beispiele 487, 488; *tertia* 488—490, allgemeine Lösung 489, Beispiele 489, 490; *quarta* 490—492, allgemeine Lösung 491, Beispiele 491, 492; *quinta* 492, 493, 522, allgemeine Lösung 492, Beispiele 493, 522; *sexta* 494, 495, allgemeine Lösung 494, Beispiele 494, 495, Missverständnis des Kommentators 495; *septima* 495—497, allgemeine Lösung 496, Beispiele 496, 497, 520, 521; *octava* 497—499, allgemeine Lösung 497, Beispiel 498, 499
Aequatio prima 454; *secunda* 456; *tertia* 458; *quarta* 460; *quinta* 463; *sexta* 465
Aequationes compositae = unreine Gleichungen 492, 497, 498
Aequationes simplices = reine Gleichungen 492, 497, 498
Aequator 212—214, 228, 260, 264, 267, 294, 295, 299, 308, 319
Aequinoktialkreis 193, 199, 295, 329
Aequinoktium 299
Affirmiren = mit dem Vorzeichen + versehen 504—506, 509
Affirmirte Zahlen = positive Zahlen 499
Affirmirung 480, 499, 500
Albumazar de coniunctionibus magnis 305
Aldebaran (der Stern) 265
Algebra (das Wort) bei Regiomontan 216, 236, 238, 253, 256, 335
Algebra aus dem Arabischen ins Griechische, aus dem Griechischen ins Lateinische und aus dem Arabischen ins Indische übersetzt 449
Algebras ein Mensch 437, 449
Algorismus = Rechnungsregel 475
Algorismus de additis et diminutis = Rechnung mit positiven und negativen Zahlen 499, 500
Algorismus de datis (Jordani) 428; *de fractis* 464; *de minutiis* (Joh. de Lineriis) 464
Alhaceni Perspectiva 258
Alhaioth (Stern) 265
Alhidade 346, 347, 350—355, 374—377. Siehe auch *Messlineal*
Aliabra und Alvoreth 449
Alinuaram = Rhombus, Erklärung 14, 15
Alkoran Muhameds 449
Almagest des Ptolemäus 236, 258, 265, 304, 306; von Regiomontan wahrscheinlich in der Uebersetzung Gerhards v. Cremona benutzt 194; er besass auch das griechische Original 194; Satz 12 aus lib. I von Regiomontan benutzt 194, 199, 243, 244, 255
Almanach 327
Almuchabola (= a — x) 453—456
Almuncharif = Trapez. Erklärung 14, 15
Altimetrie 342, 343
Angulus planus = ebener Winkel, Erklärung 12, 13; *acutus* = spitzer Winkel, Erklärung 12, 13; *obtusus* = stumpfer Winkel, Erklärung 12, 13; *rectus* = rechter Winkel, Erklärung 12, 13

Animodar (Astrologie) 330
Antonius de Monte Ulmi de iudiciis nativitatum 306.
Apollonii Conica 304
Aporismata = aequationes 540
Arabische Aerzte 470
Archimedes circuli dimensio 4; sendet dem Dositheus geometrische Aufgaben 293
Area = Flächeninhalt 30, 31, 602
Arisius, Cremona litterata excerpiert 340, 341
Aristoteles beweist vieles durch Mathematik 450
Arithmetik 438; des Boetius 16—19, 466; schlechte Arithmetik = niedere Arithmetik 477
Ars magna Cardans 445, 490, 540
Ars metrica practica 340
Ars rei et census 216
Ascendens 294, 295, 299, 302, 303, 309
Assimulation = Reduzierung einer gefundenen Gleichung auf eine der Normalformen 519—522, Beispiele 519—521, Probe 521
Astrolabium 342, 343, 346—353, 358, 359, 365—367, 370, 371, 374, 375
Astrologie 238, 240, 293—295, 300—302, 305—308, 324, 325, 330
Astrologische Häuser 294, 299, 302, 308
Astronomie 193—204, 207—209, 212—231, 235, 237—239, 241—245, 254—257, 259—278, 329—331, 602
Atazir (Astrologie) 295
Aufgaben aus der *Algebra* 209, 216, 219, 231—236, 238, 253, 254, 256, 259, 262, 278—280, 291, 295, 296, 300, 317—319, 332, 334; aus der *Astronomie* resp. sphärischen Trigonometrie 193—204, 207—209, 212—215, 219—231, 235, 237—240, 242—245, 254—257, 260, 261, 266—278, 280—283, 294, 295, 299—313, 316, 317, 319—323, 329—331; aus der *Distanzmessung* 298; aus der *Geometrie* 339, 341; aus der *Gesellschaftsrechnung* 219, 236, 253, 334; aus der *Goniometrie* 262, 263; über *Maxima* 333; aus der *Optik* 333, 335; aus der *Musik* 296, 334; aus der *Planimetrie* 219, 235, 238, 245—251, 257, 262, 283—291, 296, 331—333; über das *Quadrat* 34—41; über das *Rechteck* 42—49; über den *Rhombus* 48—51; aus der *Statik* und *Mechanik* 297, 298, 332—335; über *Trisection des Winkels* 238, 258, 291; aus der *Zinseszinsrechnung* 219, 236, 238, 256
Aufgangspunkt eines Sternes 196
Augment 469
Ausgabe der Briefsammlung Regiomontans durch v. Murr unzuverlässig 189
Aux (aufsteigender Knoten) der *Sonne* 264; eines *Sternes* 196.
Azimuth 195, 213

B

Berechnung des Winkels eines sphärischen Dreiecks aus den Seiten 220—224, 266—272
Bergmessung 366—369
Bessarion zum Legaten in Venedig ernannt 192; will Bianchini in Ferrara aufsuchen 192; giebt diese Absicht der Pest halber auf 193
Betthimmel (colmengo) 362
Beziehungen zwischen Savasorda und Leonardo von Pisa 6
Bianchini hat Regiomontan eine Aufgabe gestellt 192, 193; schreibt an Regiomontan aus Fossanova Sti Gillii 21. Nov. 1463 205—209; schlechte Orthographie und Schrift desselben 204; dankt für den Brief R.'s mit der Lösung der gestellten Aufgabe 205; bittet, ihn Bessarion zu empfehlen 205; hat die von R. gestellten Aufgaben genau durchgearbeitet 205, und zwar nach seinen Canones tabularum de primo mobili, die er R. bekannt glaubt 205; entschuldigt die Verzögerung der Antwort durch seine und der Seinigen Krankheit 205, 206; hat zur Beobachtung der Sterne ein Instrument erfunden 206; aus den beigelegten Rechnungen vermittelst seiner Tafeln werde R. die Vortheile derselben einsehen 206; giebt die Lösungen der von R. gestellten Aufgaben 206—208; bittet die schlechte Schrift zu entschuldigen, da er nie in eine Schule gegangen sei und alles sich selbst verdanke 208; giebt R. vier neue Aufgaben, zwei astronomische, zwei algebraische 209; er thue das, damit R. ihm wieder solche stelle; schreibt an Regiomontan aus Ferrara 5. Febr. 1464 235—242; giebt die Antworten auf die von R. gestellten Aufgaben 235—237; hält die erste für unlösbar, die zweite für falsch gestellt 235; bei der dritten, den Inhalt eines Kreisvierecks aus den Seiten zu finden, giebt er seinen Zweifel kund 236; ebenso bei der vierten, eine in eine Kugel eingeschriebene dreiseitige Pyramide betreffend 236; die fünfte hat er nicht verstanden 236; von der sechsten, einer Zinseszinsaufgabe, giebt er richtige Lösung 236; er hat in seinem liber florum Almagesti die Aufgabe ganz allgemein behandelt 236; die siebente Aufgabe versteht er nicht 237; von der achten,

einem Restproblem, giebt er die beiden kleinsten Lösungen, da er weitere nicht aufsuchen will 237; stellt darauf R. seinerseits acht Aufgaben, zwei astronomische, drei algebraische, eine Zinseszinsenaufgabe, eine Winkeldreitheilungs- und eine über Kreissegmente und Kreissektoren 237, 238; hat in der Jugend Algebra getrieben 238, ist aber vorzugsweise der Astrologie ergeben, zu deren Sicherheit und Rechnungsabkürzung er eigene Tafeln berechnet hat 238, 239; speciell Multiplikationstabellen für Sexagesimalzahlen 239; die zweite von ihm R. gestellte Aufgabe habe dieser falsch aufgefasst 239; zeigt, dass ausser der von R. benutzten figura sectoris noch eine grosse Zahl anderer sich finden lassen 240; bittet um Abschrift von R.'s libri de triangulis 240; setzt auseinander, weshalb er die zweite Aufgabe gestellt, und was sie zu bedeuten hat 240, 241; giebt seine Berechnung der fraglichen Deklination 241
Bibliothek des Kurfürst *August v. Sachsen* 439; des Fürsten *Boncompagni* 339; von *Dresden* 439—441; von *Erfurt* (Amploniana) 190, 335, 336; zu *Florenz* 5; zu *Göttingen* 339, 437; des Grafen *Isolani* zu Bologna 5; des *G. M. Lowitz* 438; des Cav. *Carlo Morbio* 340; zu *Nürnberg* 187, 188; des *G. W. Zapff* 339
Binomialkoeffizienten 446, 542
Binomien und Recisen Euklids 216, 233, 234, 439, 499, 500, 522, 607—609
Bissursolidum 476, 477, 479; Zeichen desselben 477; eines Binoms 537; Beispiel dazu 538, 539
Bleiloth 346—359, 370, 371, 374, 375
Boncompagni's Platone Tiburtino 6
Bogen eines Kreises durch den Sinus bestimmt 194, 201, 202, 204
v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie 211, 212, 220
Breite (geometr.) 342, 343
Breite (geographische) 195, 197, 207, 212, 238, 257, 260, 281, 294, 299, 303, 308, 331; von *Erfurt* 294, 299, 303, 330; von *Ferrara* 193, 196, 212, 224; von *Rom* 294, 330; von *Venedig* 195
Breite (eines Sternes) 193—196, 202, 205—207, 213, 214, 219, 220, 235, 237—242, 260, 262, 267, 281, 293, 294, 319, 330
Brief des Algebras an Yles 450—452
Briefwechsel Regiomontans 187—336; Abdruck bei von Murr unvollständig 198
Brüche 513—519
Bruchrechnung 513—519
Bruchstrich (virgula) 518
Brunnen 364, 365
Brunnendurchmesser 364—367
Brunnenöffnung 364—367
Brunnentiefe 364—367
Buch Alvoreth 449
Buch de la cosa 449
Buch der Coniecturation 449
Buch der data des Aliabras Indus 572—574
Buch von dem Dinge der unwissenden zal 449
Buch de divisionibus Euklids 8

C

Calcaneum = Würfel 162, 163
Capeci (Maass) 416, 417
Carasto (Schnellwaage) 297, 332
Casus = Höhenabschnitt 50, 51; *maior* und *minor* 58, 59; *punctus casus* = Fusspunkt der Höhe 50, 51
Cathetus = Loth, Erklärung 12, 13
Census 189, 216, 257, 280; Zeichen dafür bei Regiomontan 189, 232, 233, 278, 279, 318. Siehe auch *Zensus*
Census de censu 257, 280, 335
Centrum = Mittelpunkt, Erklärung 12, 13
Circuli dimensio Archimeds 236
Circulus = Kreis, Erklärung 12, 13
Communes omnium existimationes = Axiome 14—17
Concentrische Planetenbahnen 218
Conjecturationen 470, 476, 477, 488, 519, 520, 562, 571
Continuum 452—454, 456
Corda = Sehne, Erklärung 100, 101
Corda und arcus 604
Corpora 474, 476, 477
Corporeitas 476
Cosa (Coss) = Gleichungsunbekannte 449, 472, 498, 512. Siehe auch *Dingk, radix, res.*
Cossische Zeichen 445, 470, 471, 473—479; tabellarische Darstellung derselben 474; bis zum zensicubus de cubo *fortgesetzt* 508, dabei multiplikatives Prinzip 508
Cotangente 342, 343
Cubellus 528
Cubicensus = Zensicubus 479
Cubus (Algebraisch) 257, 280, 335, 473—475, 479; Zeichen dafür 475; Entstehung desselben 475; eines Binoms 528; cubus und zensus können dieselbe Wurzel besitzen 475
Cubus de censu (x^5) 257, 280
Cubus cubi (x^6) 257, 280
Cubus de Cubo (x^8) 476, 478, 479; Zeichen dafür 478; eines Binoms 541; Beispiel 541, 542
Cylinder, Erklärung 160, 161; Volumen 164, 165, 416, 417.

D

Decrement 489
Deklination der Sonne, grösste, nach *Regiomontan* 193, 195, 207, 210, 215, 220, 260, 261, 330; nach *Albategnius* 263; nach *Alberti* 264; nach *Bianchini* 224; nach *Peurbach* 263, 264; nach *Thebith* 263; nach *Toscanelli* 264
Deklination eines Sternes 193—195, 197—199, 207—209, 211, 213, 215, 220, 228, 239—241, 257, 260—262, 282, 283, 320
Delisches Problem 442
Denominatio = Nenner 513
Detractio (Abziehung) = Subtraktion 502, 503
Dezimalbrüche 598—604
Dezimalrechnung 239
Diametrum (!) = Diagonale 30, 31
Diametrum circuli = Kreisdurchmesser, Erklärung 12, 13
Diagonale des Quadrates, Berechnung aus der Seite 32—35; *des Rechtecks,* Berechnung aus den Seiten 42, 43
Diapente (Musik) 296
Differenz zwischen dem Kreise und dem umgeschriebenen Quadrat 388, 389; der *Schattenpunkte* 358, 359, 366—371
Dingk = res 449, 451, 452, 461, 468—471, 476, 485, 496, 523. Siehe auch *cosa, radix, res.*
Diophantische Anfgaben 1. Grades 189, 447, 571—573; 2. Grades, ob durch Probieren gelöst oder nach wirklicher Methode? 189, 190
Diophants Arithmetica von Regiomontan gefunden 256, 257; Ausgabe Bachets 447
Diopter 350, 351. Siehe auch *Absehen*
Directio (Astrologie) 294, 295
Disquisitiones arithmeticae von Gauss 447, 553
Distanzmessung 298
Division ganzer Funktionen nicht erlaubt 445, 510; *eigenthümliche mehrgliedriger Ausdrücke* 510—512; *allgemeiner Brüche* 445, 518, 519, Beispiele 518, Probe 519; *von Wurzelgrössen* 591—593, 601, Beispiele 592, 601; geometrische Veranschaulichung 593
Divisionsbeispiele bei Regiomontan 197, 200—204, 221—230, 268—277, 281—291, 310—316, 319, 323; abgekürzte durch den Sinus totus 202
Divisoren einer zusammengesetzten Zahl 545—547; zur Bestimmung derselben braucht man die Rechnung erst mit der Quadratwurzel zu beginnen 545, 546, 548
Dodekaeder 297, 332, 333, 392, 393
Doppelkegel, abgestumpfter, 172, 173
Dragma = Gleichungskonstante 463, 469—473, 485; Zeichen dafür 470, 473, 474; Apothekergewicht, kein Geldstück 470
Dragma in Gold 470; in Silber 470; in Pfenniggewicht 470
Dreieck (ebenes) 312, 333, 378, 379; *gleichschenkliges* 382, 383; *gleichseitiges* 382, 383, 418, 419, Bestimmung eines solchen, das zwei- oder dreimal so gross ist als die Summe seiner Seiten 428, 429; *rechtwinkliges* 380, 381, nur gleichschenklig oder ungleichseitig 68, 69; *spitzwinkliges* 380, 381; *stumpfwinkliges* 380, 381, kann nur gleichwinklig oder ungleichseitig sein 70, 71; *ungleichseitiges* 382, 383 (siehe auch *Triangolo ascalenon* und *Triangolo gradatum*); zu entscheiden, ob ein gegebenes Dreieck recht-, spitz- oder stumpfwinklig ist 72, 73
Dreieck (sphärisches) 196—204, 214, 220—231, 240, 243, 256; Inhalt eines solchen 332
Dreiecksformel der drei Brüder 7, 72—74, 386, 387; Beweis bei Leonardo von Pisa 74
Dreieckshöhe 380, 381
Dreiecksinhalt, allgemein 50—53, 380, 381; des *gleichseitigen* 56, 57, aus der Höhe allein 54, 55; des *gleichschenkligen* 66, 67; des *rechtwinkligen* 66, 67; des *rechtwinklig-gleichschenkligen* 68, 69; des *stumpfwinkligen* 70, 71
Durchmesser des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises zu finden 296

E

Ebene 370—373
Ebenenmessung 346, 347, 360, 361, 370, 371
Ecke einer Figur 378, 379
Ecke des Quadranten 352, 353, 370—373
Eintheilung des liber embadorum 10, 11
Ekliptik 193—195, 199, 210, 213, 219, 228, 235, 237, 238, 240, 242, 244, 254, 255, 257, 260, 261, 267, 272, 281, 283, 294, 295, 303, 309, 319, 329, 330
Ekliptikpol 199, 213, 214, 228, 243, 244, 254, 255, 273, 299, 320
Ellipse, Inhalt der, 108, 109
Embadum = Flächeninhalt 108, 109
Entfernung zweier irdischer Gegenstände verschwindend gegen die Entfernung der Sonne 356, 357
Ephemeriden der Planeten 327
Epitome in Cl. Ptolemaei magnam compositionem Regiomontans 213
equicris für gleichseitig 382, 383
Erdschatten bei Mondfinsternissen 261, 269
Erfurt, geographischer Länge und Breite 294, 299, 303, 330

Errores = doppelter falscher Ansatz 467, 562, 568. Siehe auch *falscher Ansatz, Itata, Regula falsi, Regula lancis*
Euklides nicht Eigenname, sondern Titel des Werkes 442; Schüler des Yles 449, 450, 456; mit Euklides von Megara verwechselt 442, 450
Euklidausgabe Ratdolt-Campano 259, 453, 456—459, 462, 465, 566, 586, 602

F

Faden des Quadranten, an dem das Bleiloth hängt, 346, 347
Falscher Ansatz, doppelter, 447, 545, 562, 567—571; kann nur zur Lösung von Aufgaben benutzt werden, welche auf Gleichungen 1. Grades führen 562—564, 571. Siehe auch *Errores, Itata, Regula falsi, Regula lancis*
Falscher Ansatz, einfacher, 447, 545, 562, 563; kann nur zur Lösung solcher Aufgaben dienen, die auf Gleichungen 1. Grades führen 562, 563, 565—567
Fass 392, 393, 406—411; Konstruktion eines solchen einem gegebenen nach bekanntem Verhältnis ähnlich 410, 411
Feldertheilung 130—159
Ferrara 191, 193, 209, 212, 224, 242, 280; geographische Breite 193, 224; geographische Länge 193, 296; dort herrscht die Pest 192
Figura = Figur, Erklärung 12, 13; *caput abscissa* = Paralleltrapez 76—95; *aeque caput abscissa* 76—81; *caput diversa* 82—87; *abscissa declinans* 90—95; *semicaput abscissa* 88, 89; *multilatera* = Vieleck, Erklärung 12, 13; *parte altera longior* = Rechteck, Erklärung 14, 15; *quadrangula* = Viereck, Erklärung 12, 13; *triangula* = Dreieck, Erklärung 12, 13
Figur, geradlinige 378, 379; reguläre 386, 387
Figura sectoris 193, 197, 199, 202, 203, 207, 212, 215, 229, 239, 240, 242—247, 255, 256, 303, 310
Finsternisse 239, 264, 265
Fische (Sternbild) 207, 208, 308, 309, 330
Fläche 342, 343, 378, 379; geradlinige 378, 379; gleichförmige 378, 379; krummlinige 378, 379; ungleichförmige 378, 379
Flächendiagonale eines Körpers, Erklärung 162, 163; des Würfels 162, 163, 412, 413
Flächenelle, Erklärung 26, 27; sie ist *Flächeneinheit* 26, 27
Flächenmass, Erklärung 26, 27
Flächenmessung 378, 379
Flächenstücke, schrägliegende oder vertiefte sind bei Messungen auf die Horizontalebene zu reduzieren 122—125
Flussbreite 374—377
Foliierung der Blätter des Briefwechsels durch Regiomontan selbst bewirkt 206, 207
Fossanova Sti Gillii 209, 212, 224
Fragende radix = gesuchte Gleichungswurzel 494
Fünfeck 118, 119, 378, 379; Inhalt 120—123
Fünfte Wurzel 533—535; Beispiel 533, 534; arithmetischer Beweis 534, 535
Fusspunkt 354, 355; des Bleilothes 358, 359; der Dreieckshöhe 418, 419

G

Ganzer Ton (Musik) 296, 334
Ganze Zahl 545
Ganzzahlige Auflösung unbestimmter Gleichungen 1. Grades 262, 571—573
Gebärende Zahlen 471, 472
Gebra = Dingk 453—455
Gebra und Almuchabola 445, 449, 451—455, 459—463, 468—472, 474, 481, 484—486, 488, 490, 492, 495, 499, 505, 509, 510, 512, 540, 544, 564, 607
Gedritter Schein (Astrologie) 308
Geld 470
Gemeinsames Maass, grösstes, 447, 550—552
Geometrie Euklids 6, 18, 19, 36, 37, 62, 63, 102, 103, 132, 133, 166, 167, 235, 244—248, 253, 259, 328, 329, 386, 387, 394, 395, 442, 444, 451—453, 456, 458, 460, 463, 465, 566, 586, 587, 607
Geometrisch-algebraische Konstruktion 4, 441
Gerberti opera ed Bubnov 3, 4
Gesellschaftsrechnung 219, 237, 253, 334
Gesichtslinie 368, 369, 372, 373, 380, 381
Geschwängerte Zahlen = cossische Zahlen 470, 471, 499, 500, 521, 522
Gevierte Seiten = Quadratwurzel 487
Gleichheitszeichen bei Regiomontan 189, 232, 233, 278, 279, 280, 291, 318
Gleichungen 480
Gleichungen 1. Grades 209, 216, 231, 232, 238, 259, 291, 298, 300, 447, 480, 484—486
Gleichungen 2. Grades, reine, 447, 481—483, 486—488; unreine 209, 216, 232—234, 237, 238, 253, 256, 278, 280, 296, 300, 304, 317—319, 492—497; mit einer Hilfsgrösse gelöst 234
Gleichungen 3. Grades aus einer Dreiecksaufgabe folgend 262, 331; Zusammenhang derselben mit der Bestimmung von Corda 1° 262, 441, 445, 490, 540;

vielleicht den Arabern bekannt 445, 540; reine 481, 490—492
Gleichungen 4. Grades, reine, 481, 490—492
Gleichungen höherer Grade 219, 236, 256, 262, 280, 438, 484, 485, 497—499; weshalb dergleichen reine Gleichungen nicht gebraucht werden 491
Gleichungen mit mehr als drei Gliedern 438
Gleichungen mit mehr als einer Wurzel 438, 495
Gleichungen mit negativen Wurzeln 439
Gleichungen, unbestimmte, 1. u. 2. Grades 189, 262, 296, 304, 305, 334, 447, 571—573
Gleichungsansatz 519—521
Gleichungsformen, sechs 444; *acht* 480; Darstellung in cossischen Zeichen 480—484; in moderner Bezeichnung 480
Gleichungskonstante siehe *Vigil* und *Wächter*
Gleichungslösung bei Regiomontan völlig modern 189
Gnomon (Feldmesserisch) 342—345. Siehe auch *Scala altimetriae*
Gnomon (Arithm.) 444, 459—461, 525, 526, 528, 531
Gnomonik 331
Goldner Schnitt 297, 332
Goniometrie 262, 263
Grenze 378, 379
Grundlagen der Geometrie schwankend 328
Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks aus Inhalt und Schenkel 58, 59; des *spitzwinkligen Dreiecks* aus der Höhe und beiden Seiten 64, 65

H

Halbierung, Drittelung u. s. w. von Wurzelgrössen 595—597, 601, 602, Beispiele 596, 601, 602, geometrische Erläuterung 596
Halbkreis, Inhalt 100—103; Umfang 100, 101
Halbton, grosser, 296, 334; kleiner 296, 334; wahrer 334
Hemisphäre, östliche, 195
Heronische Dreiecksformel 7, 72—74, 386, 387
Hileg (Astrologie) 295
Höhe des Dreiecks 235, 250, 380, 381; des *gleichschenkligen* 56, 57, 382, 383; des *gleichseitigen* 50—53, 382, 383, 418, 419; des *rechtwinkligen* 68, 69, 380, 381; des *rechtwinklig-gleichschenkligen* 68, 69; des *spitzwinkligen* 382, 383; des *stumpfwinkligen* 68—71, 380, 381, 418, 419; des *ungleichseitigen* 60, 61
Höhe eines Berges 360, 361, 366—369
Höhe des Paralleltrapezes 76, 77, 82—85, 88—93
Höhe der Sonne 209, 212, 213, 224, 260; *eines Sternes* 193, 195, 196, 208, 209, 213, 215, 228, 230, 231, 260, 261
Höhenabschnitte 58, 59; des *spitzwinkligen Dreiecks* 60, 61; auf andere Art 62, 63; des *Paralleltrapezes* 76, 77, 82, 83, 90, 91
Höhenfusspunkt 50, 51, 58, 59, 418, 419
Höhenlinie 350, 351
Höhenmessung 346, 347
Horizont 193, 195, 196, 207—209, 212, 224, 227, 228, 230, 238, 257, 260, 261, 280, 281, 294, 295, 297, 299, 303, 308, 319, 330, 333, 342—345, 362, 363, 366—369, 374—377

I

Jacob von Speier antwortet Regiomontan auf dessen Brief vom 15. Febr. 1465 aus Urbino 6. Apr. 1465 299—302; acceptiert die von R. vorgeschlagene Korrespondenz 299; geht auf die Scherze R.'s ein, sagt aber, dass er viele der Aufgaben R.'s zu lösen nicht im stande sei 299; giebt die Lösung der ersten Aufgabe 299; weitere Aufgaben erklärt er für falsch 299, 300; giebt zweimal vier Quadratzahlen an, mit quadratischer Summe 300; ebenso die richtige Lösung einer unbestimmten Gleichung 1. Grades 300; die übrigen Aufgaben will er einem gewissen Lucianus übergeben 300; stellt dann vier astrologische Aufgaben über das Leben und Leiden Jesus und über eine Konjunktion der drei oberen Planeten von 1425 300, 301
Ikosaeder 297, 332, 333, 392, 393
Incommensurabilis 550
Indische Rechenkunst 441, 449, 456—458, 468, 490, 545, 572—574
Inhalt schrägliegender oder vertiefter Flächenstücke 122, 123; von solchen *auf runden Bergen* 126—129; eines *Kreisabschnittes* 412, 413
Instrument zur Bestimmung rechter Winkel 176, 177; Inhaltsbestimmung von Dreiecken und Vierecken mit ihm 176—183
Instrument zum Messen unzugänglicher Höhen 122, 123; Höhenmessung damit 126, 127; *zur Höhenbestimmung von Sternen* von Bianchini konstruiert 206
irradicabilis 476, 477, 491
irrationalis 477, 521—523, 574
Italien 324
Itata 447, 467, 562—571. Siehe auch *Errores, falscher Ansatz, Regula falsi, Regula lancis*

Judicia (Astrologie) 264
Jungfrau (Sternbild) 193, 195, 198, 201, 207, 257, 262, 283, 295, 298, 302, 304, 309, 312, 313, 320
Jupiter 264, 295, 304, 317, 330, 331

K

Kante des Würfels aus der Körperdiagonale berechnet 412, 413
Kathete 381; zugleich Höhe des rechtwinkligen Dreiecks 66, 67
Kegel, Erklärung 160, 161; Oberfläche 172, 173; Volumen 172, 173; einer körperlichen Ecke ein- und umgeschriebener 332
Kegel, abgestumpfter 297, Erklärung 160, 161; Volumen 172, 173
Kegelinhalt 432, 433
Keil 394, 395
Kolur der Tag- und Nachtgleichen 213, 214, 229, 240, 319
Konjunktion der Planeten 295, 300, 301, 305, 307, 316, 330, 331
Körper 160, 161; Eintheilung derselben 160, 161; *regulärer* 392, 393; *irregulärer* 392, 393
Körperdiagonale, Erklärung 162, 163; *des Würfels* 162, 163, 410—413
Körperelle 162, 163
Körperinhalt 160—175
Körperliche Ecke 332; derselben ein- und umgeschriebener Kegel 332
Körperlichkeit 342, 343
Körperzahl 476
Krebs (Sternbild) 194, 213, 215, 259, 260, 263, 299, 302, 303, 312, 313, 320, 330
Kreis 96—107, 219, 235, 388, 389; in ein Quadrat eingeschrieben 416, 417; *Inhalt* 96—98; *Umfang* 96, 97; *Durchmesser* aus dem Inhalt 98, 99; aus dem Umfang 98, 99; aus Sehne und Pfeil 118, 119; *gemeinsames Stück zweier Kreise* 257, 258, 283—291, 331
Kreisabschnitt 100, 101, 257, 283, 287, 288, 290, 390, 391, 420—423; *Bezeichnung eines solchen* 100; Inhalt des kleinern Abschnitts 102—105; des grössern 104—107; Inhalt von Figuren aus Kreisabschnitten und Dreiecken zusammengesetzt 106, 107
Kreisbogen 390, 391, 420—423; aus Sehne und Durchmesser zu finden 110—113; aus Sehne und Umfang 112—115.
Kreisdurchmesser 388, 389, 416, 417, 420—423; Berechnung desselben aus dem Kreisinhalt 98, 99, 427, 428
Kreismöndchen 331; Erfüllung der Ebene durch sie 331
Kreisovale 331; Verhältnis desselben zu dem Möndchen 331
Kreisquadratur 329, 602
Kreissektor 257, 283—287, 289
Kreisumfang 96, 97, 236, 245, 388, 389, 416, 417
Kreisviereck 219, 235, 236, 245—254, 331; das Verhältnis der Diagonalen bekannt 248, 249; ebenso die Diagonalen selbst 250; Durchmesser aus den Seiten zu finden 250
Kubische Gleichungen, reine, 441, 445, 488—490; unreine 490, 540; vielleicht schon den Arabern bekannt 445, 540
Kubikwurzeln 236, 253, 256, 262, 280, 444, 475—477, 489, 528—530; Beispiel 528, 529; geometrischer Beweis 529, 530, arithmetischer 529
Kubikzahlen 296, 334
Kugel 160—173, 219, 236, 297, 392, 393, 412, 413; Erklärung 160, 161; Oberfläche 172, 173, 412, 413, 432, 433; Volumen 172, 173, 412, 413, 432, 433
Kugelabschnitt 172—175, 297, 298, 412—415
Kugeldurchmesser bestimmt aus dem Inhalt 414, 415
Kugelkappe (circulus convexus) 174, 175, 332
Kugelkreise, kleine, 332; Neigungswinkel von solchen 332
Kulminationspunkt eines Sternes 193, 195, 196, 207, 208, 213, 239, 257, 261, 262, 294, 308, 319

L

Länge (geometr.) 342, 343, 370, 371; geographische 207, 208; von *Erfurt* 298; von *Ferrara* 193; von *Rom* 298; von *Venedig* 195; von *Wien* 196
Länge eines Sternes 193, 196, 205, 261, 294
Längenelle, Erklärung 26, 27
Längenmessung 342, 343, 370—375
Latera almugesem numeri = Seiten einer Körperzahl, Erklärung 18, 19; *numeri superficialis* = Seiten einer Flächenzahl, Erklärung 18, 19
Latus cubigonicum = Kubikwurzel 488
Latus tetragonicum = Quadratwurzel 486, 492
Lehrsätze des 2. Buches Euklids 20—23; von zwei sich scheidenden Sehnen eines Kreises 22—23; über Gleichflächigkeit und das Verhältnis von Parallelogrammen von gleicher Grundlinie oder gleicher Höhe 24, 25
Leonardo's von Pisa practica geometriae 5
Liber florum Almagesti Bianchinis 206, 236, 237, 239—241

Liber de ponderibus des Jordanus erwähnt 387
Liber trium fratrum als Quelle Leonardo's von Pisa 8
Libri de triangulis Regiomontans 219, 220, 240, 243, 251, 256, 303, 304
Libri, Histoire des sciences mathém. en Italie 3, 4
Limites numerorum 543
Linea = Linie, Erklärung 10, 11; *recta* = gerade Linie, Erklärung 10, 11; *lineae subalternae* = Parallellinien, Erklärung 14, 15
Linea bipartita = zweigespaltene Linie 450—454, 456—462, 465
Linea tripartita = dreigespaltene Linie 450—453, 462, 463, 465
Linie, gerade, 378, 379; krumme 378, 379
Löwe (Sternbild) 195, 207—209, 212, 213, 228, 241, 260, 261, 295, 299, 303, 308, 312, 313, 330

M

Macht = Potenz 472, 523
Mangelhafte Zahlen 447, 560—562
Mansor = dreiseitiges Prisma, Erklärung 164, 165
Mars 264, 265, 294, 295, 304, 307, 330, 331
Mathematik von *discere* abgeleitet 326
Maximalaufgaben 190, 333, 430, 431
Mechanik 386, 387
Mediale 444, 574
Meridian 193, 195, 208, 209, 211—213, 215, 224, 228, 231, 238, 257, 260, 261, 281, 294, 295, 308, 319, 330, 342, 343
Meridianhöhe 193
Merkur 265
Messehalah de coniunctionibus magnis 306
Messlineal (regula) 350—355, 362, 363, 372, 373. Siehe auch *Alhidade*
Messstange 342, 343, 346, 347
Minuere = Almuchabola 480
Minus (das Wort) 453, 500; (das Zeichen) 500, bei Regiomontan 216, 233, 278, 279, 280, 291, 318
Mittelpunkt des Astrolabs 348, 349, 352, 353, 358, 359, 364, 365, 372, 373
Mitternacht 342, 343
Mond 218, 261, 265, 266, 296, 299
Mondfinsterniss 261, 265, 266, 296, 300, 304, 324
Morgenweite der Sonne 209, 212, 213, 224, 226, 227
Mucahab = Würfel, Erklärung 162, 163
Multiplicatio lineae in se ipsam, Erklärung 18, 19; *lineae in aliam lineam,* Erklärung 18, 19; *numerorum,* Erklärung 18, 19
Multiplikation mehrgliedriger Ausdrücke 500, 505—510, Beispiele 506, 507, Probe 507, 508; *allgemeiner Brüche* 515—518, Beispiele 516, Probe 516, 517, Beispiel für Bruchsbrüche 517, Probe 517, 518; *übers Kreuz* 513, 518; *von Wurzelgrössen* 589—591, 600, 601, Beispiele 590, 601, geometrische Verdeutlichung 591
Multiplikationsbeispiele bei Regiomontan 197, 199—204, 221, 232, 268—277, 281 290, 310—316, 320—323
Multiplikationstafel für Sexagesimalzahlen 239; noch Ende des XVI. Jh. berechnet 239
v. Murr, Memorabilia Biblioth. Norimbergensium 189; hat falsch gelesen und Orthographie verändert 189

N

Nassîr ed-Dîn's Berechnung der Winkel eines sphärischen Dreiecks aus den drei Seiten 220; sein traité du quadrilatère 220
Nativitäten (Astrologie) 294, 295, 299—302
Nebenwinkel 380, 381
Negativ (das Wort) 445, 505, 506, 509
Negative Gleichungswurzeln 439
Negative Zahlen 499
Negiren = mit dem Vorzeichen — versehen 505
Negirung = Subtraktion 480, 499
Numerus = bekannte Grösse 469
Numerus = Gleichungskonstante 216
Numerus = Gleichungsunbekannte 257
Numerus = Zahl, Erklärung 16, 17; *absolutus* = dragma 495, 519; *absolutus surdus* 499, 500; *almugesen* = Körperzahl, Erklärung 18, 19; *additus* = positive Zahl 499; *compositus* = zusammengesetzte Zahl, Erklärung 16, 17, 545—547, 558; *cubus* = Kubikzahl, Erklärung 18, 19; *diminutus* = mangelhafte Zahl 560—562, = negative Zahl 499; *Gebrae* = cossische Zahl 523; *impar* = ungerade Zahl 16, 17, 558, 560; *impariter impar* 16, 17, 560, 561; *multiplex* = Vielfaches 16, 17; *par* = gerade Zahl 16, 17, 558, 560; *pariter impar* 16, 17, 560, 561; *pariter par* 16, 17, 560, 561; *perfectus* 18, 19, 558—568, die ersten drei berechnet 559, 560; *superfluus* 560—562
Numerus irrationalis 574, 575; wie zu erkennen 602. Siehe auch *numerus surdus*
Numerus in longitudine 523; *in potentia* 253, 523
Numerus medialis 574—576, wie geschrieben 577; Rechnung mit solchem 605—607; geometrische Erläuterungen 578

Numerus mutuatus bei Wurzelausziehung 597—607
Numerus potentionalis = numerus in potentia 523
Numerus primus et imcompositus 547; Bestimmung desselben 545—547
Numerus quadratus = Quadratzahl 18, 19
Numerus rationalis 521, 523; wie zu erkennen 602
Numerus superficialis = Oberflächenzahl 18, 19
Numerus surdus 262, 521—523, 549, 574, 575
Numeri consimiles = ähnliche Zahlen, Erklärung 18, 19; *communicantes* 16—19, 523, 545, 550—552; *incommensurabiles* 545, 550—552; *mutabemini* = theilerfremde Zahlen, Erklärung 16—19
in numeris = numerisch 461, 463—465, 468, 469, 471, 472
Nürnberg 325, 327, 336; das Centrum Europas 327

O

Oberfläche der Erde 344, 345, 350, 351; *des Kegels* 400, 401; *der Kugel* 172, 173, 412, 413; *des Prisma* 396, 397; der *Pyramide* 398, 399, falsche Formel dafür zurückgewiesen 398, 399; der *Rundsäule* 396, 397
Oktaeder 332, 392, 393
Oktant 346, 347, 350, 351
Operationszeichen 444, 499, 500
Optik 297, 333
Ordnungszahl 378, 379
Orthographie Bianchinis fehlerhaft 189, 204

P

$\pi = 3\frac{1}{7}$ 96, 97, 258, 315, 388, 389, 416—419; als nicht genau bezeichnet 414, 415
$\pi = 3\frac{10}{71}$ 258, 432, 433
$\pi = \frac{377}{120}$ 98, 99
$\pi = \frac{1554}{497}$ von Regiomontan durch Rechenfehler erhalten 258, 285, 286
$\pi = 3\frac{39831}{282296}$ 430, 431
Padua 327
Palme (Längenmass) 296, 314, 334
Parabolischer Spiegel 335
Parallelkreis am Himmel 260
Parallellinien von den Arabern anders als durch Euklid erklärt 328
Parallelogrammum 461, 463, 464
Paralleltrapez 76—95; verschiedene Arten 76, 77, 82, 83, 88—91; *Diagonalen* 78, 79, 84, 85, 88, 89, 92, 93; *Inhalt* 78, 79, 84, 85, 88—91; *Vervollständigung zu einem Dreieck* 80, 81, 84—89; *Höhe dieses Dreiecks* 80, 81, 86, 87, 88, 89
Pars = Einheitstheil, Erklärung 14, 15
Partes = Bruch, Erklärung 14, 15
Persisches Jahr 300, 304
Pes (Längenmass) 296, 334
Pest in Ferrara 206
Petitionen 14, 15; von Parallellinien 328
Petrus de Alliaco de legibus et sectis 306
Pfeife (Musik) 296, 334
Pfeil (sagitta) 100, 101, 392, 393, 420—423; Bestimmung aus Sehne und Durchmesser 116—119
Planimetrie 342, 343
Planeten 218, 239, 324
Planities 453, 476
Planum = superficies 475, 476
plus (das Wort) 500; (das Zeichen) 500
Polhöhe 261, 302, 311, 313, 323
Portio circuli = Kreisabschnitt, Erklärung 12, 13
positiv (das Wort) 500, 505
positive Zahlen 499
Potentia = Quadrat 257
Potentia = Potenz, von Regiomontan im modernen Sinne gebraucht 335; sonst 472
in potentia 444, 468, 472
Potentia potentiae = x^4 257
Potenzen der Unbekannten mit Namen genannt 443, 444, 468, 470, 472, 474, 476—479
Potenzerhebung eines Binoms 446, 523, 525—545
Potenztafel 446, 478, 542, 544
Präcession nach Ptolemäus 263; nach Albategius 263
Primum mobile 215, 239, 303
Primzahlen 547; Auffindung derselben 545—547
Primzahlen, relative, 16—19, 562
Prisma 160, 161, 396, 397; Erklärung 160, 161; Volumen 164—167; *dreiseitiges* 164, 165; (serratile) 392, 393; schief abgeschnittenes 392—397
Produktensatz bei Proportionen 110, 111, 565, 566
Profundimetrie 342, 343
Progression, geometrische, 474
proportionale Gleichungen 483—485, 497—499
proportionale Zahlen, die vier des Yles 562—567; Reduzierung derselben auf relative Primzahlen 566, 567
proportionalische Ordnung der Potenzen der Unbekannten 473, 475, 485, 488, 492, 493, 497, 505, 510
Proportionalische Zahlen 461
Proportion, arithmetische, 334, harmonische 334
Proportio = Verhältnis 450, 454, 474, 478; *duplicata* 474, 477—479; *quin-*

tuplicata 477; *septuplicata* 477; *sesquialtera* 477—479; *triplicata* 477—479
Ptolemäischer Satz vom Kreisviereck 249
Punctus (!) = Punkt, Erklärung 10, 11
Punkte des Schattens 344—347, 352—359, 364—375
Pünktchen zur Bezeichnung des Stellenwerthes 201, 202, 269, 274, 285, 318, 526, 529, 531, 533, 534, 536
Pyramide 160, 161, 392—395, Erklärung 160, 161; Arten derselben 166—169; Höhe 168—171; Volumen 168, 169; *abgestumpfte* 160, 161, 392, 393, 402, 403, Erklärung 160, 161; Volumen 170, 171; falsches Verfahren nachgewiesen 402—405; durch einen Cylinder ausgehöhlt 402, 403; *dreiseitige* in eine Kugel eingeschriebene 219, 236, 252; Inhalt derselben aus den 6 Kanten zu finden 252; Bedingungen der Möglichkeit 253
Pythagoräischer Lehrsatz für rechtwinklige Dreiecke 66, 67; erweiterter für spitzwinklige Dreiecke 60—63, 72, 73; für stumpfwinklige Dreiecke 68, 69

Q

Quadrant eines Kreises 243—245, 255
Quadrant (das Messinstrument) 342, 343, 346, 347, 350—355, 358, 359, 364—367, 370, 371, 374, 375
Quadratus (!) = Quadrat (geometr.), Erklärung 14, 15, Inhalt 28, 29
Quadrat (arithmetisch) 200, 222, 236, 268, 274, 418, 419, 456, 457, 460, 469, 473, 475; eines Binoms 525, 528. Siehe auch *Zensus*
Quadrat des Astrolabs 342, 343. Siehe auch *Gnomon* und *Scala altimetriae*
Quadrat, geometrisches (Messinstrument), 348, 349, 350, 351, 354, 355
Quadratische Gleichungen, unreine durch den liber embadorum zuerst im Abendlande bekannt geworden 7; Auflösung derselben 34—41; doppelte Lösung des 3. Falles 38—41; mit 2 Unbekannten 42—49; sonst 209, 216, 232—234, 237, 238, 253, 256, 278, 279, 280, 296, 447, 481—483, 486—488, 492—497
Quadratur 460, 475
Quadratura = Flächenmessung 26, 27
Quadratwurzeln 232—235, 256, 262, 278, 280, 444, 476, 478, 487, 493, 525—528, Beispiele 526; geometrischer Beweis 527; arithmetischer Beweis 528; *angenäherte* 52, 53; $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ 53; $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{99}{740}$ 132; *sehr genaue* 416, 417, 422, 423
Quadratzahlen, Summen von, 296, 300, 334
Quadripartitum Ptolemaei 294, 295, 307
Quantitas addita = positive Grösse 500, 503, 509; *affirmata* = positive Grösse 445; *diminuta* = negative Grösse 445, 500, 503; *negativa* 445
Quantitates disparatae = Grössen mit ungleichen Vorzeichen 501, 502, 504—506; *univocae* = Grössen mit gleichem Vorzeichen 501—506, 509

R

Radix = Wurzel 467; das Zeichen dafür 444, 575—578; Tafel der neun Formen 575
Radix bissursolida 477; *censicubica* 535—537, Beispiel 535—537; *cubica* 476, 489, 528—530, Beispiel 528, 529; *cubica de cubo* 477; *quadrata* 493; *rationalis* 523, 524; *surda* 525, 549; *sursolida* 477; *tetragonica* 495, 498
Radix = res 456—458, 460, 461, 463, 465, 466, 468—474, 476, 484, 485, 492; Zeichen dafür 473, 474. Siehe auch *Dingk, res* und *cosa*
Radix communis 582—584; Zeichen dafür 582
Radix radicis 476, 491, 531, 577, 605—607; Zeichen dafür 577
rationalische Zahl 523; entstehen nur aus Gleichungen 1. Grades 562—564
rationalis 522; in der Länge (*in longitudine*) 523, 574; in der Potenz (*in potentia*) 523, 574; Erweiterung des letztern Begriffs 525, 576; jede in der Länge rationale Zahl ist es auch in der Potenz, aber nicht umgekehrt 513, 524
rationieren = rational auszählen 524, 525, 545
Rechteck 30, 31, 418, 419; Verwandlung desselben in ein Quadrat 418, 419
Rechtecker 162, 163
Regenbogen 297, 333
Regiomontan im vollen Besitze der Algebra 189; schreibt an Bianchini aus Venedig 27. Juli 1463 192—195; hat in Rom eine Aufgabe B.'s erhalten 192; musste mit Bessarion nach Venedig und schreibt deshalb erst von dort 192, 193; giebt die Lösung der Aufgabe B.'s 193; benutzt dabei den Satz, wenn die Differenz der Bogen und das Verhältnis ihres Sinus bekannt ist, so sind beide gegeben 193, 194, 220; weist auf die Unsicherheit der letzten Ziffern bei Divisionen und Wurzeln hin 194, 210; sendet B. neue Aufgaben sämtlich astronomisch 194, 195; bittet, ihn Pietro Buono zu empfehlen 195; ausführliche Lösung der Aufgabe B.'s

196—204; antwortet Bianchini ohne Datum, aber Ende 1463 209—219; hatte in Rom die Tabula primi mobilis B.'s in Händen und bedauert keine Abschrift genommen zu haben 209; hofft sie in Venedig geliehen zu erhalten 210; bedauert die Krankheit in der Familie B.'s und wünscht baldige Genesung 210; hat nur eine Sinustafel zur Disposition 210, 211; meldet von seiner Tabula primi mobilis als einer in Arbeit begriffenen 211; sie sei eine Tafel mit doppeltem Eingang 211; will zwei Werke darüber verfassen 211; beide haben sich erhalten 211; Einrichtung derselben nach v. Braumühl 211, 212; erwähnt sein Epitome in Almagestum 213; giebt die Auflösungen der Aufgaben B.'s in dessen Briefe vom 21. Nov. 1463 213, 214; ist mit der Ausarbeitung seiner Trigonometrie beschäftigt, hat sie aber leider in Rom gelassen 214; ist mit Algebra vertraut 216; Angabe des Inhaltes seiner Canones de primi mobili 216—218; meldet, er werde nach Mailand gehen 219; stellt wieder 8 Aufgaben (2 astron., 1 geom., 1 stereometr., 4 algebraische) 219; ausführliche Lösungen der Aufgaben in B.'s Briefe und der früher an B. von R. gestellten 220—234; Berechnung des Winkels eines sphärischen Dreiecks aus den Seiten 220—224; verechnet sich in den Divisionen 221; und béim Wurzelausziehen 222; erhöht die letzte Ziffer eines Quotienten oder einer Quadratwurzel, wenn der bleibende Rest mehr als $\frac{1}{2}$ des Divisors beträgt 202, 204, 227, 229 u. öfter; antwortet Bianchini auf dessen zweites Schreiben, ohne Datum aber aus Februar 1464 242—256; setzt die Richtigkeit der von B. beanstandeten Aufgaben seines vorigen Briefes auseinander 242—253; lehrt aus den Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel finden 243—244; nimmt dabei Bezug auf das 3. (jetzt 4.) Buch seiner libri V de triangulis 243; macht B. darauf aufmerksam, dass Sätze der ebenen Geometrie nicht in der Sphärik gelten 244; die 2. Aufgabe sei mit Willen falsch gestellt, um zu sehen, ob B. das Werk des Menelaus über Sphärik kenne 244; R. weiss, dass Menelaus und Mileus identisch sind 244; zeigt den Fehler der Aufgabe und die Möglichkeitsbedingung 244, 245; Nachweis, dass in jeden gegebenen Kreis ein Sehnenviereck einbeschrieben werden kann mit gegebenem Seitenverhältnis 245—251; darin der Beweis, dass nicht blos das Produkt, sondern auch das Verhältnis der Diagonalen eines solchen Vierecks bekannt ist 248, 249; daher auch diese einzeln 249, 250; ebenso der Kreisdurchmesser bei gegebenen Seiten 250; unter bestimmten Bedingungen lässt sich aus 6 Geraden als Kanten stets eine einer Kugel eingeschriebene dreiseitige Pyramide bestimmen 250; giebt die allgemeine Auflösung des von B. nur theilweise gelösten Restproblems 254; Angabe der Lösungen der von B. gestellten Aufgaben 254—259; darunter richtige Lösung einer Zinseszinsaufgabe 256; beklagt dabei, dass man bis jetzt nicht in der Lage sei, Gleichungen höherer Grade aufzulösen 256; meldet, er habe die Arithmetik des Diophant aufgefunden, aber nur 6 Bücher statt der versprochenen 13 256, 257; verspricht sie eventuell lateinisch herauszugeben 257; bei einer Aufgabe benutzt er eines Rechenfehlers halber einen falschen Werth für π 258; lehrt die Dreitheilung des Winkels mittelst der Kreiskonchoide wie die Ratdoltische Euklidausgabe 258, 259; diese ist in den Handschriften Euklids nicht enthalten 259; stimmt B. zu, dass eine von diesem beanstandete Lösung der Aufgabe, aus der Breite eines Sternes die Deklination zu bestimmen, falsch ist 259, 260; stellt neue Aufgaben (aus der Astronomie Nr. 1—16 260—262; aus der Geometrie Nr. 17 — auf Gleichung 3. Grades führend —262; dabei die Bemerkung, dass auf ihre Lösung die Bestimmung von sin 1° beruhe 262; arithmetische Nr. 18—21, darunter eine unbestimmte Gleichung 1. Grades und mehrere 2. Grades 262; endlich goniometrische Nr. 22—23, 262, 263; tadelt die gleichzeitigen Astronomen wegen der Leichtgläubigkeit, mit der sie den vorhandenen Tafeln trauen 263; und lässt sich über die widersprechenden Annahmen derselben aus 263, 264; spricht über Präcessionsbeobachtungen 263, über die verschieden beobachtete grösste Deklination der Sonne 263; Thebits Trepidationstheorie 263; auch die Alfonsinischen Tafeln sind falsch 264; nach ihnen würde die Sonne beim Eintritt in den Widder um 6 Grad vom Aequator abstehen 264; weder die Bewegung des Mars nach den Tafeln stimme mit der Beobachtung noch das beobachtete

Grössenverhältnis 264, 265; dasselbe sei mit der Venus der Fall 265; die Tafeln für Merkur sind überhaupt nicht für die Breite Europas berechnet, werden aber doch stets so benutzt 265; 1461 habe eine von ihm beobachtete Mondfinsternis um eine ganze Stunde nicht mit der Rechnung gestimmt 265; die Zeit hat er durch Beobachtung zweier Fixsterne sichergestellt 265, 266; wenn die bisherigen Annahmen richtig seien, müsse der Mond oft 4mal so gross sein als in Wirklichkeit 266; meldet, er werde Bessarion nicht nach Griechenland begleiten, sondern in Italien zurückbleiben 266; für die gestellten Aufgaben soll B. nur den Gang der Rechnung, nicht diese selbst durchführen 266; ausführliche Lösungen der ersten Aufgabe R.'s und der von B. gestellten 268—291; berechnet wieder den Winkel aus den Seiten eines sphärischen Dreiecks 266—272; löst zwei Gleichungen 2. Grades 278—280; behandelt eine Aufgabe über gemeinsames Stück zweier Kreise 283—291; benutzt dabei, eines Rechenfehlers halber, einen falschen Werth für π 286; rechnet schliesslich die erhaltenen Brüche in Sexagesimalbrüche um 290, 291; löst zuletzt noch eine Gleichung 1. Grades; schreibt an Jacob von Speier aus Rom 15. Febr. 1465 292—298; setzt die Gründe auseinander, die ihn zum Schreiben bewogen haben 292, 293; bittet um seine Freundschaft 293; giebt scherzend unter dem Bilde eines Gastmahls ihm eine Reihe von Aufgaben zur Lösung 293—298 (3 astrologische, 294; 3 astronomische 294, 295; ein Restproblem 295; 2 unbestimmte Gleichungen 2. Grades und eine solche 1. Grades 296; 2 musikalische 296; 1 geometrische 296; 4 optische 296, 297; 1 mechanische 297; 4 stereometrische 297, 289; 1 Gleichung 1. Grades 298; eine Distanzmessung 298); bittet, ihn dem Grafen Ottaviano di Urbino zu empfehlen 298; antwortet Jacob von Speier aus Viterbo ohne Datum, aber aus 1465 302—309; nimmt zunächst die von J. gelösten oder beanstandeten Aufgaben seines früheren Briefes durch, und zeigt die Richtigkeit der letztern 302—305; erwähnt dabei seine libri V de triangulis sphaeraliis (!) 303; kommt darauf zurück, dass nach den üblichen Tafeln die Sonne beim Eintritt in den Widder eine Deklination von 6° haben müsse 305, 306; die Aufgabe von der quadratischen Summe von 4 Quadraten hat J. richtig gelöst, R. besitze aber eine allgemeine Regel 20 Quadratzahlen zu finden, von denen je 4 wieder ein Quadrat geben 304; auch die unbestimmte Aufgabe 1. Grades hat J. richtig gelöst 305; aus Mangel an Büchern habe er die Aufgaben J.'s nicht vollständig gelöst; er sei von Rom nach Viterbo gegangen, und das sei die Ursache 305; die vier astrologischen Aufgaben J.'s geben ihm Gelegenheit eine grössere Reihe von Schriften zu zitieren, in denen J. sich Rath holen möge, darunter auch die Tafeln Bianchinis, die eine bestimmte Rechnung sehr abkürzen würden 306—308; stellt J. drei neue astrologisch-astronomische Aufgaben 308, 309; lässt sich endlich wieder Ottaviano di Urbino empfehlen 309; ausführliche Lösung der an Jacob von Speier im ersten Briefe gesendeten Aufgaben 309—323; benutzt hier für π den Werth $3\frac{1}{7}$ 315; muss eine Tafel der Kreisabschnitte besessen haben 315; Gleichung 2. Grades 317, 318; schreibt an Christian Roder in Erfurt aus Nürnberg 4. Juli 1471 324—336; setzt zunächst die Gründe seines Schreibens auseinander 324, 325; italienische astrologische Prognostiken hatten sich so widersprochen, dass König Matthias Corvinus an der Astrologie zu zweifeln begonnen habe; R. habe ihn zu beruhigen versucht und durch neue Beobachtungen eine feste Grundlage zu schaffen versprochen 324, 325; da er von allen Seiten, speciell auch von Frater Aquinas, Christian R.'s als eines grossen Mathematikers Ruhm gehört habe, sei ihm speciell von dem Könige der Auftrag geworden, ihn, Chr., zur Mitarbeit aufzufordern 325; ladet ihn deshalb ein mit ihm vereint die Himmelsbeobachtungen zu pflegen 325; hat sich in Nürnberg grosse Beobachtungsinstrumente gebaut 325; will auch die mathematischen Hauptwerke im Druck herausgeben, weil dadurch die Abschreibefehler vermieden werden 326; weist auf die Unsicherheit und die Fehler der geläufigen Tafeln hin 326, 327; bittet daher Roder um Mittheilung von ihm angestellter Beobachtungen 327; erbietet sich zu gleichem Austausch seiner Beobachtungen, die er in Wien, bei Bessarion, in Padua und jetzt in Nürnberg gemacht hat 327; letztere Stadt hat er sich, gleich-

sam den Mittelpunkt Europas, zu dauerndem Aufenthalt erwählt 327; er will eventuell Ephemeriden der Planeten für 30 und mehr Jahre im Drucke herausgeben 327; aber nicht nur die Grundlagen der Astronomie, sondern auch die der Geometrie seien keinesfest begründet 328; er exemplifiziert auf die 5. Petition Euklids, die er fälschlich als das 11. Axiom bezeichnet 328; die Araber haben deshalb eine andere Erklärung von Parallelen gegeben 328; polemisiert gegen Campanos Behandlung des 5. Buches Euklids 328; bespricht die verunglückten Quadraturversuche Cusa's und stellt sie mit denen des Raymund Lullus auf gleiche Stufe 329; schlägt vor, ähnlich wie er es mit italienischen Gelehrten gemacht habe, sich gegenseitig Aufgaben zur Lösung zu stellen 329; und lässt nun 35 dergleichen folgen 329—335; darunter die auf eine Gleichung 3. Grades führende 331; die über den Inhalt des Kreisvierecks und dessen Schwerpunkt 331; über den Inhalt eines sphärischen Dreiecks 332; über den Abstand der Mittelpunkte des In- und Umkreises eines Dreiecks 332; zwei Maximalaufgaben 333; drei unbestimmte Aufgaben 2. Grades 334; über Gesellschaftsrechnung 334; Aufgaben aus Statik und Mechanik speciell über die schiefe Ebene 335; über parabolische Spiegel 335; fragt an, ob Roder Arbeiten über Vergleichung von Körpern besitze, da von diesen die Lösung der Gleichungen 3. Grades abhänge 335; er hat sich schon eingehend mit solchen beschäftigt 335; setzt Preise aus für Lösung von 6 der gestellten Aufgaben 336; bittet um den Katalog der Amplonianischen Handschriftensammlung 336; und verspricht seine Arbeit de primo mobili als Gegengabe 336

Reflexion 366, 367.

Regula coecis 571; *falsi* 467. Siehe auch *falscher Ansatz, Itata, Errores, regula lancis; Hali Abenragel* 461; *lancis* 467, 562, 568; *ligar* 476; *pagamenti* 467; *Salamonis* 461; *sermonis* 461; *ta-yen* 189, 219, 237, 254, 295, 441, 447, 545, 552—558; *de tri* 364, 365, 424, 425, 432, 433; *versa* 461; *virginum* 441, 571, 572

Res = Gleichungsunbekannte 189, 216, 232, 233, 257, 278—280, 318, 468, 470—472, 476, 484, 485; Zeichen dafür 216, 473; fast wie ein x aussehend 189; es ist ein deutsches x 473. Siehe auch *cosa, dingk, radix*

Residuant = Rest 568

Residui regula vera 438

Residuum 545

Restauratio = Gebra 433, 480, 510, 519, 523

Restproblem 189, 219, 237, 254, 295, 552—558; bei nicht theilerfremden Divisoren 557; wann unmöglich 558

Rhomboides = Parallelogramm, Erklärung 14, 15; Inhalt 74, 75; Diagonale 76, 77

Rhumbus = Rhombus, Erklärung 14, 15; Inhalt 30, 31; Diagonale aus Inhalt und anderer Diagonale 50, 51; Seite aus den Diagonalen 48, 49

Rom 192, 193, 209, 214, 293, 294, 298, 299, 302, 303, 305, 327, 330; geographische Länge und Breite 294, 330

Rückwärtsrechnen 461

Rundsäule = Cylinder 392, 393, 396, 397

S

Sagitta = Pfeil, Erklärung 100, 101, 392, 393, 414, 415, 420—423. Siehe auch *Pfeil*

Saite (Musik) 234, 296

Saphar, der Monat, 5, 10, 11, 182, 183.

Sapientia Salamonis (das Buch) 462

Saturn 264, 295, 304, 316, 330, 432, 433

Savasorda. Kurze Notiz über sein Leben 5; Übersicht des Inhaltes seines Werkes 6—8; zeigt zuerst im Abendlande, wie quadratische Gleichungen zu lösen sind 7; von Leonardo von Pisa benutzt 6—8

Scala Jacob zur Auffindung der Divisoren einer Zahl 547, 559

Schatten in wirklicher Bedeutung 354—357

Schatten, rechter, = Cotangente, 342—345, 352, 353, 358—361, 370—373, 376, 379—381; *verkehrter* = Tangente 342—345, 352, 353, 356—361, 366, 367, 370—376, 379—381

Schattendreieck 356, 357

Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks aus Grundlinie und Höhe zu finden 56, 57

Schiefe Ebene 190, 335

Sechseck 378, 379

Sechste Wurzel 535—537, Beispiel 535—537

Sehne 100, 101, 236, 241, 246, 420—423; eines Grades 238; gemeinsame zweier Kreise 258; Bestimmung aus dem Bogen bei gegebenem Durchmesser 112, 113; bei gegebenem Umfang 114—117; zu jeder Sehne gehören zwei Bogen 116, 117; ebenso zwei Pfeile 116, 117

Sehnentafel, älteste in lateinischer Sprache, 8, 108
Sehnenviereck 190, 219, 235, 236, 245—251, 253; Schwerpunkt desselben 331
Seite des gleichseitigen Dreiecks aus der Höhe 54, 55, 418, 419; *des Quadrates* aus der Diagonale 34, 35
Semicirculus = Halbkreis, Erklärung 12, 13
Serrata = dreiseitiges Prisma 164, 165
Sexagesimalbrüche 604
Sexagesimalzahlen 239, 290, 291
Siebeneck 378, 379
Significator (Astrologie) 294, 295
Sinus 194, 197, 199, 201—204, 213—215, 220—231, 241, 267, 269—277, 281—283, 288, 602, 604
Sinus rectus 390, 391, 414, 415, 420, 421
Sinus totus 202, 224, 270, 283, 286, 311
Sinus versus 420, 421. Siehe auch *Pfeil*
Sinustafel 210, 211, 215, 303, 339—341, 390, 391, 412, 413, 416, 434, 602, 604; bei Regiomontan für den Sinus totus = 60000 berechnet 211
Skorpion (Sternbild) 304, 307
Soliditas 476
Sonne 193, 208, 209, 212, 213, 218, 224—226, 228, 238, 257, 260, 263—265, 281, 294, 295, 297, 298, 300, 303, 307, 308, 329, 331, 333, 354, 355
Sonnenexcentricität 263
Sonnenfinsternis bei Jesu Tode 301
Sonnenhöhe 209, 212, 213, 224—226, 228, 297, 331, 333
Sonnenstrahl 362, 363
Sonnenuhr auf geneigter Ebene 331
Sphäre des Saturn 432, 433
Sphaerica des Menelaus 244, 304
Sphärische Hohlspiegel 258, 333
Spiegel 342, 343, 346, 347, 354, 355, 360—363, 366, 367, 374, 375
Stange von gegebener Länge 354—365, 374—377
Stangen, zwei, 366, 367, 372—375
Stangeninstrument zur Feldmessung 348—355, 358, 359, 364—367, 372, 373
Staris longum = Rechtecker 162, 163; *pentagonum, exagonum* = fünf- oder sechseckiges Prisma 164, 165
Statur des Messenden 360, 361
Steinbock (Sternbild) 194, 213, 259, 303
Stereometrische Aufgaben 297, 298, 300, 314
Sternort 195
Stier (Sternbild) 219, 235, 242, 256, 260, 261, 266, 272, 276, 294, 299, 303, 311, 330
Stoicheiotes für Euklides gebraucht 442
Subtraktion 500; *allgemeiner Grössen* 502—505, Beispiele 503—505, Probe 505; *allgemeiner Brüche* 513—515, Beispiele 514—515, Probe 515; *von Wurzelgrössen* 584—589, 599, 600, Beispiele 585—587, 600; geometrische Begründung 585—588
Summe zweier Quadrate als Quadrat dargestellt 384, 385
Superficies = Fläche 10, 11, 453, 472, 477; *plana* = Ebene 12, 13
Supplemente 460, 462, 525. Siehe auch *Gnomo*
Surdus = irrational 477, 479, 499, 549, 574
Sursolidum 476, 477, 479; = surdum solidum 477; Zeichen desselben 477; eines Binoms 533
Swan-King des Sun-Tsze 553

T

Tabula arcuum et cordarum 108, 238, 386, 387; *directionum* 295; *Persica* 327; *primi mobilis* Bianchinis 205, 206, 208, 209, 228, 241, 307; *primi mobilis* Regiomontans 211, 212, 239, 336, Anfang 1464 noch nicht vollendet 211, 1471 schon Matthias Corvinus überreicht 211, 336; Einrichtung derselben nach v. Braunmühl 211, 212, Inhaltsangabe 216—218
Tabula sinus 339—341, 412, 413, 416, 434
Tabula Solis 339
Tabulae Alfonsinae 263, 264, 295, 303, 304, 307, 326, 327; *Toletanae* 263, 327
Tabulae lapideae Moysis zur Erläuterung von in der Länge und in Potenz rational 549, 550
Tafel der Division cossischer Zahlen, zugleich Tafel aller Gleichungsformen 512; *mit doppeltem Eingang* 211, 239, 445, 508, 509, 512; *der Kreisabschnitte* 315; *der Multiplikation cossischer Grössen* 508; *der Multiplikation der Vorzeichen* 509; *der neun ersten Potenzen von 2 und 3* und der zwischen ihnen einschiebbaren geometrischen Mittel 478; *der neun ersten Potenzen der Einer* 544; *der neun ersten Potenzen von 10001* zugleich Tafel der Binomialkoeffizienten 542; *der Tageslängen* 339
Tafel, geometrische = *Tafelinstrument* 348—351, 354—363, 366, 367, 372—377
Tagbogen eines Sternes 193, 194, 196, 203, 204, 207, 208, 212, 225, 257, 281, 282, 309, 311—313
Tangente (trigonom.) 342, 343
Tangentenvieleck 118, 119
Taube Zahl = numerus surdis 512
Ta-yen Regel 189, 219, 237, 254, 295, 441, 447, 545, 552—558
Ta yen lei schu des Yih-Hing 553
Terminus = Grenze, Erklärung 12, 13
Tetraeder 332, 392, 393

Tetragona superficies = Quadrat 474
tetragonisare = quadrieren 492, 494, 495
Tetragonismus = Quadrat 462
Theilung des Dreiecks in 2 gleiche Theile 130—137, nach gegebenem Verhältnis 426, 427; in 3 gleiche Theile 136—141; nach gegebenem Verhältnis 142, 143; des *Paralleltrapezes* nach gegebenem Verhältnis 428, 429; des *Viereckes* in 2 gleiche Theile 142—151; in 3 gleiche Theile 150—155; in 4 gleiche Theile 154—157; eines *excentrischen Kreissektors* in 2 gleiche Theile 156—159; des *Vollkreises* vom Mittelpunkte aus 158, 159; durch konzentrische Kreise 422—425
Theodosius de sphaeris 214, 243; es gab zwei Uebersetzungen 214
Thurm als Bezeichnung eines hohen Gegenstandes 344—355, 362, 363, 368, 369, 376, 377
Thurmschatten 354—357, 362—365
Tiefe 342, 343
Tiefe eines Thales 366, 367
Tiefenmessung 346, 347, 360—365, 370, 371
Transversalebene 394, 395
Trepidationstheorie Thabiths 263, 264
Triangolo ascalenon oder *gradatum* 382, 383
Triangulus acutiangulus = spitzwinkliges Dreieck, Erklärung 14, 15; *aequicrurius* = gleichschenkliges Dreieck, Erklärung 14, 15; *aequilaterus* = gleichseitiges Dreieck, Erklärung 14, 15; *ampligonius*, Erklärung 14, 15; *diversilaterus* 14, 15; *rectiangulus*, Erklärung 14, 15
Tribut = Zins 464, 468, 470, 472
Trigonometrie 108—119, 438; Regiomontans 219, 220, 240, 243, 251, 256, 303, 304
Trisektion des Winkels 238, 258, 259, 291

U

Ueberflüssige Zahlen 447, 560—562
Uebersetzungen Atelhards von Bath 5; *Gerhards von Cremona* 4, 5; *Platos von Tivoli* 6
Ufer eines Flusses 374—377
Umkehrungsrechnung 461
Ungarn 324, 327
Unbestimmte Gleichungen 1. Grades in ganzen rationalen Zahlen zu lösen 447, 545, 571—574; schon 66 Jahre vor Bachet gefordert 447, 574; die Lösung auf die Inder zurückgeführt 572—574
Unitas = Einheit, Erklärung 16, 17; ein gemeinsames Maass aller Zahlen sowohl in der Länge als in der Potenz 548—550
Unitas actualis absoluta 469, 521
Unitas in der Länge 456, 523, 524; *in potentia* 456, 523, 524
Unitates gebrae = cossische Grössen 454, 468, 469
unwissend = unbekannt 458, 459, 463—466, 468, 471, 472
Urbino 293, 302

V

Venedig 193, 195, 210; Länge und Breite 195
Venus 265, 308, 309
Verhältnis zwischen Kreisinhalt und Durchmesser zweier Kreise 392, 393
Vergrösserung der letzten Ziffer eines Quotienten oder einer Quadratwurzel um eine Einheit, wenn die vernachlässigten Ziffern mehr als $^1/_2$ der letzten Stelle betragen, bei Regiomontan 202, 204, 221, 223, 225, 227, 229, 230, 269—271, 274—277, 281, 282, 285, 321—323
Vervielfachung von Wurzelgrössen 593—595, 601, Beispiele 594, 595, 601; geometrischer Beweis 594
Verwandlung gemeiner Brüche in Sexagesimalbrüche 290, 291
Verwandlung einer beliebigen Figur in ein gleichseitiges Dreieck 418, 419, 426, 427; eines *Rechtecks* in ein Quadrat 418, 419; eines *Dreiecks* in ein Quadrat 384, 385; der *abgestumpften Pyramide* in einen gleichhohen Cylinder 401—407
Vieleck 378, 379; in $n-2$ Dreiecke zerlegbar 122, 123
Viereck 378, 379; *ebenes* 245—247; ungleichseitiges 92—97; zerfällt durch Diagonalen in 2 Dreiecke 92, 93; Inhalt 94, 95
Vierte Wurzel 531—533, Beispiel 531, 532; arithmetischer Beweis 532—533
Vigil = Gleichungskonstante 519, 520
Virga Aaron 552
Virga visoria 298
Virgula = Bruchstrich 518
Visierlineal 354, 355. Siehe auch *Regula, Alhidade*
Viterbo 305, 309
Vollkommene Zahlen 447, 558—560; Seltenheit derselben 558, 559
Volumen eines *Fasses* 406—411; des *Kegels* 432, 433; der *Kugel* 412, 413; des *Kugelabschnittes* 412—415; des *Prisma* 396, 397, 430, 431; der *Pyramide* 398, 399, 401—407; der *abgestumpften Pyramide* 430, 431; der *Rundsäule* 396, 397; des *Würfels* 410—411
Vorzeichen 444

W

Waage, gleicharmige (statera) 334; ungleicharmige (carasto) 297, 332, 334, 335

Waage (Sternbild) 194, 213, 257, 299, 303, 313
Wächter = vigil 579
Wassermann (Sternbild) 294, 309
Wendekreise 303
Weltpol 199, 214, 260, 319, 320
Widder (Sternbild) 207, 224, 260, 261, 264, 267, 276, 294, 295, 303, 304, 308, 309, 319, 329, 330
Wien, geographische Länge 196; Meridian 307, 327
Winkel 378, 379; *rechter* 380, 381; *spitzer* 380, 381; *stumpfer* 380, 381; eines sphärischen Dreiecks aus den drei Seiten zu finden 243, 244
Winkelmaass 366, 367
Wissende Zahl = bekannte Zahl 469, 475, 564
Würfel 162, 163, 392, 393, 410—413
Würfelverdoppelung 442; des Eratosthenes 293
Wurzeln 233, 234, 446, 575—607; höherer Grade 444, 446, 531—545
Wurzelausziehung 446, 523, 525—545; allgemeine Anweisung dazu 543, 544; *näherungsweise* 597—607, Beispiele 598—604; *Scheubelsche Formel* 603, 604; *in Form von Sexagesimalbrüchen* 604
Wurzel von der Wurzel 444, 531, 577
Wurzelzeichen 444, 524, 575—578; bei Regiomontan 234, 278, 318.
Wüstenfeld, Uebersetzungen arabischer Werke ins Lateinische 4; sein Urtheil über Plato von Tivoli als Uebersetzer unrichtig 6

Y

Yles Lehrer des *Algebras* 467; des *Euklides* 449, 450, 456

Z

Zal = Gleichungskonstante 469
Zahl, corporische, 490; *ganze rationale* 573; *lineare* 524; in *Potenz rational*, wie geschrieben 576, Tafel dazu 576; *potentionalische* 524; *rein negative* 445, 509
Zahlenreihe, natürliche 524
Zahlentheorie 432, 433, 446
Zeichenregeln 445; für *Addition* 500, 501; für *Multiplikation* 505; für *Subtraktion* 502, 503
Zenith 368, 369
Zensicubus 478, 479; eines Binoms 535
Zensiculus 526
Zensus oder *Zens* 457, 458, 461, 463, 468—474; Zeichen dafür ein deutsches *z* 473, 474. Siehe auch *Ziens*
Zensus de zensu = *zensdezens* 473, 475, 478; Zeichen dafür 476; einer Binoms 531
Zensdezenswurzel 477
Zensus zensui de zensu 478; Zeichen dafür 478; eines Binoms 539, Beispiel 539, 540
Zerlegung der Vielecke in Dreiecke 378, 379
Ziens = zensus 458, 460, 462—465, 472, 473, 477, 479
Zins = Tribut 470, 472
Zinseszinsrechnung 219, 236, 238, 256, 280
Zodiacus 193, 194, 196, 206, 228, 230
Zura (Ort bei Ferrara) 241
Zwillinge (Sternbild) 237, 254, 260, 272, 294, 299, 300, 302—304, 312, 313, 319, 321, 330

Folgende Druckfehler bittet man vor Gebrauch des Buches verbessern zu wollen.

340, 7 v. u.: Augustino. — *343*, 3 v. u.: Anfang. — *346*, 2: quando ela. — *351,* 32: Länge *gf.* — *354:* In der Figur ○8○ muss die auch im Original fehlende Stange ergänzt werden. — *360,* 4 v. u.: ita *cg.* — *383*, 6 v. u.: das besagt. — *389,* 1 v. u.: 49—38½. — *400,* 23: archo *hv.* — 25: archo *hv.* — grande. — 27: *hvc.* — 5 v. u.: pone *h*, *v.* — hoc. — *409,* 28: seien *d, q, o.* — *422,* 1 v. u.: 24,2487. — *431,* 5 v. u.: Archimedes. — *459,* 27: 4 der zens. — *480,* 1: decimum. — *504,* 26: restat.